

University of Science and Technology of China

# 介质球电像法的简要讨论

Thesis On Electromagnetics

PB18020730 彭牧原  
物理学院

USTC Physics --Thesis On Electromagnetics

University of Science and Technology of China

## CONTENTS

- 01 简介
- 02 理论分析与极限情况验证
- 03 数值计算与物理场仿真模拟
- 04 计算值与模拟值的差异分析
- 05 总结与反思

USTC Physics --Thesis On Electromagnetics

## 简介

# 01

### Introduction

我们所熟知的静电镜像法，是对于导体球而言的。但是如果对传统的电像法做一个推广，情况又如何呢？

导体球可以看作是相对介电常数趋于 $+\infty$ 的电介质，那么如果在处于电介质中的一般相对介电常数的电介质球外放一个点电荷，这样简单的电像法是否还适用呢？

结果应该是否定的。由分离变量法解出来的结果可知，点电荷-介质球系统的镜像电荷应该用级数来表示。因而介质球系统的镜像电荷比导体球系统的镜像电荷更为复杂。

## 02

## 理论分析与极限情况验证

理论的解析解导出

在极限情况下验证解的合理性

## Theoretical Analysis

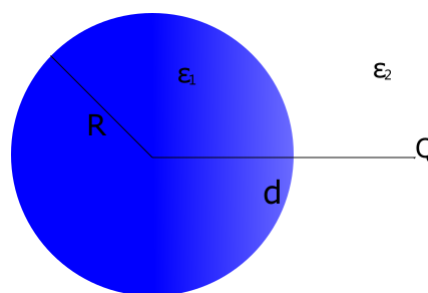
如图, 将一个半径为 $R$ , 介电常数为 $\epsilon_1$ 的均匀介质球(区域 I) 置于介电常数为 $\epsilon_2$ 的电介质(区域 II) 中, 在球外距球心为 $d$  处放一个电荷量为 $Q$ 的点电荷.

在区域 I 中, 电势分布 $\varphi$ 满足Laplace方程

$$\nabla^2 \varphi_I = 0$$

在区域 II 中, 电势分布 $\varphi$ 满足Poisson方程

$$\nabla^2 \varphi_{II} = -\frac{Q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{d})}{\epsilon_2}$$



## Theoretical Analysis

University of Science and Technology of China

由分离变量法, 结合边界条件, 得

$$\varphi_I = \frac{Q}{4\pi\epsilon_2|r-d|} + Q \frac{1}{4\pi d} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_1)n}{\epsilon_1\epsilon_2 n + (n+1)\epsilon_2^2} \left(\frac{r}{d}\right)^n R_n(\cos\theta)$$

$$\varphi_{II} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_2|r-d|} + Q \frac{R}{4\pi dr} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_1)n}{\epsilon_1\epsilon_2 n + (n+1)\epsilon_2^2} \left(\frac{R^2}{dr}\right)^n R_n(\cos\theta)$$

$\varphi_{II}$  可以分为两部分 $\varphi_1$ 和 $\varphi_2$

$$\varphi_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_2|r-d|}$$

$$\varphi_2 = Q \frac{R}{4\pi dr} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_1)n}{\epsilon_1\epsilon_2 n + (n+1)\epsilon_2^2} \left(\frac{R^2}{dr}\right)^n R_n(\cos\theta)$$

## Theoretical Analysis

University of Science and Technology of China

即

$$\varphi_2 = \frac{QR}{4\pi\epsilon_2 d} \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_1)}{(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n + \frac{\epsilon_2}{(\epsilon_1 + \epsilon_2)}} f(n, r, \theta)$$

其中

$$f(n, r, \theta) = \left(\frac{R^2}{d}\right)^n \frac{R_n(\cos\theta)}{r^{n+1}}$$

令

$$A = \frac{QR}{4\pi\epsilon_2 d} \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_1)}{(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \quad B = \frac{\epsilon_2}{(\epsilon_1 + \epsilon_2)}$$

