


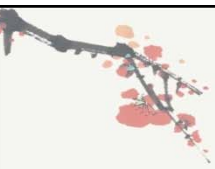

中国科学技术大学  
University of Science and Technology of China

# 亥姆霍兹线圈磁场研究及其改进方法

张崇辉 PB18051104  
信息科学学院  
指导老师：张一飞

www.ustc.edu.cn

創寰宇學府  
育天下英才  
嚴濟慈題  
二〇一八年春




中国科学技术大学  
University of Science and Technology of China

## 主要内容：

1. 亥姆霍兹线圈和匀强磁场
2. 亥姆霍兹线圈改进方法探究
3. 磁场均匀度分析

www.ustc.edu.cn

創寰宇學府  
育天下英才  
嚴濟慈題  
二〇一八年春



**匀强磁场**

速度选择器

质谱仪

螺旋加速器

生物实验

精密测量

航空航天

育天下英才 创寰宇学府  
 严济慈题  
 二〇一六年春

相距为  $d$ ，半径为  $R$ ，通入相同电流  $I$ 。

**$R = d$**


$$\left. \frac{d^2 \mathbf{B}}{dx^2} \right|_{x=0, R=d} = 0$$

$$\frac{3\mu_0 R^2}{2} \left\{ 10 \left[ R^2 + \left( \frac{d}{2} \right)^2 \right]^{-\frac{7}{2}} \left( \frac{d}{2} \right)^2 - 2 \left[ R^2 + \left( \frac{d}{2} \right)^2 \right]^{-\frac{5}{2}} \right\} = 0$$

亥姆霍兹线圈简化示意图

中国科学技术大学  
 University of Science and Technology of China

育天下英才 创寰宇学府  
 严济慈题  
 二〇一六年春



中国科学技术大学  
University of Science and Technology of China

令原点处高阶导数为0可以提高  
原点附近磁场均匀度

↓


原点处奇数阶导数为0,  
偶数高阶导数不为0

↓

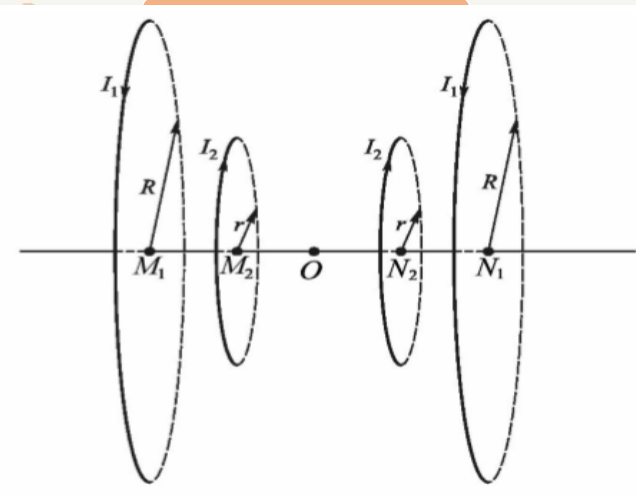
改进思路: 构造条件使得高  
阶偶数阶导数为0

創震宇學府  
育天下英才  
嚴濟慈題  
二〇一六年春

www.ustc.edu.cn



中国科学技术大学  
University of Science and Technology of China



获得理论更均匀磁场

$B_0 = B_1 + B_2$

原点处四阶导数为0

$B_1 = \frac{\mu_0 I_1 R^2}{2} \left\{ \left[ R^2 + \left( \frac{d_1}{2} + x \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} + \left[ R^2 + \left( \frac{d_1}{2} - x \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} \right\}$

$B_2 = -\frac{\mu_0 I_2 R^2}{2} \left\{ \left[ r^2 + \left( \frac{d_2}{2} + x \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} + \left[ r^2 + \left( \frac{d_2}{2} - x \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} \right\}$

