泊松方程的差分法求解及C++实现

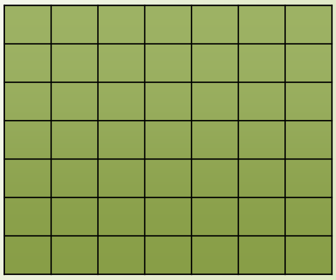
PB17051102 张德鑫 计算机学院 电磁学C

目录

泊松方程与差分迭代算法简介

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

- 泊松方程：静电场的电势满足的微分方程
- 在求解静电问题时，往往给定了一定的边界条件（例如，在某个边界上电势等于给定的值），这时通过求解泊松方程，可以得到电势在给定区域上的分布情况，进而求出给定区域的静电场
- 在实际问题中，我们通常难以求出泊松方程的精确解，而是求得它的数值近似解
- 一种数值求解泊松方程的算法：差分迭代算法
- 差分方程：用差分代替微分 $f'(x)\approx\frac{f\left(x+\frac{h}{2}\right)-f(x-\frac{h}{2})}{h}$
- 将所求解的（平面）区域沿x、y方向划分为若干边长为h的小正方形网格，把网格内的电势视作是一个常数，用网格间的差分代替微分，泊松方程变成一个差分方程



$$\varphi(x,y)=\frac{\varphi(x+h,y)+\varphi(x-h,y)+\varphi(x,y+h)+\varphi(x,y-h)}{4}+\frac{\rho h^2}{4\varepsilon_0}$$

- 我们用迭代的方式求出上面这个方程的解

平面直角坐标系下实现

$$\varphi(x,y)=\frac{\varphi(x+h,y)+\varphi(x-h,y)+\varphi(x,y+h)+\varphi(x,y-h)}{4}+\frac{\rho h^2}{4\varepsilon_0}\qquad(*)$$

- 例：两个无限长金属平板位于y=0,y=a处，两个无限长金属带位于x=±b处。保持金属板的电势V=0，金属带的电势V=V0，求金属矩形内部的电势分布。
- 不妨取V0=100,a=b=1,h=0.05

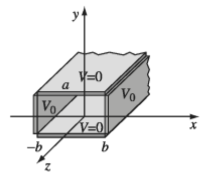
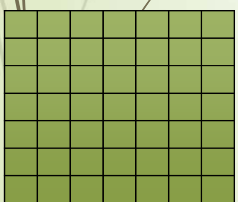


FIGURE 3.20

- 算法流程：
- 1.我们将-b≤x ≤b以及0 ≤y ≤a的矩形区域划分为边长为h的200个格子
- 2.取定边界(x=±b或y=0或y=a)上的电势值，内部的电势初值为0
- 3.根据当前的电势值，计算(*)式右侧在内部各点的取值，将它作为下一次的电势值
- 4.将3重复进行1000次，最后电势的取值近似为(*)式的解，也近似为此问题的解



算法结果及分析

- 精确解及其图像

$$V(x,y)=\frac{4V_0}{\pi}\sum_{n=1,3,5\ldots}\frac{1}{n}\frac{\cosh(n\pi x/a)}{\cosh(n\pi b/a)}\sin(n\pi y/a). \qquad (3.42)$$

- 数值解的收敛性
- 可见经过迭代后，算法的结果能收敛到一个稳定值

迭代次数	当次迭代最大差值
1	25
100	0.0457
200	0.0020748
300	0.0000925
400	0.0000041
500	0.0000002
>=600	<10^(-7)

- 数值解的图像
- 相对误差：1.004%（189个点相对误差的平均值）
- 差分迭代算法的相对误差包括两部分：迭代算法的误差和差分方程模型的误差，前者通过提高迭代次数可以不断减小，后者的误差需要通过缩小划分来减小
- 对于本题而言，还存在计算精确解的误差（级数求和）

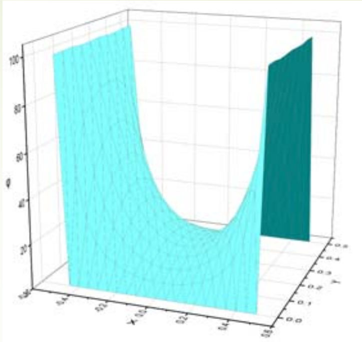


图1：精确解

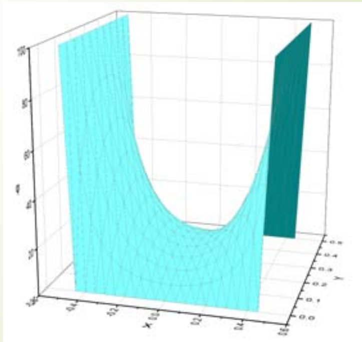
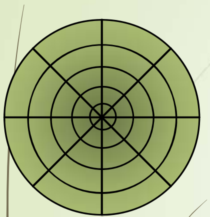