整理变形得

$$\varphi_2 = A \sum_{n=0}^{\infty} f(n, r, \theta) - AB \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+B} f(n, r, \theta)$$

## Theoretical Analysis

University of Science and Technology of China

由轴对称的球函数展开式

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n, r, \theta) = \frac{1}{|\mathbf{r} - \frac{R^2}{d} \mathbf{e}_r|}$$

又因为

$$\frac{1}{n+B} = \int_0^{+\infty} e^{-(n+B)x} dx$$

所以

$$\varphi_2 = \frac{A}{|\mathbf{r} - \frac{R^2}{d} \mathbf{e}_r|} - AB \sum_{n=0}^{\infty} f(n, r, \theta) \int_0^{+\infty} e^{-(n+B)x} dx$$

## Theoretical Analysis

University of Science and Technology of China

若作变量代换  $e^{-x} = t$ , 则

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \frac{A}{|\mathbf{r} - \frac{R^2}{d} \mathbf{e}_r|} - AB \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \left(\frac{R^2 t}{d}\right)^n \frac{R_n(\cos \theta)}{r^{n+1}} t^{B-1} dt \\ &= \frac{A}{|\mathbf{r} - \frac{R^2}{d} \mathbf{e}_r|} - AB \int_0^1 \frac{t^{B-1}}{|\mathbf{r} - \frac{R^2 t}{d} \mathbf{e}_r|} dt \end{aligned}$$

所以

$$\varphi_{II} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_2 |\mathbf{r} - \mathbf{d}|} + \frac{A}{|\mathbf{r} - \frac{R^2}{d} \mathbf{e}_r|} - AB \int_0^1 \frac{t^{B-1}}{|\mathbf{r} - \frac{R^2 t}{d} \mathbf{e}_r|} dt$$

同理可得

$$\varphi_I = \frac{Q}{4\pi\epsilon_2 |\mathbf{r} - \mathbf{d}|} + \frac{C}{|\mathbf{r} - \mathbf{d}|} - CB \int_0^1 \frac{t^{B-2}}{|\frac{\mathbf{r}}{t} - \mathbf{d}|} dt$$

## Theoretical Analysis

University of Science and Technology of China

$$\varphi_I = \frac{Q}{4\pi\epsilon_2|\mathbf{r}-\mathbf{d}|} + \frac{C}{|\mathbf{r}-\mathbf{d}|} - CB \int_0^1 \frac{t^{B-2}}{|\frac{r}{t}-\mathbf{d}|} dt$$

$$\varphi_{II} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_2|\mathbf{r}-\mathbf{d}|} + \frac{A}{|\mathbf{r}-\frac{R^2}{d}\mathbf{e}_r|} - AB \int_0^1 \frac{t^{B-1}}{|\mathbf{r}-\frac{R^2t}{d}\mathbf{e}_r|} dt$$

观察电势的两个表达式，第一项均为源电荷及其附近的极化电荷产生的电势，第二项为镜像点电荷产生的电势，第三项可视为连续分布的线电荷产生的电势。

其中，对球内场的镜像电荷位于源电荷(S)处，大小为  $-Q_1 = Q \frac{\epsilon_0}{\epsilon_2} \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1}$ ，对球外场的镜像电荷位于像点  $= \frac{R^2}{d}$  (M) 处，大小为  $Q_2 = Q \frac{R\epsilon_0}{d\epsilon_2} \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_1)}{(\epsilon_1 + \epsilon_2)}$ ，

而对球外场连续镜像电荷分布为从球心O到M的连续镜像线电荷，对球内场的连续镜像电荷分布为从S到无穷远处的连续镜像线电荷。这就是介质球系统的镜像电荷分布。

USTC Physics -- Thesis On Electromagnetics

## Limit Case

University of Science and Technology of China

## Case 1 置于真空中的导体球

取介电常数的特殊值  $\epsilon_1 \rightarrow +\infty$ ， $\epsilon_2 = \epsilon_0$  时，情况即为置于真空中的导体球。则有

$$\varphi_I = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 d}$$

$$\varphi_{II} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{d}|} + \frac{-\frac{R}{d}Q}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}-\frac{R^2}{d}\mathbf{e}_r|} + \frac{R}{d} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