令  $\frac{I_1}{R^5} = \frac{I_2}{r^5}$

創震宇學府  
育天下英才  
嚴濟慈題  
二〇一六年春

双亥姆霍兹线圈叠加

$\frac{d^4 B_0}{dx^4} \Big|_{x=0, R=d_1, r=d_2} = \frac{27648\sqrt{5}}{3125} \mu_0 \left( \frac{I_1}{R^5} - \frac{I_2}{r^5} \right)$

www.ustc.edu.cn

密绕螺线管产生  
匀强磁场

↓

使用多个圆形线圈叠加，合理安排线圈的  
电流和位置

↓

得到更加均匀的  
磁场

(a) 5线圈组                      (b) 6线圈组

N个半径均为R的圆形线圈。这些线圈所在平面和XOY平面垂直且圆心都在X轴上。

www.ustc.edu.cn

轴线上磁感应强度：

$$B = \sum_{i=1}^N \frac{\mu_0 R^2 I_i}{2} [R^2 + (d_i + x)^2]^{-\frac{3}{2}}$$

中国科学院大学  
University of Science and Technology of China

简化模型：


N个线圈      线圈关于原点对称摆放      N-1个参数

N个线圈      2N个参数

- N为偶数
  - $\frac{N}{2}$ 个位置坐标  $d_i$
  - $\frac{N}{2} - 1$ 个电流变量  $I_i$
- N为奇数
  - $\frac{N-1}{2}$ 个位置坐标  $d_i$
  - $\frac{N-1}{2}$ 个电流变量  $I_i$

N个线圈      N个电流参数  $I_i$

www.ustc.edu.cn


**中国科学技术大学**  
 University of Science and Technology of China

以N为奇数为列，  
列写出原点处偶数阶导数表达式：  
(其中 $I_0$ 为中心线圈通入的电流)

$$B^{(2)}(0) = 3\mu_0 R^2 \left[ -\frac{1}{2}I_0 + \sum_{i=1}^{\frac{N-1}{2}} \left[ I_i(4d_i^2 - 1)(1 + d_i^2)^{-\frac{7}{2}} \right] \right]$$

$$B^{(4)}(0) = 45\mu_0 R^2 \left[ \frac{1}{2}I_0 + \sum_{i=1}^{\frac{N-1}{2}} \left[ I_i(8d_i^4 - 12d_i^2 + 1)(1 + d_i^2)^{-\frac{11}{2}} \right] \right]$$

$$B^{(6)}(0) = 315\mu_0 R^2 \left[ -\frac{5}{2}I_0 + \sum_{i=1}^{\frac{N-1}{2}} \left[ I_i(64d_i^6 - 240d_i^4 + 120d_i^2 - 5)(1 + d_i^2)^{-\frac{15}{2}} \right] \right]$$

.....

$$\left\{ \begin{array}{l} B^{(2)}(0) = 0 \\ B^{(4)}(0) = 0 \\ B^{(6)}(0) = 0 \\ \dots \dots \\ B^{(2(N-1))}(0) = 0 \end{array} \right.$$

www.ustc.edu.cn

創寰宇學府  
 育天下英才  
 嚴濟慈題  
 二〇〇八年春


**中国科学技术大学**  
 University of Science and Technology of China

线圈个数N	线圈到原点距离 $d_i$	各线圈电流 $I_0$
2	$\pm 0.5R$	$I_0$
3	$0, \pm 0.76R$	$I_0, 1.882I_0$
4	$\pm 0.243R, \pm 0.941R$	$I_0, 2.26I_0$
5	$0, \pm 0.409R, \pm 1.08R$	$I_0, 1.223I_0, 3.0I_0$

