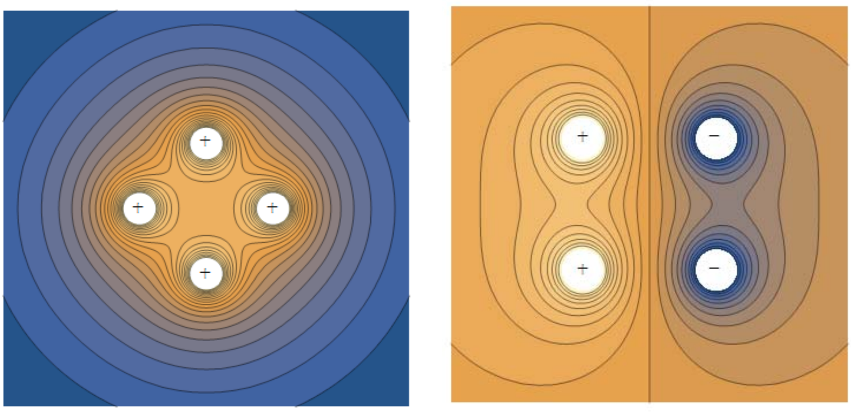
静电透镜与带电粒子运动的模拟与探究

Part 1 静电透镜的简单模拟与探究

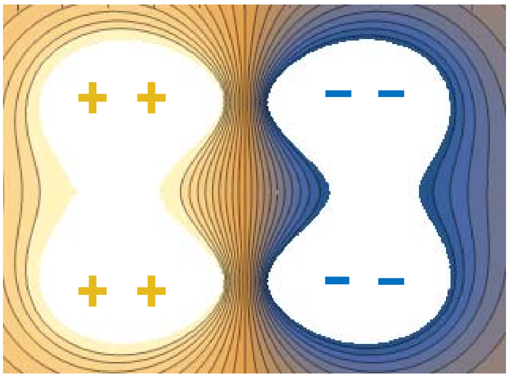
Part 2 带电粒子运动的模拟与探究

PB18071562 李顺
指导老师 孙霞

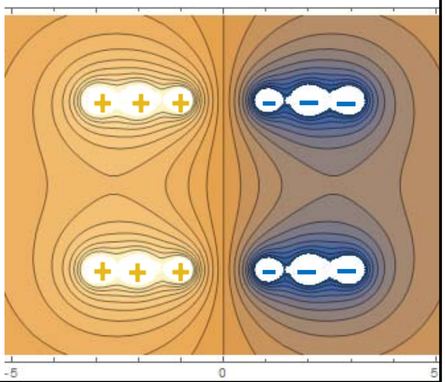
Part 1 静电透镜的简单模拟与探究

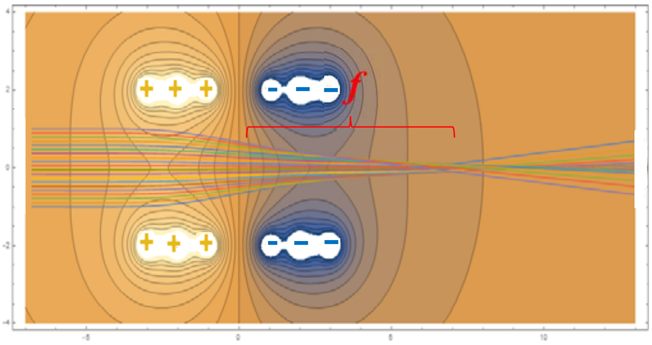


用 ***Mathematica*** 模拟的四个点电荷(两种分布)的等势面

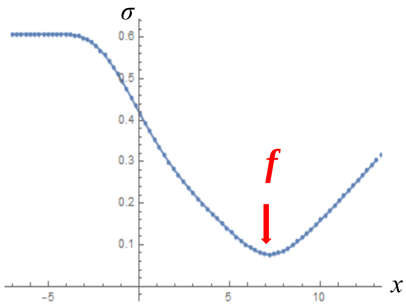


特定分布的点电荷体系可使空间局部区域的等势线呈凸透镜形状



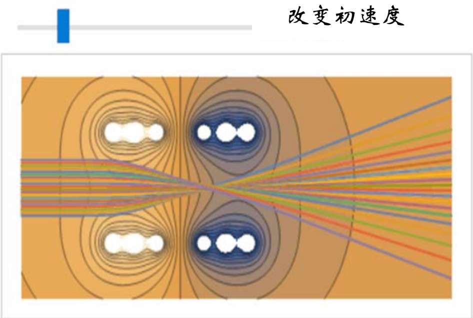


左侧平行入射的带电粒子束有明显聚焦现象，类似静电透镜的效果

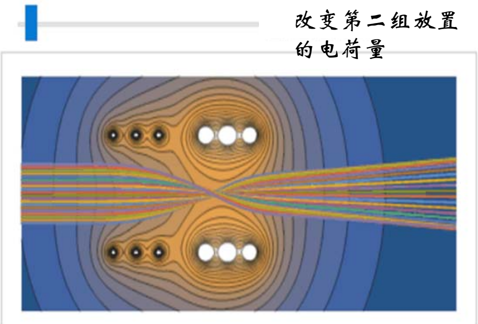


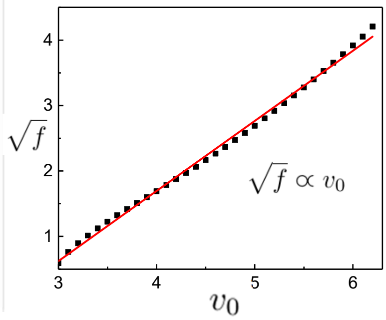