而由导体球的电像法知：

(1) 导体球是等势体，其电势等效于Q在球心处产生的电势为  $\frac{Q}{\epsilon_0 d}$ ；

(2) 导体球外的电势由源电荷Q，像点处的像电荷和球心处的像电荷产生的电势叠加而成。

这与极限所给出的解析式吻合！

USTC Physics -- Thesis On Electromagnetics

Limit Case

University of Science and Technology of China

**Case 2** 两个介电常数分别为  $\epsilon_1$  和  $\epsilon_2$  半无限大空间,  $Q$  位于  $\epsilon_2$  中  
取  $R \rightarrow +\infty$ , 则

$$\varphi_I = \frac{2Q}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{d}|} \frac{1}{\epsilon_1 + \epsilon_2}$$

$$\varphi_{II} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_2|\mathbf{r} - \mathbf{d}|} + \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \frac{Q}{4\pi\epsilon_2|\mathbf{r} + \mathbf{d}|}$$

而半无限大空间的电像法指出:

(1) 物方空间的电势由源电荷及其附近的极化电荷产生的电势和像点处的镜像电荷  $Q'$  产生的电势叠加而成;

(2) 像方空间的电势由源电荷及其附近的极化电荷产生的电势和源电荷处的镜像电荷  $Q''$  产生的电势叠加而成.

其中

$$Q' = Q'' = \frac{\epsilon_0(\epsilon_2 - \epsilon_1)}{\epsilon_2(\epsilon_2 + \epsilon_1)} Q$$

USTC Physics -- Thesis On Electromagnetics

Limit Case

University of Science and Technology of China

所以

$$\varphi_I = \frac{Q}{4\pi\epsilon_2|\mathbf{r} - \mathbf{d}|} + \frac{\epsilon_0(\epsilon_2 - \epsilon_1)}{\epsilon_2(\epsilon_2 + \epsilon_1)} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{d}|}$$

$$\varphi_{II} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_2|\mathbf{r} - \mathbf{d}|} + \frac{\epsilon_0(\epsilon_2 - \epsilon_1)}{\epsilon_2(\epsilon_2 + \epsilon_1)} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} + \mathbf{d}|}$$

这个结果也与以上给出的极限表达式吻合.

USTC Physics -- Thesis On Electromagnetics

## Limit Case

University of Science and Technology of China

**Case 3**  $\epsilon_1 = \epsilon_2$   
这时A=C=0, B=1, 所以

$$\varphi_I = \varphi_{II}$$

$$\varphi_I = \frac{Q}{4\pi\epsilon_2|\mathbf{r} - \mathbf{d}|}$$

而两部分介电常数相同时，空间电场分布等效于均匀介质中点电荷的电场分布，给出的表达式与以上两式给出的表达式相同。

以上三种情况给出的结果表示，介质球电像系统的电势表达式在极限情况下符合实际情况。

USTC Physics --Thesis On Electromagnetics

University of Science and Technology of China

03

## 数值计算与物理场仿真模拟

基于MATLAB的数值解分析

基于COMSOL的静电场仿真模拟

USTC Physics --Thesis On Electromagnetics



## Numerical Analysis

University of Science and Technology of China

为讨论方便, 取 $R=1\text{m}$ ,  $d=2\text{m}$ ,  $Q=1\times 10^{-4}\text{C}$ . 使用MATLAB 对电势进行数值解的分析 (取球心为坐标原点, 讨论极轴上点的电势).

