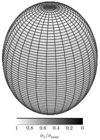
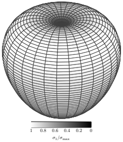
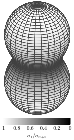
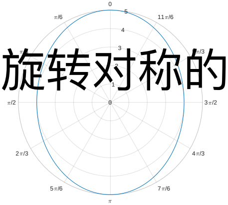
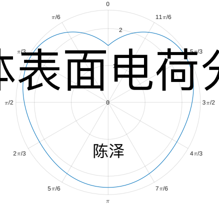


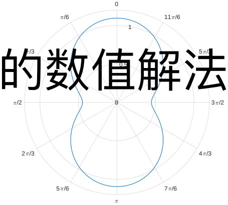




旋转对称的导体表面电荷分布的数值解法







陈泽


* 花生好像不是导体

旋转对称导体的电势的形式

导体外部的电势 V 是 Laplace 方程

$$\nabla^2 V = 0$$

的解, 在具有旋转对称性的情形下, V 具有形式

$$V = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k P_k(\cos\theta)}{r^{k+1}}.$$

当级数收敛时, 取前 $n+1$ 项截断得到的

$$V_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{A_k P_k(\cos\theta)}{r^{k+1}}$$

可以作为足够好的近似.

- 使 V 在导体表面为常量...解不出来的

$\Rightarrow$ 退而求其次，先考虑 $V_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{A_k P_k(\cos\theta)}{r^{k+1}}$.

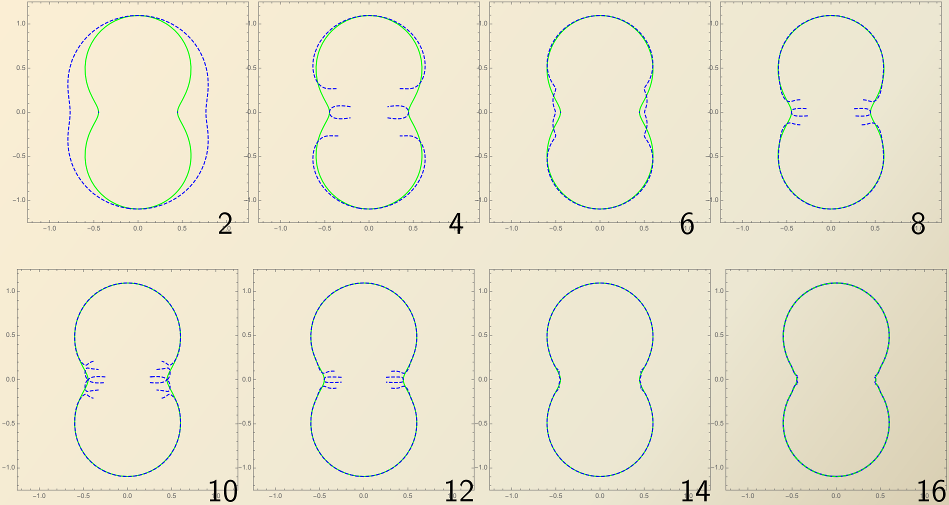
- 但 V_n 在导体表面几乎是不可能为常量的...

$\Rightarrow$ 再退而求其次，让 V_n 在导体表面的 $n+1$ 个点处为常量.

- 这其实就是解线性方程组：$n+1$ 个方程，$n+1$ 个系数.

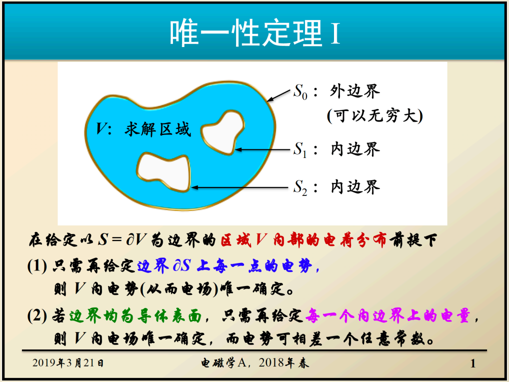
$\Rightarrow$ 小学生也会.