$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i - \bar{y})^2}{N}}$$

改变初速度

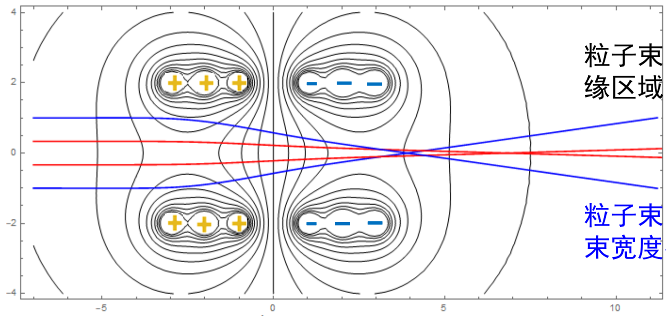


改变第二组放置的电荷量



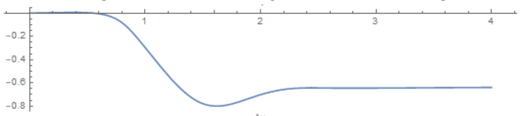


- 初速度越大，焦距越大。焦距的平方根与初速度近似呈线性关系
- 相同初速度，焦距随电荷量的改变(空间电场梯度的改变)而改变

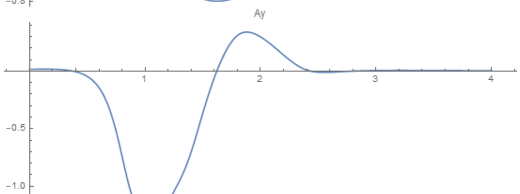


粒子束中心区域的 f 比边缘区域的 f 稍大

粒子束的聚焦效果与粒子束宽度有关



v-t图(竖直分量)



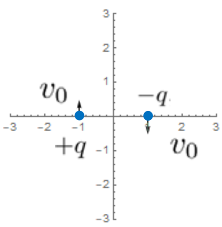
a-t图(竖直分量)

轨迹偏转的原因探究

Part1 小结：

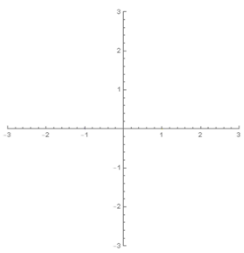
1. 特定分布的点电荷体系可使空间局部区域的等势线呈凸透镜形状，对电子束有聚焦效果
2. 焦距的平方根与初速度近似呈线性关系，焦距还可以通过空间电场梯度来调节
3. 粒子束的聚焦效果与粒子束宽度有关
4. 分析受力与速度的变化，解释了轨迹的偏转