Case 1  $\epsilon_{r1}=10, \epsilon_{r2}=50$ , 即 $\epsilon_{r1} < \epsilon_{r2}$

坐标/m	-3	-2	0.3	2	3	5
电势/V	2033.1	2753.5	9803	Inf	17406	4671.5

Case 2  $\epsilon_{r1}=10, \epsilon_{r2}=5$ , 即 $\epsilon_{r1} > \epsilon_{r2}$

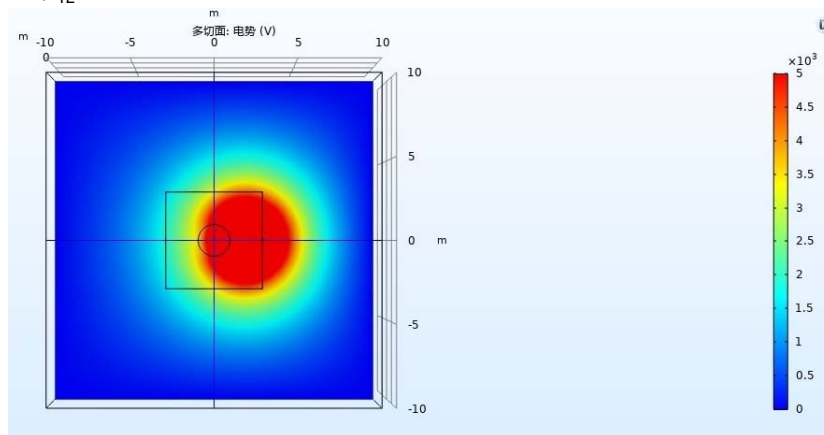
坐标/m	-3	-2	0.3	2	3	5
电势/V	23417.4	33675.2	86935	Inf	362877.4	46872.3

## COMSOL Multiphysics Analysis

University of Science and Technology of China

使用COMSOL对静电场进行仿真模拟

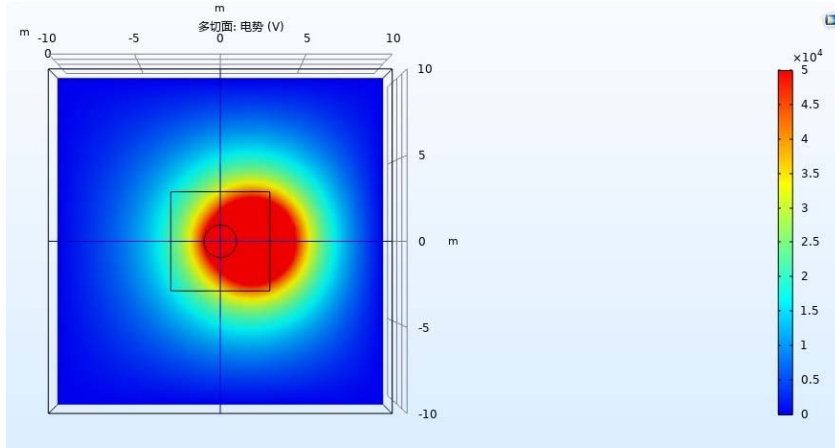
Case 1  $\epsilon_{r1}=10, \epsilon_{r2}=50$



COMSOL Multiphysics Analysis

University of Science and Technology of China

Case 2  $\epsilon_{r1}=10, \epsilon_{r2}=5$



COMSOL Multiphysics Analysis

University of Science and Technology of China

COMSOL采集的空间-电势函数值, 并且将其与MATLAB数值进行对比

$\epsilon_1=10$	$\epsilon_2=50$	X/m	Y/m	Z/m	电势/v
		7.11E-15	-3.0342	-0.07389	1927.4
		-5.33E-15	-1.9997	-0.07389	2668.7
		-5.33E-15	0.30328	-0.01232	9625.1
		1.78E-15	2.9942	-0.01847	16596.4
		1.78E-15	5.0016	-0.00616	4327.8

坐标/m	-3	-2	0.3	2	3	5
电势/V	2033.1	2753.5	9803	Inf	17406	4671.5

$\epsilon_1=10$	$\epsilon_2=5$	X/m	Y/m	Z/m	电势/v
		1.78E-15	-3.0043	-0.02684	21903
		1.78E-15	-2.0028	-0.02684	31810
		-1.07E-14	0.3019	-0.00475	86014
		1.78E-15	2.9969	-0.00475	1.62E+05
		1.78E-15	5.0071	-0.02684	42025

坐标/m	-3	-2	0.3	2	3	5
电势/V	23417.4	33675.2	86935	Inf	362877.4	46872.3

对比MATLAB数据与COMSOL给出的数据, 发现理论计算值均比模拟值偏高, 这绝非偶然误差. 下面对数据的差别及其原因进行进一步分析.

