

关于圆筒模型趋肤效应的定量分析

汇报人 陈伟鹏

中国科学技术大学工程科学学院，安徽省合肥市 邮编230026；

邮箱：chenwp00@mail.ustc.edu.cn

目录

CONTENT

- 01 **引言**
趋肤效应现象解释及此次探索背景
- 02 **圆筒模型的建立及其理论分析**
麦克斯韦方程的运用
- 03 **关于圆筒模型等效电阻的分析**
等效电阻定量计算
- 04 **对趋肤效应等效计算的讨论**
相关结果的讨论与探索
- 05 **对多层介质圆筒趋肤效应的探索**
对研究对象的进一步探索与定量分析
- 06 **结束语**
对总结与盘点此次研究成果

PART 01

引言

趋肤效应现象解释及此次探索背景的介绍



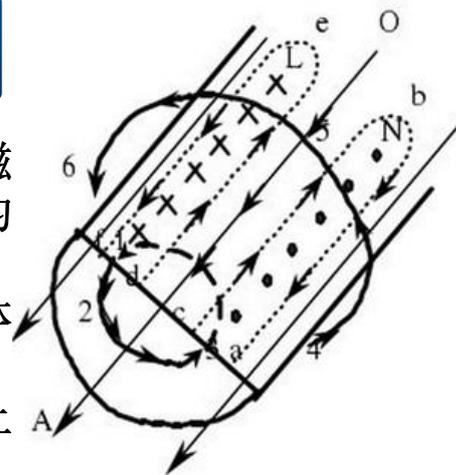
引言

趋肤效应现象解释及此次探索背景的介绍

趋肤效应

skin effect

当导体中有交流电或者交变电磁场时，导体内部的电流分布不均匀，电流集中在导体的“皮肤”部分，也就是说电流集中在导体外表的薄层，越靠近导体表面，电流密度越大，导体内部实际上电流较小。



引言
趋肤效应现象解释及此次探索背景的介绍

研究背景



一
局限于对圆柱导体模型的理论分析，而没有做进一步探索，本文接下来将建立更为一般形式的圆筒模型

二
仅仅对圆柱模型简短地进行了定性分析，未能很好地阐述趋肤效应的真正运作机理

三
直接援引从电磁波角度得出的结论，最后错误地直接取厚度为趋肤深度部分的外圆筒作为直流等效电阻去等价交流等效电阻

四
本文将进一步对多层介质导体的趋肤效应做了定量分析，探讨镀膜工艺减小交流等效电阻的可行性，为此工艺提供了理论指导

PART 02

圆筒模型的建立及其理论分析

麦克斯韦方程的运用

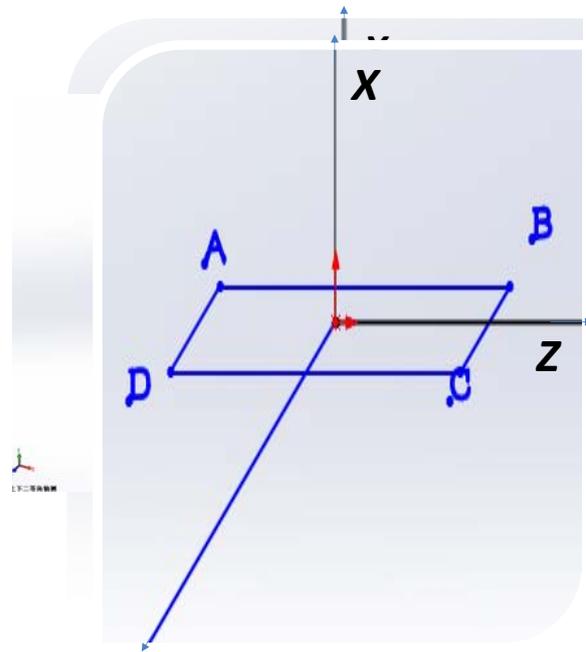


圆筒模型的建立及其理论分析 麦克斯韦方程的运用

对无限长的内径 r 、外径 R 的薄壁圆筒模型，使得电流密度均朝轴线方向，接着对筒壁内 O 点的电流磁场状况分析。

为了方便阐述，在 O 处建立空间直角坐标系，其中令 x 轴指向圆筒轴线电流方向， z 轴指向轴线， y 轴依据右手定则建立。那么就有 O 点磁感应强度 B 延 y 轴正方向。

$$\frac{\partial j}{\partial z} = \sigma \frac{\partial B}{\partial t} \quad \frac{\partial B}{\partial z} = \mu \times j$$