www.ustc.edu.cn

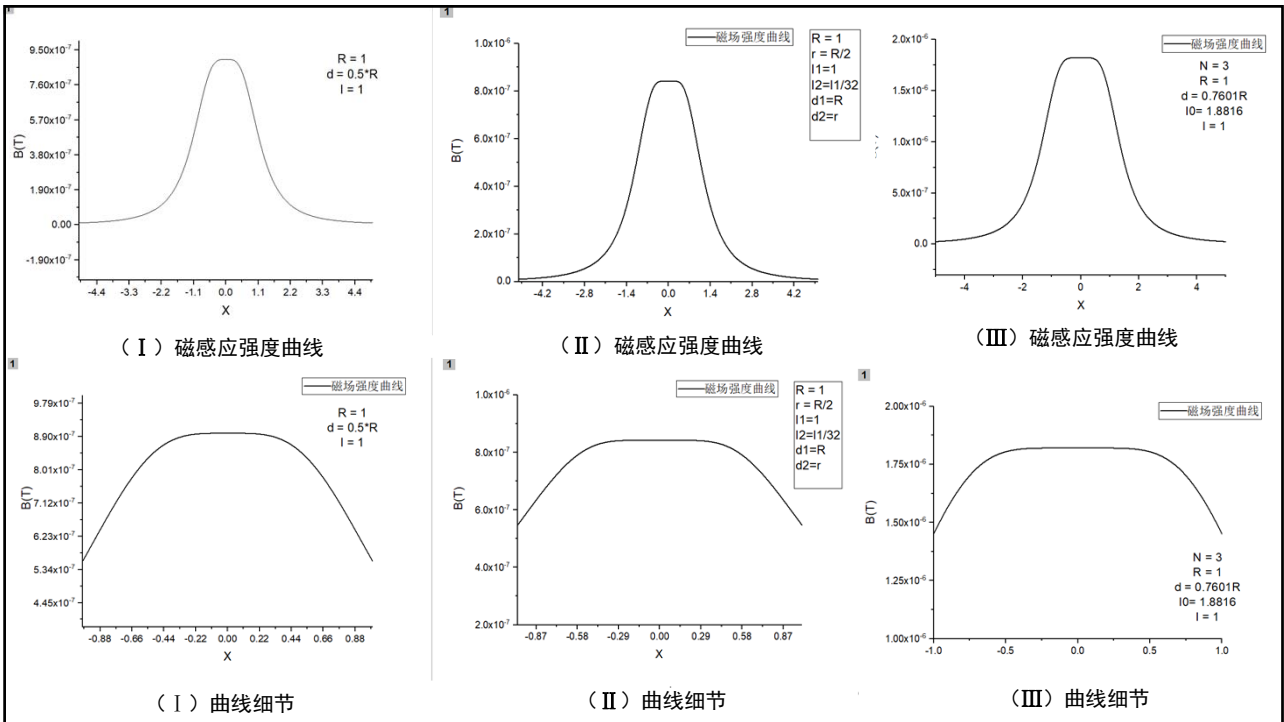
創寰宇學府  
 育天下英才  
 嚴濟慈題  
 二〇〇八年春

(I) 取半径 $R=1$ , 电流 $I=1$ , 间距 $d=R$ , 即普通亥姆霍兹线圈。

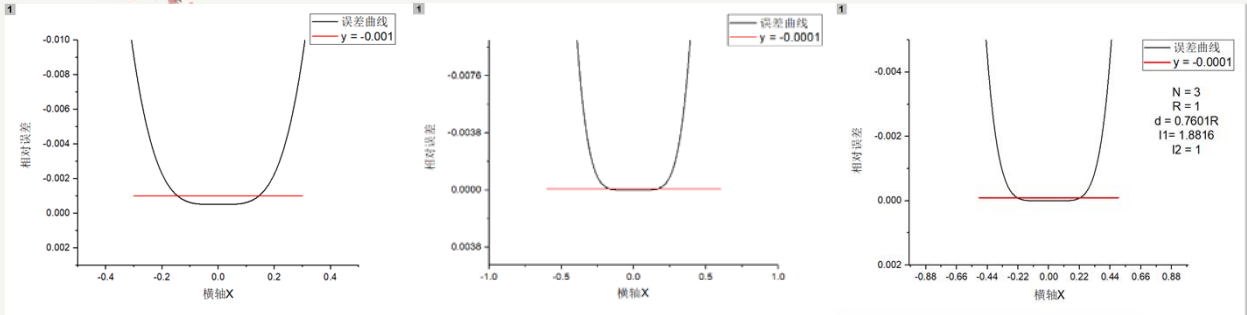
(II)  $I_1 = 1, I_2 = \frac{I_1}{32}$ ,  
 $r = \frac{R}{2}, d_1 = R, d_2 = r$ 。