Part 2　带电粒子运动的模拟与探究

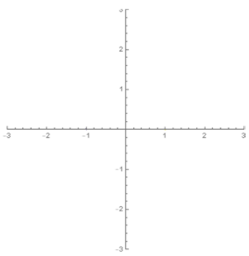


- 两个异号点电荷依靠库仑力可以绕质心匀速圆周运动
- 调整初速度的大小，轨迹会变成两个相交的椭圆

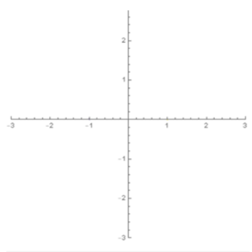
$v > v_0$



$v = v_0 = \sqrt{\frac{kq^2}{4Rm}}$

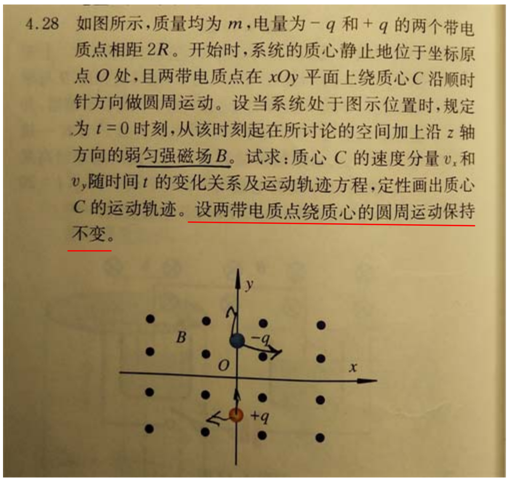


$v < v_0$

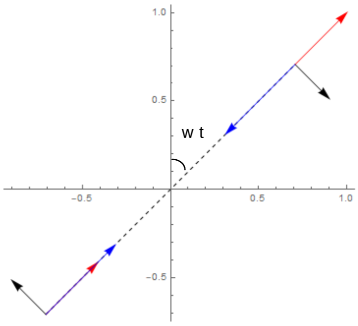


如果加入一个匀强的磁场，运动规律会不会被破坏？

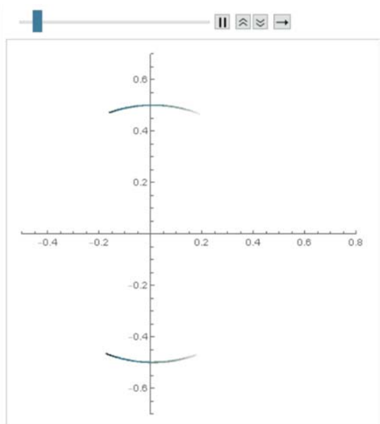
这就是课本习题4.28所给出的情景



4.28 如图所示，质量均为 m，电量为 $-q$ 和 $+q$ 的两个带电质点相距 $2R$。开始时，系统的质心静止地位于坐标原点 O 处，且两带电质点在 xOy 平面上绕质心 C 沿顺时针方向做圆周运动。设当系统处于图示位置时，规定为 $t=0$ 时刻，从该时刻起在所讨论的空间加上沿 z 轴方向的弱匀强磁场 B。试求：质心 C 的速度分量 v_x 和 v_y 随时间 t 的变化关系及运动轨迹方程，定性画出质心 C 的运动轨迹。设两带电质点绕质心的圆周运动保持不变。



$$F_x = 2qv_0 B sin(wt) = 2mX''(t)$$
$$F_y = 2qv_0 B cos(wt) = 2mY''(t)$$
$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{qv_0B}{mw^2}\left[wt - sin(wt)\right] \\ Y &= \frac{qv_0B}{mw^2}\left[1 - cos(wt)\right] \end{aligned}\right\} \text{质心轨迹为滚轮线}$$



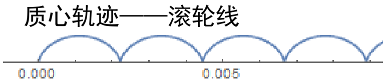
参数取值：
半径 0.5 m
带电量±1.1×10^{-10} C
质量1.1×10^{-10} kg
磁感应强度 0.001 T

得到与滚轮线答案相符的解

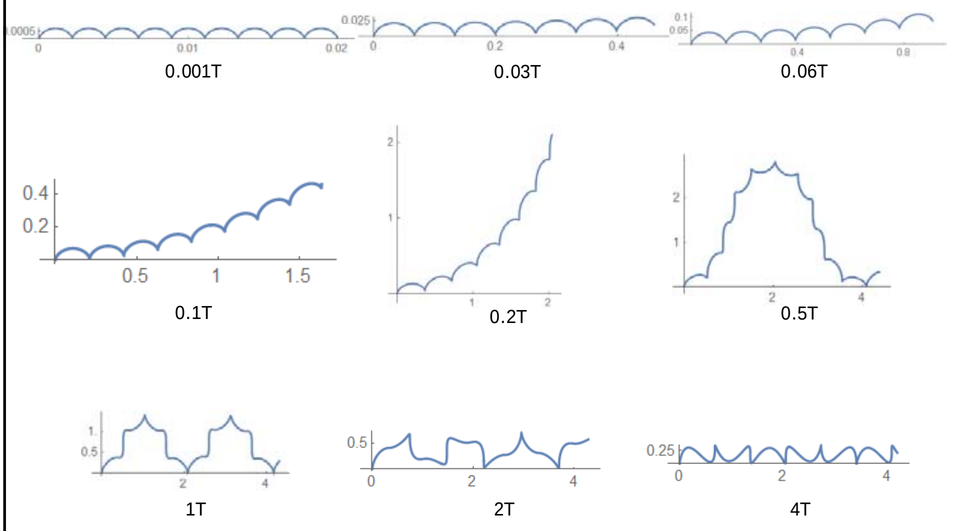
$$x_1(0) = 0; y_1(0) = -R; x_2(0) = 0; y_2(0) = R$$
$$x_1'(0) = -\sqrt{\frac{kq^2}{4Rm}}; y_1'(0) = 0; x_2'(0) = \sqrt{\frac{kq^2}{4Rm}}; y_2'(0) = 0$$