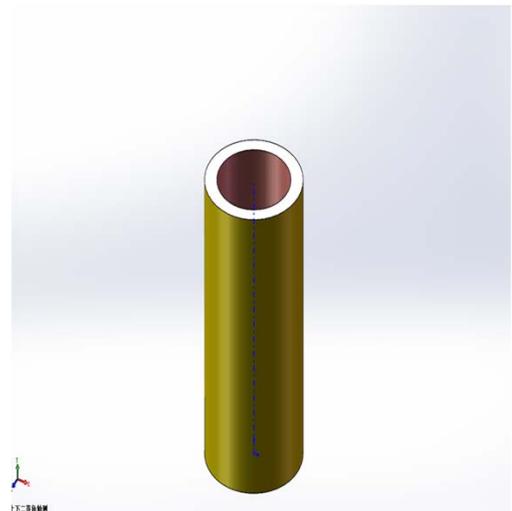
圆筒模型的建立及其理论分析 麦克斯韦方程的运用

最后结合两个环路
不难得出电流密度 j 所满足的关系式

$$\frac{\partial^2 j}{\partial z^2} = \mu \sigma \frac{\partial j}{\partial t}$$

上式便是 j 所满足的方程，在考虑交流电情况下，不难求解其表达式如下

$$j = j_0 \cdot \exp(-z/\delta) \cdot \exp\{i(\omega t + \frac{z}{\delta})\}$$



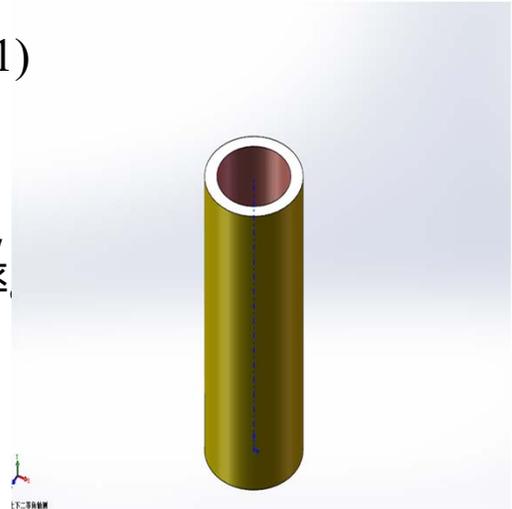


$$j = j_0 \cdot \exp(-z/\delta) \cdot \exp\{i(\omega t + \frac{z}{\delta})\} \quad (11)$$

其中 j_0 为表面的电流密度, $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$
为趋肤深度, z 为 O 点到外壁垂直距离,
 ω 为角频率, σ 为电导率, μ 为磁导率

由于我们常常并不关心导体内电流
在某处相位如何, 更多考虑的是热
效应, 故在此做适当简化, 记

$$j = j_0 \cdot \exp(-z/\delta) \sin(\omega t) \quad (12)$$



PART 03

关于圆筒模型等效 电阻的分析

等效电阻定量计算

关于圆筒模型等效电阻的分析
等效电阻定量计算

对于等效电阻，本人将从能量的角度对其进行定量分析。记圆筒长 h 。不难的得到总功率和总电流的积分表达式如下

$$P = \iiint \mathbf{1}/\sigma \cdot \mathbf{j}^2 \cdot dV \quad (13)$$

$$I = \iint \mathbf{j} dS \quad (14)$$

再依据 $P=I^2 Z$ 计算出其等效电阻表达式

$$Z = \frac{\iiint \frac{1}{\sigma} \cdot \mathbf{j}^2 \cdot dV}{(\iint \mathbf{j} dS)^2} = \frac{h\{(2R - \delta)\exp\left(\frac{2R}{\delta}\right) - (2r - \delta)\exp\left(\frac{2r}{\delta}\right)\}}{8\pi\sigma\delta\{(R - \delta)\exp\left(\frac{R}{\delta}\right) - (r - \delta)\exp\left(\frac{r}{\delta}\right)\}^2} \quad (15)$$