图2：数值解

平面极坐标系下实现



- 对于圆形或球形边界条件下的泊松方程，若使用之前的迭代求解方法，误差较大；将泊松方程转换为极坐标系，边界条件即变得简单
- 将求解区域（一个圆盘或圆环）沿半径方向划分为若干厚度为h的圆环，沿角度方向划分为若干角度为k的扇形
- 泊松方程及其差分形式：$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$

$$\varphi(r,\theta)=\frac{(2r^2k^2+hrk^2)\varphi(r+h,\theta)+(2r^2k^2-hrk^2)\varphi(r-h,\theta)+2h^2[\varphi(r,\theta+k)+\varphi(r,\theta-k)]+\rho/\varepsilon_0}{4r^2k^2+4h^2}$$

- 例：半径为R的金属球放置在匀强电场E0中，求静电平衡后球外的电势分布
- 边界条件的处理

$$\left.\begin{array}{ll}\text{(i)}\quad V=0 & \text{when } r=R,\\ \text{(ii)}\quad V\rightarrow -E_0 r\cos\theta & \text{for } r\gg R.\end{array}\right\} \qquad (3.74)$$

- 算法流程：与平面直角坐标系下几乎完全相同
- 取R=4,rmax=10,E0=100,h=0.1,k=π/20，迭代10000次

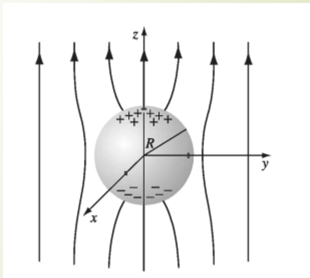


FIGURE 3.24

算法结果及分析

- 精确解及其图像

$$V(r,\theta) = -E_0\left(r - \frac{R^3}{r^2}\right)\cos\theta. \qquad (3.76)$$

- 数值解的收敛性

迭代次数	当次迭代最大差值
1	500
100	3.52
500	0.5364934
2500	0.0287211
5000	0.0007829
7500	0.0000213
10000	0.0000006

- 数值解的图像
- 数值解的相对误差：0.314%
- 差分迭代算法的相对误差包括两部分：迭代算法的误差和差分方程模型的误差
- 本题中，差分方程模型的误差既包括将圆盘划分为若干小块的误差，也包括r>>R所取的rmax不够大的误差

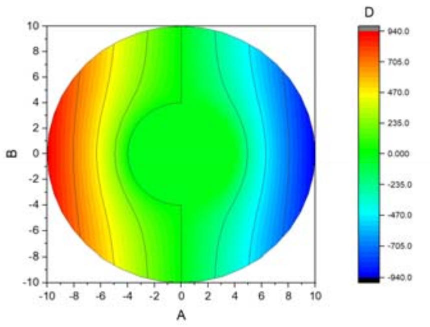


图3：精确解

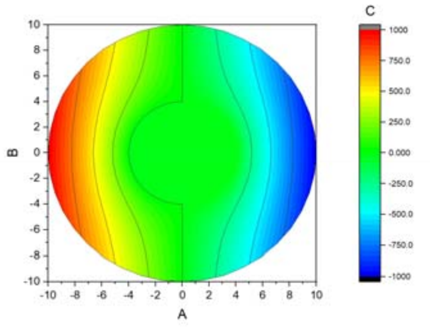


图4：数值解

总结&参考文献

- 在此文章中，我们总结了利用差分方程近似求解泊松方程的公式和基于迭代的差分方程求解算法，并利用 C++ 实现了这一算法. 我们还将平面直角坐标系下的差分方程推广到了平面极坐标系，同样利用 C++ 实现了这一算法. 我们还利用这两个算法分别求解了两个物理模型，并与精确解进行比对，验证了此算法的可靠性.

- 参考书籍：David.J.Griffiths,Introduction to Electrodynamics(4th editon)
- 其他参考文献：
  许秋燕，张现强. 求解泊松方程的多子域超松弛并行迭代算法
  朱爱玲，刘星华. 泊松方程的五点差分外推法

- 谢谢大家！