$$x_1''(t) = \frac{kq^2}{m}\frac{-(x_1(t)-x_2(t))}{[(x_1(t)-x_2(t))^2+(y_1(t)-y_2(t))^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{qB}{m}y_1'(t)$$
$$y_1''(t) = \frac{kq^2}{m}\frac{-(y_1(t)-y_2(t))}{[(x_1(t)-x_2(t))^2+(y_1(t)-y_2(t))^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{qB}{m}x_1'(t)$$
$$x_2''(t) = \frac{kq^2}{m}\frac{x_1(t)-x_2(t)}{[(x_1(t)-x_2(t))^2+(y_1(t)-y_2(t))^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{qB}{m}y_2'(t)$$
$$y_2''(t) = \frac{kq^2}{m}\frac{y_1(t)-y_2(t)}{[(x_1(t)-x_2(t))^2+(y_1(t)-y_2(t))^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{qB}{m}x_2'(t)$$

质心轨迹——滚轮线



调整磁感应强度*B*的大小，得到的质心轨迹从滚轮线发生了扭曲和变形



受力分析得

$$x_1(0)=0;y_1(0)=-R;x_2(0)=0;y_2(0)=R$$

$$x_1'(0)=-\sqrt{\frac{kq^2}{4Rm}};y_1'(0)=0;x_2'(0)=\sqrt{\frac{kq^2}{4Rm}};y_2'(0)=0$$

$$x_1''(t)=\frac{kq^2}{m}\frac{-(x_1(t)-x_2(t))}{[(x_1(t)-x_2(t))^2+(y_1(t)-y_2(t))^2]^{\frac{3}{2}}}+\frac{qB}{m}y_1'(t)$$

$$y_1''(t)=\frac{kq^2}{m}\frac{-(y_1(t)-y_2(t))}{[(x_1(t)-x_2(t))^2+(y_1(t)-y_2(t))^2]^{\frac{3}{2}}}-\frac{qB}{m}x_1'(t)$$

$$x_2''(t)=\frac{kq^2}{m}\frac{x_1(t)-x_2(t)}{[(x_1(t)-x_2(t))^2+(y_1(t)-y_2(t))^2]^{\frac{3}{2}}}-\frac{qB}{m}y_2'(t)$$

$$y_2''(t)=\frac{kq^2}{m}\frac{y_1(t)-y_2(t)}{[(x_1(t)-x_2(t))^2+(y_1(t)-y_2(t))^2]^{\frac{3}{2}}}+\frac{qB}{m}x_2'(t)$$

假设绕质心运动保持不变，有如下代换，质心记为（X, Y）

$$x_1(t)=X(t)-Rsin(wt)$$
$$y_1(t)=Y(t)-Rcos(wt)$$
$$x_2(t)=X(t)+Rsin(wt)$$
$$y_2(t)=Y(t)+Rcos(wt)$$

$$w=\frac{v}{R}=\sqrt{\frac{kq^2}{4R^3m}}$$

$$Rw^2=\frac{kq^2}{4mR^2}$$

$$X(0)=Y(0)=X'(0)=Y'(0)=0$$

$$X''(t)=\frac{qB}{m}Rwsin(wt)$$

$$Y''(t)=\frac{qB}{m}Rwcos(wt)$$

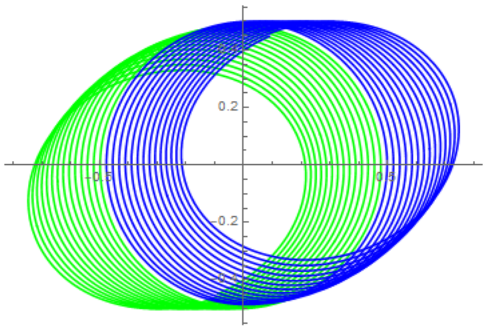
$$\frac{qB}{m}Y'(t)=-\left(\frac{kq^2}{4mR^2}-Rw^2\right)sin(wt)$$

$$\frac{qB}{m}X'(t)=\left(\frac{kq^2}{4mR^2}-Rw^2\right)cos(wt)$$

=0

代换后的微分方程组无解！

下图是B=0.1T 时，在质心参考系中看两个质点的轨迹，可以看出不是关于质心做稳定的圆周运动，而是逐渐发生了偏移。



绕质心匀速圆周的假设不成立！

Part2 小结：

1. 加入磁场后，绕质心的圆周运动近似保持，质心轨迹近似为滚轮线，磁场越弱这种近似的误差越小。
2. 但是，真正保持匀速圆周的假设是不成立的，无论加多弱的磁场，运动情况比滚轮线要复杂得多。

谢谢老师！