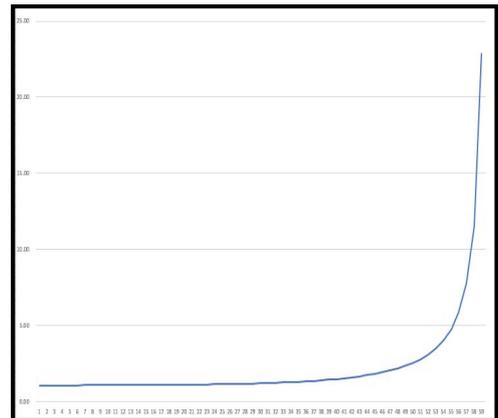
关于圆筒模型等效电阻的分析
等效电阻定量计算

最理想内径的找寻

从上图不难看出，在外径选定的情况下，只要选择合理的内径，该圆筒的等效电阻将会逼近 $r=0$ 时的最小电阻。我们在此处不妨选择实现不超过 $r=0$ 时最小等效电阻的1.01倍大小为目标，找到最大的内径，即为最理想内径。

$$Z(0) = \frac{h\{(2R - \delta)\exp\left(\frac{2R}{\delta}\right) + (\delta)\}}{8\pi\sigma\delta\{(R - \delta)\exp\left(\frac{R}{\delta}\right) + (\delta)\}^2} \quad (17)$$

$$Z(r) = \frac{h\{(2R - \delta)\exp\left(\frac{2R}{\delta}\right) - (2r - \delta)\exp\left(\frac{2r}{\delta}\right)\}}{8\pi\sigma\delta\{(R - \delta)\exp\left(\frac{R}{\delta}\right) - (r - \delta)\exp\left(\frac{r}{\delta}\right)\}^2} \quad (15)$$



关于圆筒模型等效电阻的分析 等效电阻定量计算

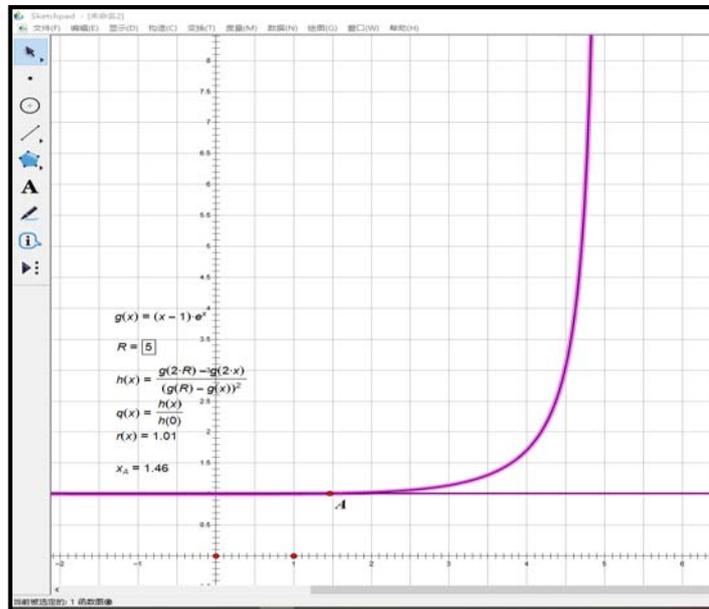
$$M = \frac{R}{\delta}, \quad m = \frac{r}{\delta}$$