## 04

**计算值与模拟值的差异分析**

理论计算值与COMSOL给出的模拟值的差异分析

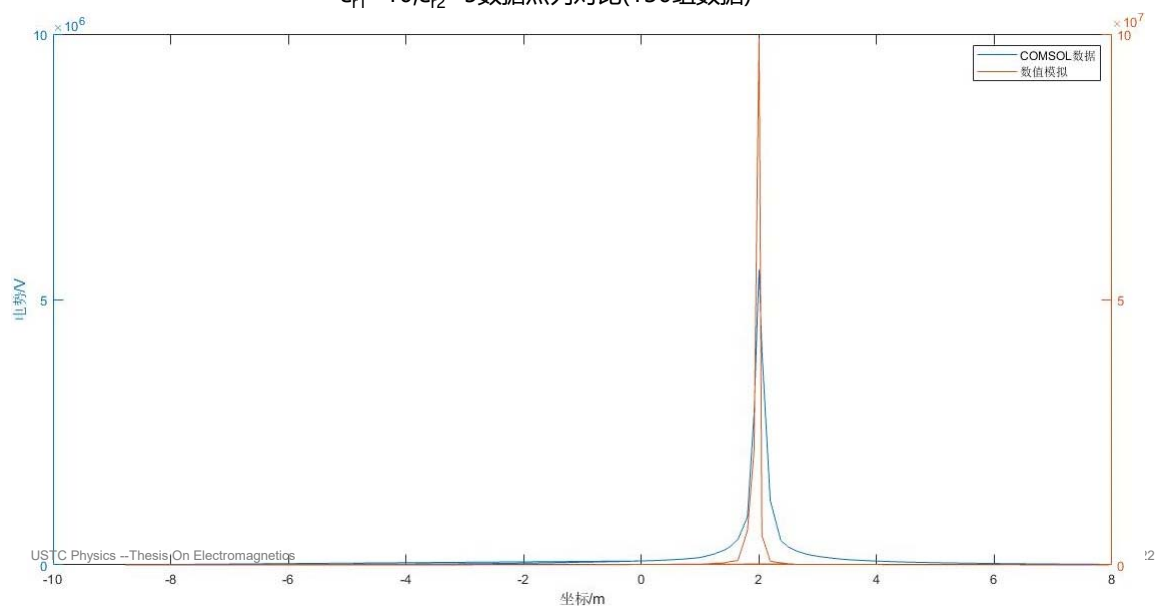
研究步骤:

- (1)在COMSOL中采集空间-电势的对应函数值;
- (2)将COMSOL中采集的坐标值代入解析解中计算数值模拟值;
- (3)将COMSOL采集值与数值模拟值作图并对比分析.