$$\begin{pmatrix} \frac{P_0(x_0)}{r(x_0)} & \frac{P_1(x_0)}{r(x_0)^2} & \cdots & \frac{P_n(x_0)}{r(x_0)^{n+1}} \\ \frac{P_0(x_1)}{r(x_1)} & \frac{P_1(x_1)}{r(x_1)^2} & \cdots & \frac{P_n(x_1)}{r(x_1)^{n+1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{P_0(x_n)}{r(x_n)} & \frac{P_1(x_n)}{r(x_n)^2} & \cdots & \frac{P_n(x_n)}{r(x_n)^{n+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_0 \\ \vdots \\ \varphi_0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$


2
4
6
8
10
12
14
16

为什么这样能~~工作~~算对

- 为什么在 V 在导体表面为常数就可以得到正确的导体外的电势?



■ 知道了 V, 要怎么知道 σ?

$$\sigma = \frac{E}{\epsilon_0} = \left|\frac{\nabla V}{\epsilon_0}\right|.$$

但是你不知道 V, 你只知道 V_n.

■ 这种方法能保证 V_n 如果逐点收敛于 V 吗?

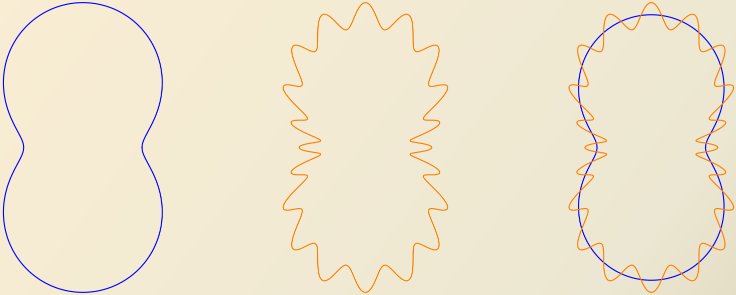
不能. 要看脸. 后面会举一个失败的例子.

■ 如果 V_n 如果逐点收敛于 V, ∇V_n 会收敛于 ∇V 吗?

不能. 需要 V_n 一致收敛和 ∇V_n 一致收敛.

但是, 对于比较简单的形状, 如果 V_n 会收敛...
那么通常 V_n 收敛很快, 而且 ∇V 也会收敛很快.
$\Rightarrow$ *It works.*

虽然不太可能发生, 可谁知道会不会呢...



- V_n 可能一致收敛于 V, 但是...

V_n 的等势面有凹陷, 凹陷处的电荷密度是很低的——而 V 的等势面没有这种凹陷.

$\Rightarrow$ 通过 ∇V_n 得出的 σ 不可能收敛于正确值.

∇V 不收敛也没那么糟

- 导体表面的电荷分布会使静电能最小, 即

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint E^2 \,\mathrm{d}\, V$$

  会取得最小值.

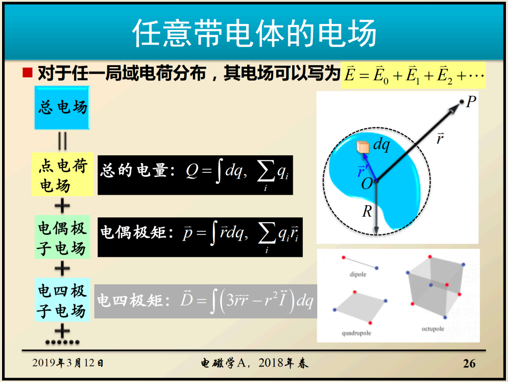
- 即使 V_n 的导等势面出了一点差错, 只要 V_n 的振荡不太剧烈, 导体表面的电场就是一致有界的——表面的电场对 W 的贡献极小.

$\Rightarrow$ 如果我让 $\theta \sim \theta + \mathrm{d}\theta$ 内两个等势面上的 $\mathrm{d}q$ 强行相等...
W 也几乎还是最小值.

在一个小的 $\Delta\theta$ 上平均从 V_n 得到的 σ, 可以逼近正确值.