(III)  $N = 3, I_0 = 1, R = 1$ ,  
 $d_i = \pm 0.7601R$  且  $I_1 = 1.8816I_0$ 。

为了方便描述, 后面用 (I) (II) (III) 代指三种线圈组

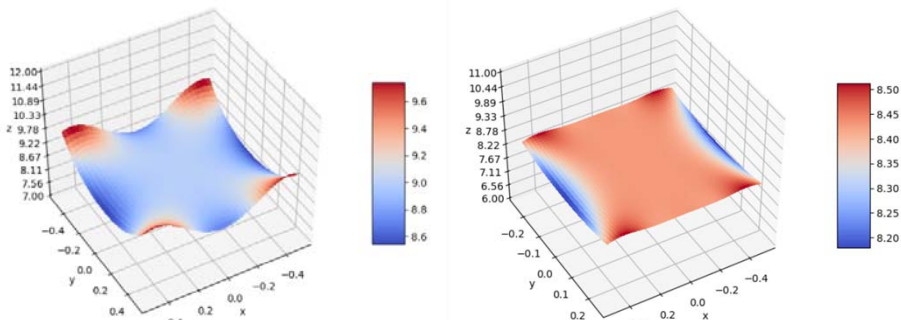






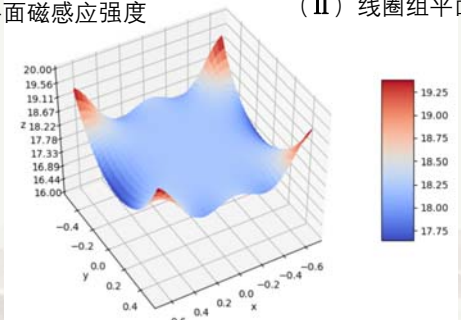
(I) 相对误差曲线 (0.1%)	$\pm 0.1730R$	(II) 误差曲线 (1%)	$\pm 0.1452R$	(III) 相对误差曲线 (1‰)	$\pm 0.0967R$
(II)	$\pm 0.2563R$		$\pm 0.2271R$		$\pm 0.1723R$
(III)	$\pm 0.3363R$		$\pm 0.2980R$		$\pm 0.2263R$

www.ustc.edu.cn



(I) 线圈组平面磁感应强度

(II) 线圈组平面磁感应强度



(III) 线圈组平面磁感应强度

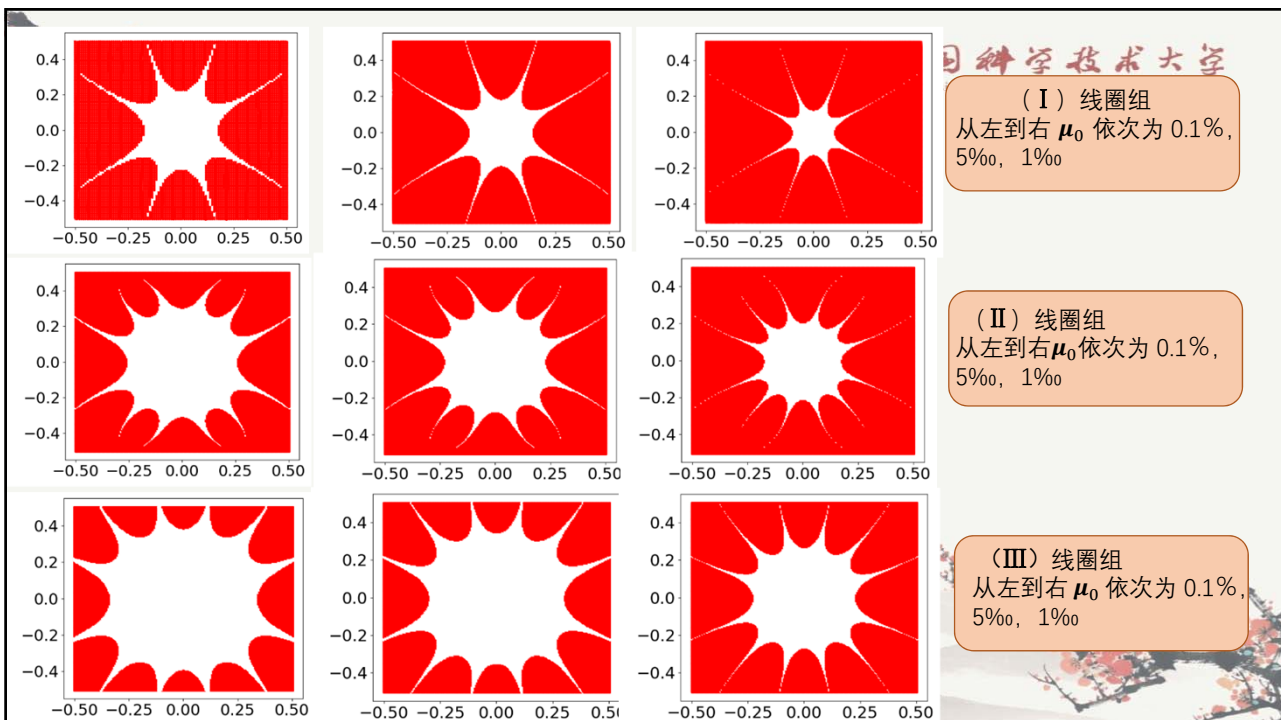
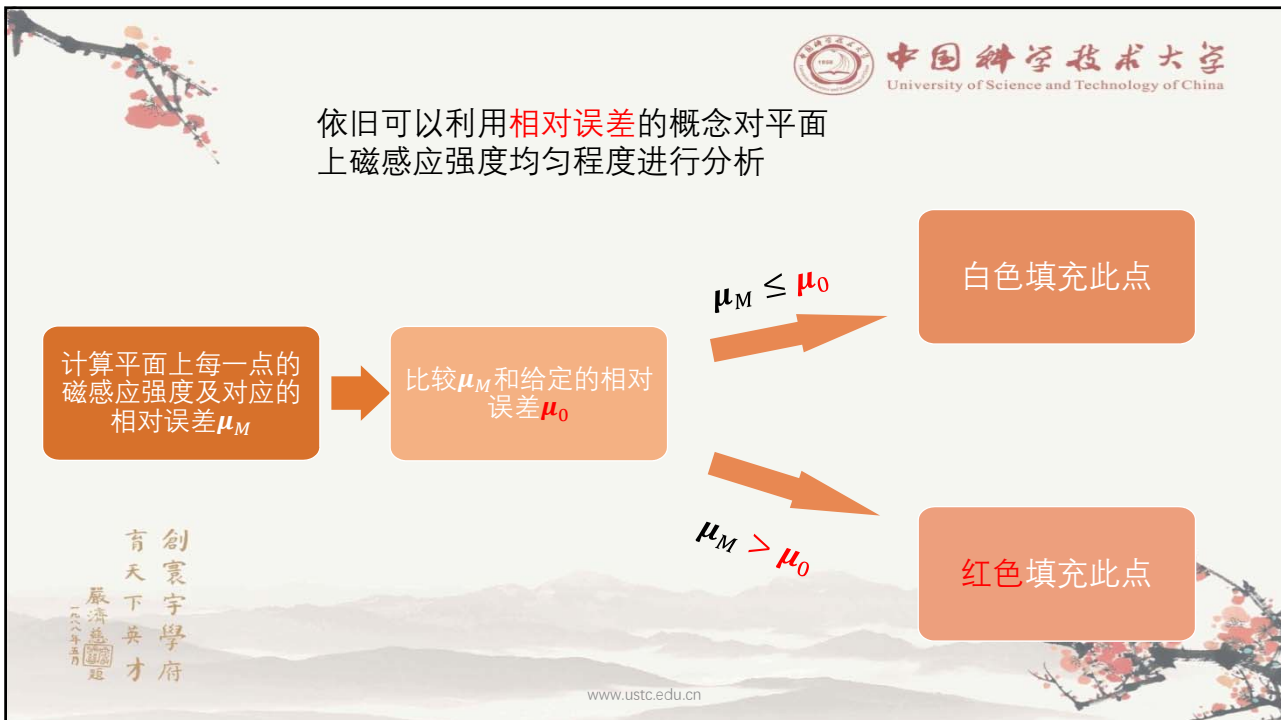
说明:

(1) 图示磁感应强度数值并非真实值。

(2) 为了防止出现无穷大的磁感应强度值, 三组线圈的绘图区间略有不同。

创寰宇学府  
育天下英才  
1958年5月  
严济慈题

www.ustc.edu.cn





计算白色区域的面积，对于不同的相对误差，数据如下

线圈种类 \ 相对误差 $\mu_0$	0.1%	5‰	1‰
(I)	$0.1980R^2$	$0.1433R^2$	$0.0654R^2$
(II)	$0.3571R^2$	$0.2668R^2$	$0.1580R^2$
(III)	$0.5526R^2$	$0.4475R^2$	$0.2680R^2$

www.ustc.edu.cn

## 总结：

两种改进普通亥姆霍兹线圈的方法，尝试使得磁感应强度表达式**原点处高阶导数为0**。

- (1) 两组亥姆霍兹线圈的反向叠加。
- (2) N个线圈的一般情况下，列写一定数量的方程，进而解出各个线圈的参数。

两种方法都明显的改善了磁场的均匀程度，并且对于第二种改进方法，理论上可以通过提高N的值获得更加均匀的磁场。

www.ustc.edu.cn



中国科学技术大学  
University of Science and Technology of China

感谢观看!

創寰宇學府  
育天下英才  
嚴濟慈題  
二〇一八年五月

[www.ustc.edu.cn](http://www.ustc.edu.cn)