中国科学技术大学
University of science and technology of China

两平行的同向载流线圈产生匀强磁场均匀性的探究

杨瀚文

摘要

定量计算了载流线圈产生磁场的磁感应强度，用MATLAB进行可视化模拟，将相同的方法推广到两平行的同向载流线圈产生磁场，发现线圈间能形成匀强磁场，进一步探究线圈的距离对磁场均匀性的影响。

关键词：毕奥-萨伐尔定律;MATLAB;载流圆线圈;匀强磁场

目录
CONTENTS

Part 1

引　言

物理思想

物理定理的数学表达式有时会有完全类似的形式.一旦碰到这种情况，往往可以用同一种方法处理性质不同的物理问题，在电磁学中，这种情况相当常见，比如我们将恒稳电流与静电场类比，磁像法与电像法类比，磁路与电路类比，静磁场的磁荷法与静电场的电荷类比，等等类比不仅是平凡的联系，而且暗含了电学与磁学是相统一的。

猜想

从以上类比出发，我们很容易由高斯定理得到两块平行放置的带电金属板之间可以形成匀强电场，将带电金属板类比于通电圆形线圈，那么两个平行放置的圆形线圈之间能否可以产生匀强磁场？如果能产生匀强磁场，那么在满足什么条件时可以使磁场更均匀？

Part 2

载流圆线圈产生磁场的空间分布

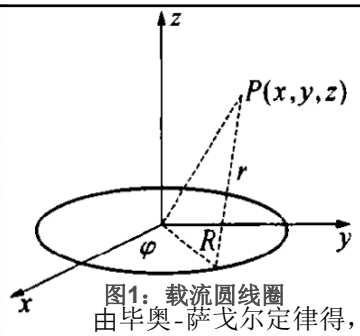


图1：载流圆线圈

如图所示，取直角坐标系（x，y，z），以线圈中心为坐标原点，Z轴与线圈平面垂直。由于线圈相对于Z轴对称，故只需要考虑yz平面的电场分布。

对于空间内某点P（0,y,z）,从线圈上某点到P的位移矢量为:

$$\boldsymbol{r} = -R\cos\varphi\,\boldsymbol{i} + (r_0\sin\theta - R\cos\varphi)\,\boldsymbol{j} + r_0\cos\theta\,\boldsymbol{k}$$

S点的电流元:

$$\mathrm{Id}\mathbf{l} = (-\mathrm{IR}\cos\varphi\boldsymbol{j} + IR\sin\varphi\boldsymbol{k})d\varphi$$

由毕奥-萨戈尔定律得，

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_\circ}{4\pi}\oint\frac{\mathrm{Id}\mathbf{l}\times\mathbf{r}}{r^3}$$

$$= \frac{\mu_\circ IR}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta\sin\varphi r_0\,\boldsymbol{j} + \cos\theta\cos\varphi r_0\,\boldsymbol{i} + (R - r_0\sin\theta\sin\varphi)\boldsymbol{k}}{(r_0^2+R^2-2Rr_0\sin\theta\sin\varphi)^{3/2}}d\varphi$$

$$= \frac{\mu_\circ IR}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta\sin\varphi r_0\,\boldsymbol{j} + (R - r_0\sin\theta\sin\varphi)\boldsymbol{k}}{(r_0^2+R^2-2Rr_0\sin\theta\sin\varphi)^{3/2}}d\varphi$$

其中，

$$B_x = \frac{\mu_0 IRr_0\cos\theta}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta\cos\varphi r_0}{(r_0^2+R^2-2Rr_0\sin\theta\sin\varphi)^{3/2}}\,d\varphi = 0$$

由$\cos\theta = \frac{z}{r_0}$, $\sin\theta = \frac{y}{r_0}$得，

$$B(y,z) = \frac{\mu_\circ IR}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\boldsymbol{z}\sin\varphi\,\boldsymbol{j} + (R - y\sin\varphi)\boldsymbol{k}}{(y^2+z^2+R^2-2R\sin\varphi y)^{3/2}}d\varphi$$