$$H(m) = \frac{G(m)}{G(0)} = \frac{Z(r)}{Z(0)} \quad (21)$$

取 $M = R/\delta = 5$ ，将得到如图5所示的软件界面。

找寻最理想内径，构造 $y = 1.01$ 直线，与 $H(m)$ 图像交于A点，读取其横坐标 x_0 ，就可得该条件下的最理想内径

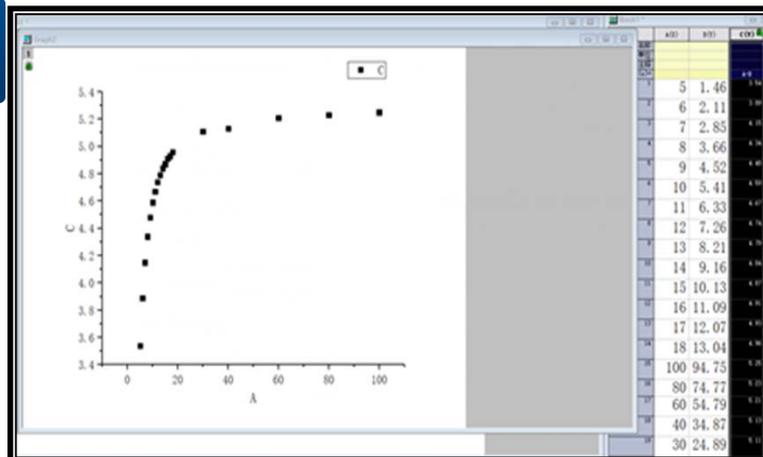
$$r = x_0 * \delta$$



关于圆筒模型等效电阻的分析 等效电阻定量计算

x_0 随 M 的变化关系的探寻

取点分析，通过取多个 M 值，并分别记录其所对应的 x_0 值，再分别计算出 $(M - x_0)$ ，在 origin 上画出散点图。



当 M 够大时， $(M - x_0)$ 趋于平缓在此处推测 M 趋于无穷大的时候， $(M - x_0)$ 因该是一个常值

关于圆筒模型等效电阻的分析
等效电阻定量计算

为了验证此假设，做以下处理，设这个常值为 β ，那么 $M=m+\beta$

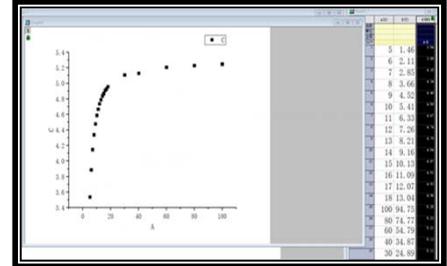
$$\lim_{M \rightarrow \infty} G(0) = \frac{2}{M} \quad (22)$$

$$\lim_{M \rightarrow \infty} G(M - \beta) = \frac{2(e^{2\beta} - 1)}{M(e^{\beta} - 1)^2} \quad (23)$$

依据两者满足1.01倍关系，这里就可以把 β 计算出来，有

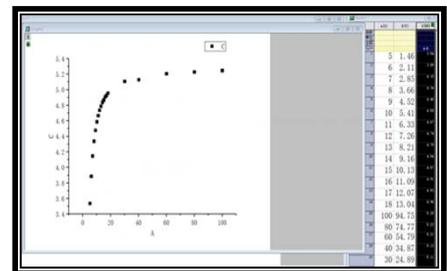
$$1.01 \times \frac{2}{M} = \frac{2(e^{2\beta} - 1)}{M(e^{\beta} - 1)^2} \quad (24)$$

计算得到 $\beta = 5.3033$ 。这与左图所示的趋势是一致的。



关于圆筒模型等效电阻的分析
相关结果的讨论与探索

通过上述的分析，我们可以，在高频段电流满足等效电阻为最小电阻的1.01倍时，最理想厚度的定量表达式为 $\Delta r = \beta \times \delta$ ，大约是趋肤深度的5.3倍。此结论可以为节省材料提供指导性意见。并且依据上法，读者可以自行确定倍数，计算出最理想厚度。



PART 04

对趋肤效应等效电阻简化计算的讨论

相关结果的讨论与探索

对趋肤效应等效电阻简化计算的讨论
等效电阻定量计算

现有文献中交流等效电阻计算的误区分析

按照那些学者的厚度为 δ 的直流等效，我们可以得到其等效电阻如下

$$Z_{\delta\text{直流等效}} = \frac{h}{\sigma 2\pi R \delta} \quad (25)$$

而实心圆柱导体在交变电流下的等效电阻如(17)式所示

$$Z(0) = \frac{h\{(2R-\delta)\exp\left(\frac{2R}{\delta}\right)+(\delta)\}}{8\pi\sigma\delta\{(R-\delta)\exp\left(\frac{R}{\delta}\right)+(\delta)\}^2} \quad (26)$$