滤波器？多极展开

$$V=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A_kP_k(\cos\theta)}{r^{k+1}}$$ 中的 A_k 是有物理意义的…



如果导体是由 $r=r(\theta)$ 旋转而成, 而旋转出来的导体在 $\theta\sim\theta+\mathrm{d}\theta$ 这个范围内的电荷量为 $\lambda(\theta)\,\mathrm{d}\theta$, 则

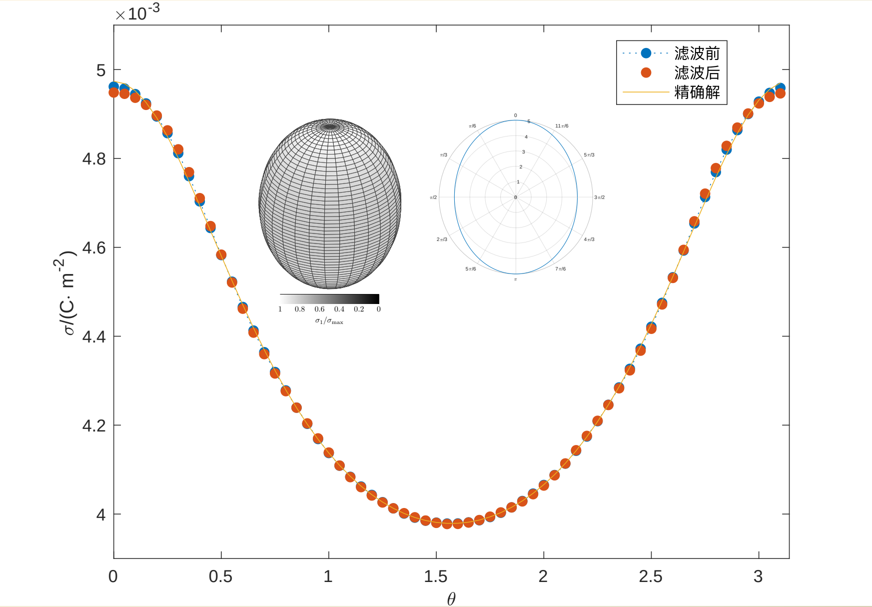
$$A_k=\int_{-\pi}^{\pi} r(\theta)^k \lambda(\theta)\, P_k(\cos\theta)\ \mathrm{d}\theta.$$