USTC Physics --Thesis On Electromagnetics

**Variation Analysis**

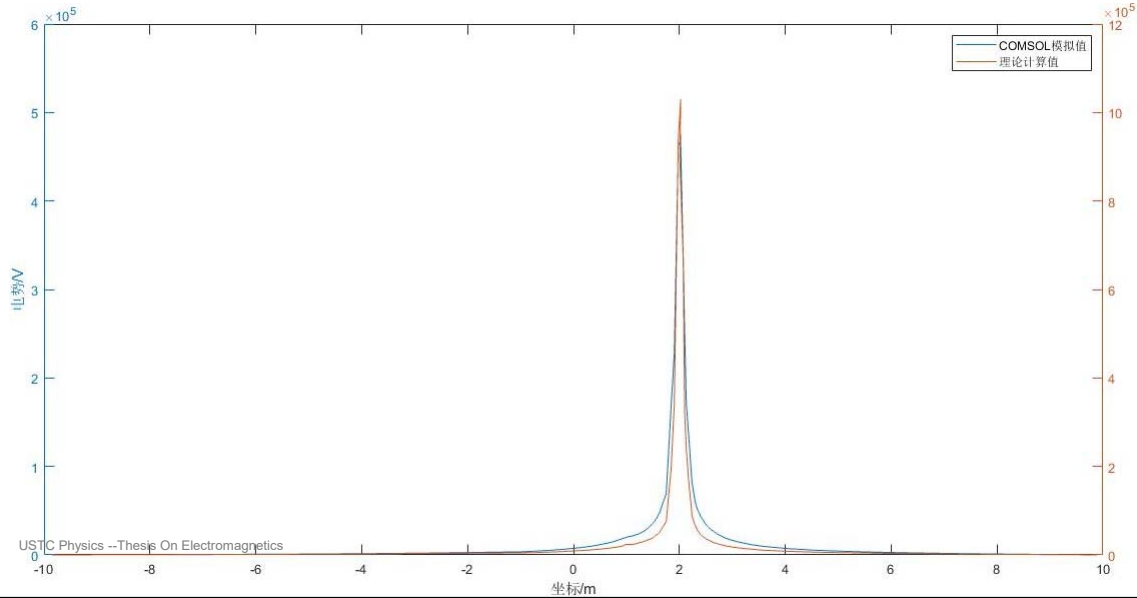
$\epsilon_{r1}=10, \epsilon_{r2}=5$ 数据点对比(130组数据)



USTC Physics --Thesis On Electromagnetics

## Variation Analysis

University of Science and Technology of China

 $\epsilon_{r1}=10, \epsilon_{r2}=50$ 数据点列对比(320组数据)

## Variation Analysis

University of Science and Technology of China

由以上两图可以发现,COMSOL给出的数据点列图与数值模拟的数据点列图形态大致相同,但是COMSOL数据均小于数值模拟的数据,且越靠近电势发散点(即源电荷处),差别越大.

## 原因的分析与一些猜测

在COMSOL求解静电场的过程中,由于计算能力的限制,必须先设定求解域.为了模拟真实情况,会设置求解域边界上的电势值为0以代替无穷远处的情况,故COMSOL的求解域可看作压缩的真实空间,对应的静电场基本方程也应等效压缩,求解的值也会因此比理论值偏小.

由此猜测,当COMSOL求解域不断增大时,COMSOL的数据点列曲线将会不断趋近于数值模拟值.

## 总结与反思

# 05

## Conclusion & Introspection

### 总结

(1)用Laplace方程结合边值关系与边界条件的解进行恒等变形,分析了介质球镜像电荷系统的分布,得出了介质球电像系统由源电荷,像点电荷与连续分布的线电荷组成的结论,并得到了电像法的解析解.经过极限情况下的分析,解析解的极限值与极限情况下的解完全吻合;

(2)用MATLAB数值模拟解与COMSOL物理场分析解进行对比,发现数据点列分布形态基本相同,但是数值模拟即理论解偏大.这是由于COMSOL的求解域有限导致的.

### 反思

(1)采集数据的类型不够丰富,仅仅采集了两组数据分析对比,应该采用更多的介电常数进行计算分析;

(2) COMSOL求解域不够大,应该逐步扩大求解域观察COMSOL数据点列图像是否逼近数值模拟的图像.

## 参考文献

- [1]郭硕鸿.电动力学(第三版)[M].北京.高等教育出版社.2008
- [2] John.D.Jackson.Classical Electrodynamics[M].Pearson.2010
- [3] David.J.Griffith.Introduction To Electrodynamics[M].Pearson.2003
- [4]胡友秋.等.电磁学与电动力学(上册)[M].北京.科学出版社.2014
- [5]林璇英.等.电动力学题解[M].北京.科学出版社.2017
- [6]汪映海.点电荷和介质球系统的镜像电荷分布[R].兰州.兰州大学物理系.2014
- [7]朗道(苏).连续媒质电动力学[M].北京.高等教育出版社.2014

## Thanks For Listening

彭牧原 PB18020730 物理学院  
USTC Physics --Thesis On Electromagnetics