在MATLAB上将载流圆环的磁场磁感应线的空间分布进行可视化，得到以下两幅图：

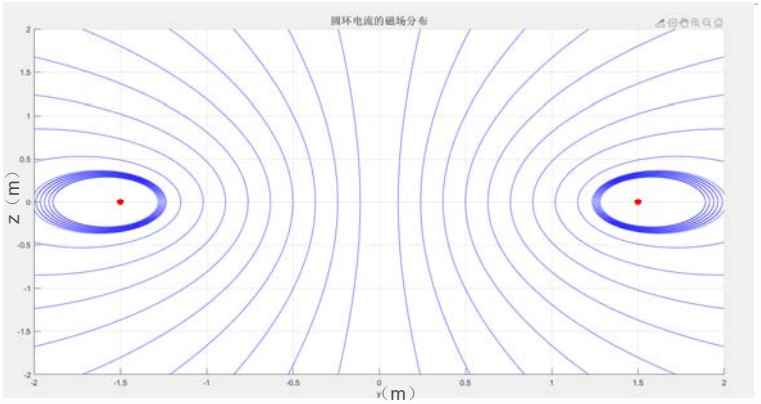


图2：载流圆环产生磁场的磁感应强度的二维分布 R=1.5m I=1A

9

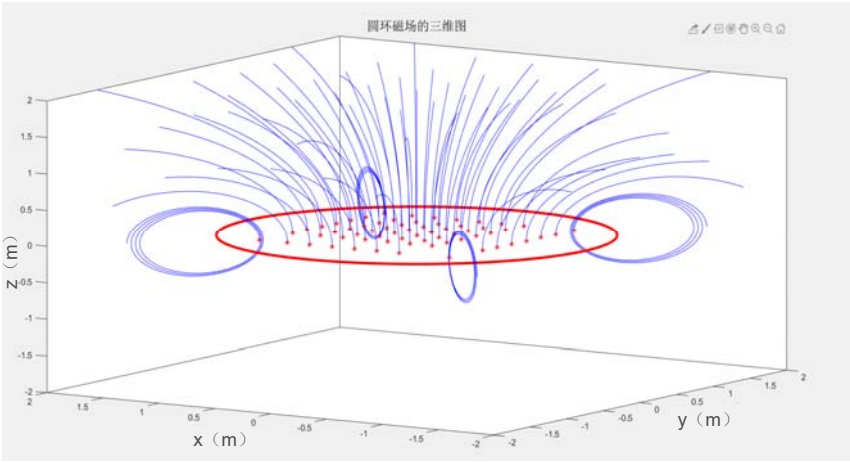


图3：载流圆环产生磁场的磁感应强度分布的三维图 R=1.5m I=1A

容易发现圆环电流磁场分布符合右手螺旋定则，越靠近线圈，磁感线越密集,则磁感应强度越大,而离线圈越远,磁感线越稀疏,磁感应强度越小

10

接着我们对磁场磁感应强度的大小以及y,z分量的大小进行可视化模拟

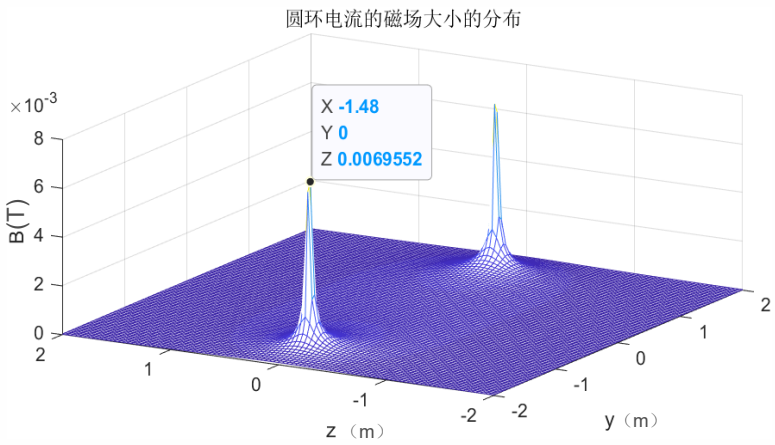


图4：载流圆环产生磁场的磁感应强度大小的分布R=1.5m I=1A

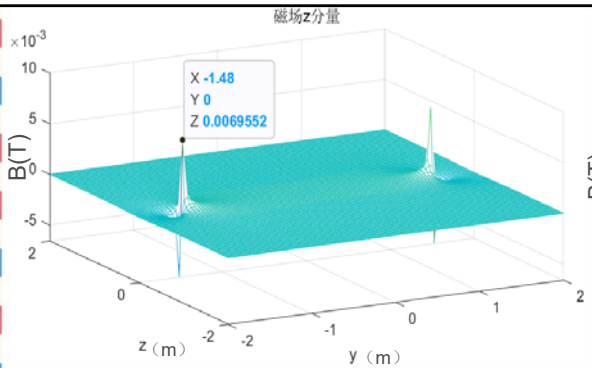