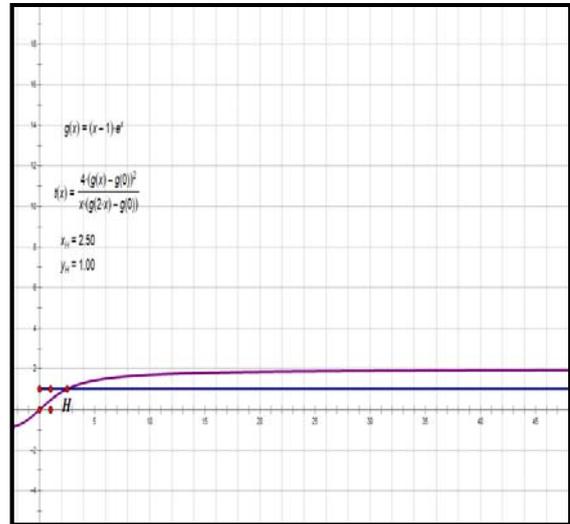
$$\text{记} A = \frac{Z_{\delta\text{直流等效}}}{Z(0)} = \frac{4(f(M)-f(0))^2}{M(f(2M)-f(0))} \quad (27)$$

对趋肤效应等效电阻简化计算的讨论
等效电阻定量计算

以M为自变量，利用几何画板绘制A(M)，在构造直线Y=1，找到其交点横坐标为2.5。

所以可知，当M=R/δ在2.5附近时，上述的直流等效才等于实际交变电阻；而一旦M超过了15左右，直流等效电阻就快逼近了实际电阻的2倍。对其进行极限分析，有

$$\lim_{M \rightarrow \infty} A = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{4(f(M)-f(0))^2}{M(f(2M)-f(0))} = 2$$



对趋肤效应等效电阻简化计算的讨论
等效电阻定量计算

综上所述，笔者在此认为单纯的取趋肤深度作直流等效分析是不恰当的，特别是做理论计算时，不可如此等效简化计算，需要做一个修正。

修正如下：只有在M极大（电流信号频率很高或圆筒外径R很大）时，可以认为等效电阻 $Z = \frac{h}{\sigma 4\pi R \delta}$ ，也就是对圆筒模型取厚度为趋肤深度时直流等效电阻的0.5倍大小，是由A极限为2推导而来的。

PART 05

对多层介质圆筒趋肤效应的探索

对研究对象的进一步探索与定量分析

对多层介质圆筒趋肤效应的探索
对研究对象的进一步探索与定量分析

多层介质圆柱模型中电流传导关系



$$j = j_0 \cdot \exp(-z/\delta) \sin(\omega t) \quad (12)$$

本人基于第一部分对于圆筒模型的理论分析，可以推知在同一层的介质当中，电流依然满足如(11)式的关系，只不过 j_0 代表的是该层介质中的外表电流密度。那么我们接下来需要探讨的问题就是在于交界面，电流密度之间的传递形式。

根据麦克斯韦方程的边值关系，有 $n \times (E_1 - E_2) = 0$

又 $j = \sigma E$ 可知E的方向与电流密度方向一致，此处的电流延轴向方向，即意味着电场强度与交界面平行，再由其延界面切向连续可知， $E_1 = E_2$

故可知交界面处： $\frac{j_1}{\sigma_1} = \frac{j_2}{\sigma_2}$ 。

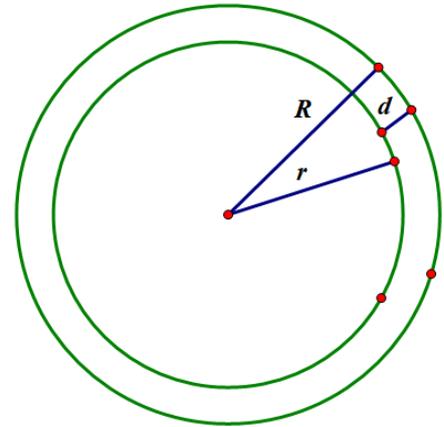
对多层介质圆筒趋肤效应的探索
对研究对象的进一步探索与定量分析

镀膜工艺的定量分析

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 \cdot \exp(-z/\delta) \sin(\omega t) \quad (12)$$