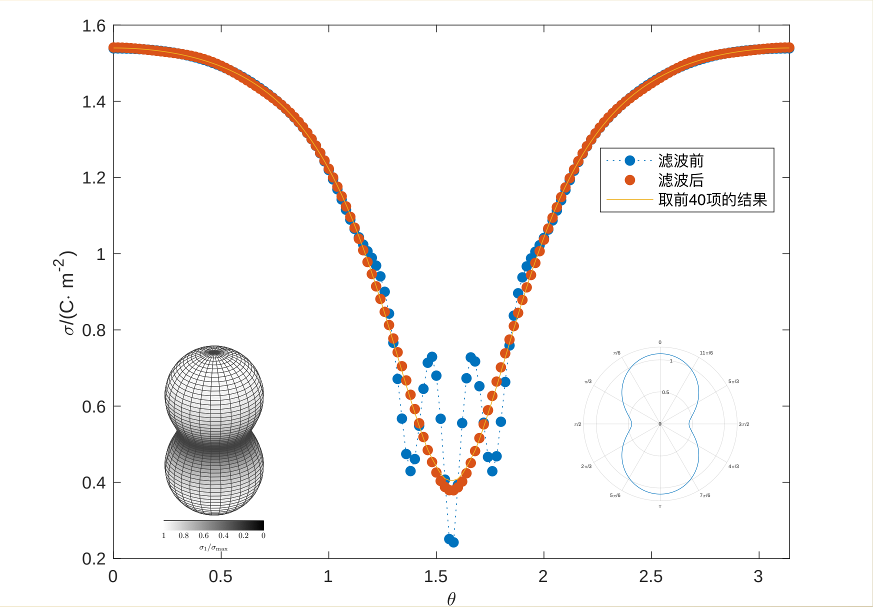
如果 $\lambda(\theta)$ 可以展开并截断为

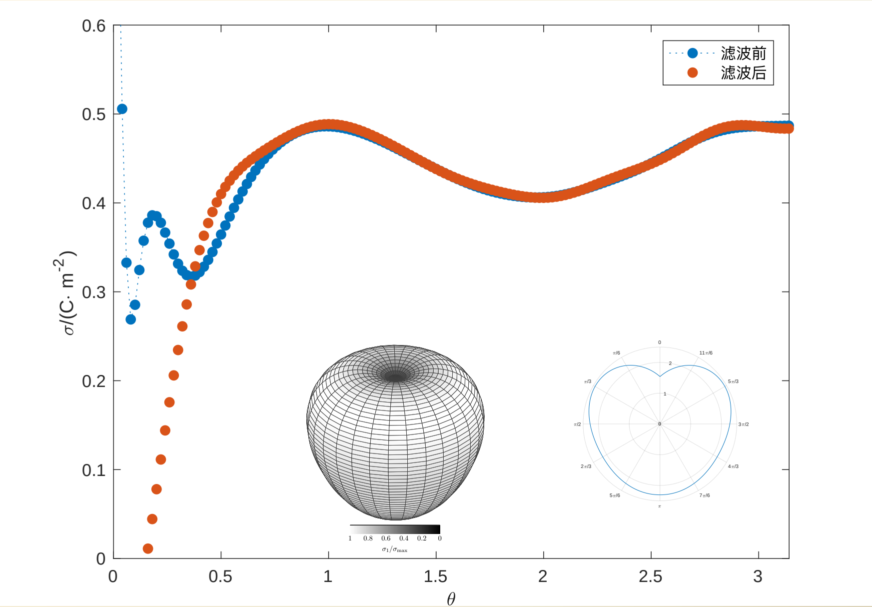
$$\lambda(\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}\Lambda_l P_l(\cos\theta)\sim\sum_{l=0}^{n}\Lambda_l P_l(\cos\theta).$$

就可以从 A_k 反解出 Λ_l——$n+1$ 个未知数, $n+1$ 个方程.

就可以反解出 λ, 顺带可以消去振荡.


$\times 10^{-3}$
5
4.8
4.6
4.4
4.2
4
$\sigma/(\mathrm{C \cdot m^{-2}})$
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
θ
滤波前
滤波后
精确解
1 0.8 0.6 0.4 0.2 0
$\sigma_1/\sigma_{\max}$


滤波前
滤波后
取前40项的结果
$\sigma/(C\cdot m^{-2})$
θ
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
σ_1/σ_{max}



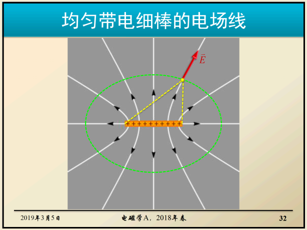
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
σ/(C· m-2)
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
θ
滤波前
滤波后
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
σ1/σmax

为什么会发散?

导体外部的电势的展开

$$V=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A_k P_k(\cos\theta)}{r^{k+1}}$$

其实不一定要收敛...



对于一个旋转对称的椭球形导体面,

$$A_k=O\left(c^k\right).$$

但 $P_k(x)$ 在 -1 到 1 之间振荡...
$r<c$ 处不可能收敛.

■ A_n 的下降率, 与这个导体的像电荷产生的多极矩相同.

如果导体的像电荷半径至少为 c, 则在 $r < c$ 处不收敛.

■ 其实还有一类必定会发散的情形...

如果导体表面有退化的点 (不可微/退化为线/面), 则不会得到正确的 σ.

■ 导体表面过于不平整, 也会导致不收敛.

$$2\kappa_M = \frac{\mathrm{d}\log E}{\mathrm{d}n},$$

因此, 对于一个电荷分布, 越靠外的等势面大体上 κ_M 越小.

如果导体表面有比较 κ_M 比较大的点...

$V = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k P_k(\cos\theta)}{r^{k+1}}$ 的等势面会在导体内部一相当接近导体的 $r = c$ 处产生退化...

$\Rightarrow$ V 在 $r < c$ 处必定发散.

更多应用

- 可以用来求具有旋转对称性的电容器的电容.

仅仅局限于一极板包含在另一极板内的情形.

- 将同样的方法应用到平面上的 Laplace 方程的解

$$V = C\ln r + \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^n \left(A_n \sin n\theta + B_n \cos n\theta\right)$$

可以求解具有平移对称性的导体外的电势和表面电荷.

- 还可以求解具有平移对称性的二导体之间的电容...

无需要求一极板在另一极板内——可以通过保形映射转化一极在另一极外的情形.

谢谢