图5：载流圆环产生磁场的磁感应强度z分量的分布R=1.5m I=1A

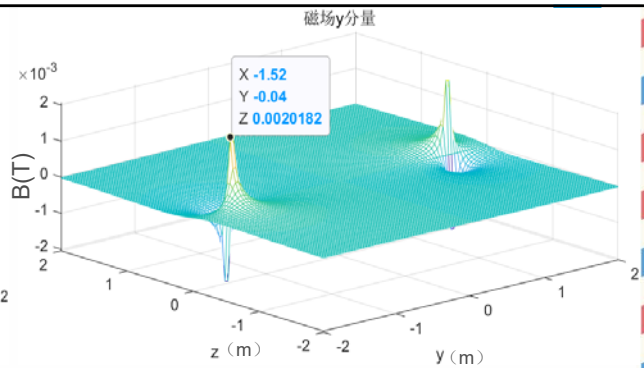


图6：载流圆环产生磁场的磁感应强度y分量的分布R=1.5m I=1A

$$B(y,z)=\frac{\mu_{\circ}IR}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\boldsymbol{z\sin\varphi\, j}+(R-y\sin\varphi)\boldsymbol{k}}{(y^2+z^2+R^2-2R\sin\varphi y)^{3/2}}d\varphi$$

由上图得到的载流圆线圈的内外边缘处磁场的磁感应强度收敛于某一值，但在不考虑直径的情况下由公式可以很明显看出磁感应强在内外边缘是发散的，这是因为MATLAB通过求曲线下有限的梯形面积来近似于曲线积分 而无法模拟出发散的情形。