从刚才的角度我们依然可以对多层介质圆筒薄壁的等效电阻进行分析，接下来本人将从这方面对金属镀膜工艺的定量讨论。

模型如右图，在半径为 r 的原材料柱体镀上厚度为 d 的金属膜，记他们的电导率均为 σ_2 、 σ_1 ；相对磁导率均为1。



对多层介质圆筒趋肤效应的探索
对研究对象的进一步探索与定量分析

接下来，对镀膜与不镀膜进行比较，记流过镀膜材料中电流为 I_1 ，产生的功率为 P_1 ，内部原材料的电流为 I_2 ，产生的功率为 P_2 。关于 P 、 I 的计算公式见(13)、(14)式。那么有

$$\mathbf{Z}(\text{不镀膜}) = P_2 / I_2^2$$

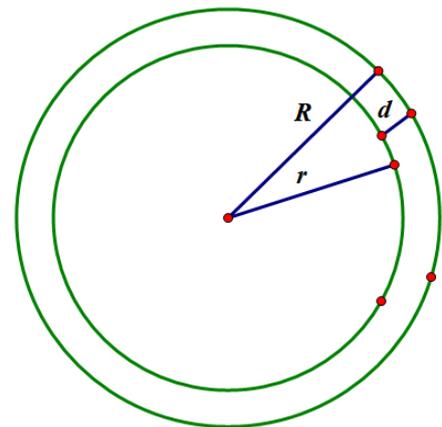
$$\mathbf{Z}(\text{镀膜}) = (P_1 + P_2) / (I_1 + I_2)^2$$

$$\text{记 } C = \frac{\mathbf{Z}(\text{镀膜})}{\mathbf{Z}(\text{不镀膜})} = \frac{I_2^2 (P_1 + P_2)}{P_2 (I_1 + I_2)^2} = \frac{1 + P_1/P_2}{(1 + I_1/I_2)^2}, \text{ 代入计算}$$

考虑到实际情况一般都满足 $R \gg d$ 与 $R \gg \delta_1$ 可有

$$C \approx \sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}} \times \frac{(1 - \exp(-\frac{2d}{\delta_1}))}{(1 - \exp(-\frac{d}{\delta_1}))^2}$$

$$d_{\text{理想}} = \frac{\delta_1}{2} \frac{C \pm \sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}}}{C - \sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}}}$$



PART 06

结束语

总结与盘点此次研究成果

工作概述 成果清单

将圆筒模型的电流分布推广至多层介质圆筒模型的电流密度分布。

揭示了电流密度在分布中所表现出的良好的无衰减性

在先前学者研究领域上跟进一步，探索了圆筒导体的趋肤效应及其等效电阻的探索。

通过对等效电阻的定量计算和分析，发现前人在简化计算趋肤效应等效电阻的不当之处，并对其做出了修正

探讨了圆筒模型内径对等效电阻的影响，并通过计算得出在满足的等效电阻的增加不超过0.01倍的情况下，高频条件下最理想的圆筒模型厚度约为5.3倍趋肤深度的定量计算成果

进一步对镀膜工艺降低交流等效电阻进行了定量分析，并未实践提供理论依据和指导。



关于圆筒模型等效电阻的分析
等效电阻定量计算

感谢中科大《电磁学》教学组所举办的电磁学小论文竞赛，
让本人能以第一创作人的身份亲自体验一番撰写小论文，
还要特别感谢助教陈书航学长给予的支持与帮助。
笔者第一次撰写期刊论文，知识和水平有限，错误和疏漏之处
在所难免，期诸君批评指出



2020

THANKS 谢谢观看

人生有梦，各自精彩

汇报人 陈伟鹏



参考文献

- [1] 胡友秋, 程福臻, 叶邦角, 刘之景. 电磁学与电动力学 [上册][M]. 第 2 版. 北京: 科学出版社, 2014
- [2] 龚善初. 涡流与趋肤效应[M].常德师范学院学报(自然科学版), 2000
- [3] 马瑞芝.在普物教学中推到趋肤效应公式的一种方法[M].河北师范大学学报(自然科学版), 1989.
- [4] 雷桂林, 曲红斌. 趋肤效应的理论解释[M]. 甘肃科学 学报, 2005
- [5] 李建兵, 牛忠霞, 周东方, 师宇杰. 电流趋肤效应的二维数值分析[M].解放军信息工程大学, 2007.
- [6] 赵亚军, 宁宁.趋肤效应对等效电阻的影响[M].黑龙江省牡丹江林业学校, 2000
- [7] 曲红斌. 趋肤效应的理论解释[M]. 甘肃联合大学理工学院, 2004
- [8] 江涛. 趋肤效应的物理诠释[M]. 茂广州师院学报(自然科学版), 1999