12

我们进一步将上图靠近圆环中心位置进行放大：

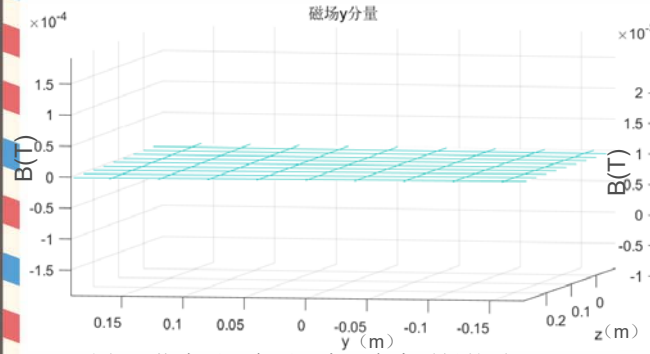


图7：载流圆环在圆环中心产生磁场的磁感应强度y分量R=1.5m I=1A

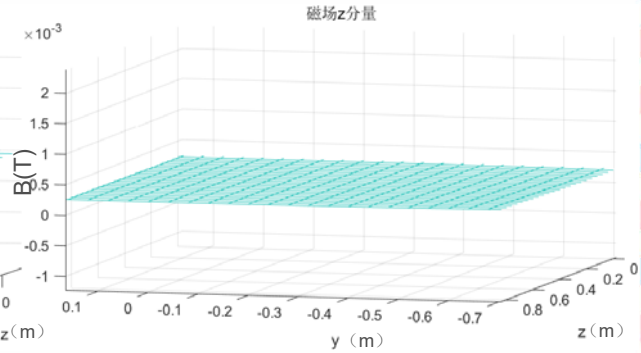


图8：载流圆环在圆环中心产生磁场的磁感应强度z分量R=1.5m I=1A

发现靠近圆环中心位置,磁感应强度By分量趋近于0,而Bz分量趋近于某一值

13

为了详细了解磁感应强度的空间分布，我们将上图原线圈中心附近的磁感应强度缩小一点得到以下三幅图：

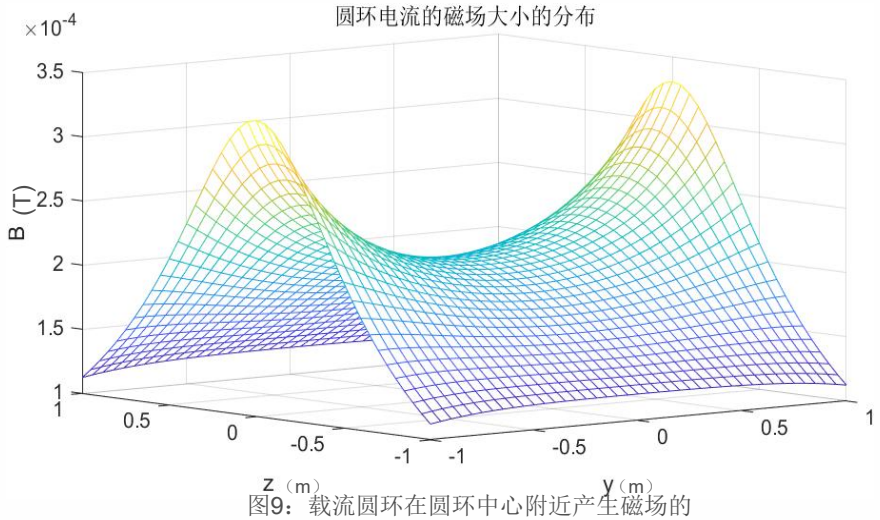


图9：载流圆环在圆环中心附近产生磁场的磁感应强度大小的空间分布R=1.5m I=1A

14

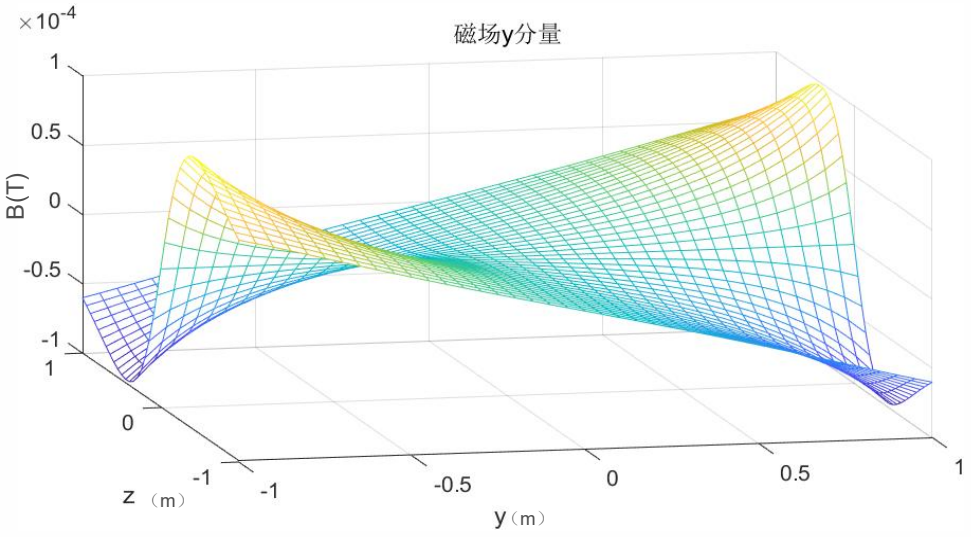


图10：载流圆环在圆环中心附近产生磁场的磁感应强度y分量的空间分布R=1.5m I=1A

15

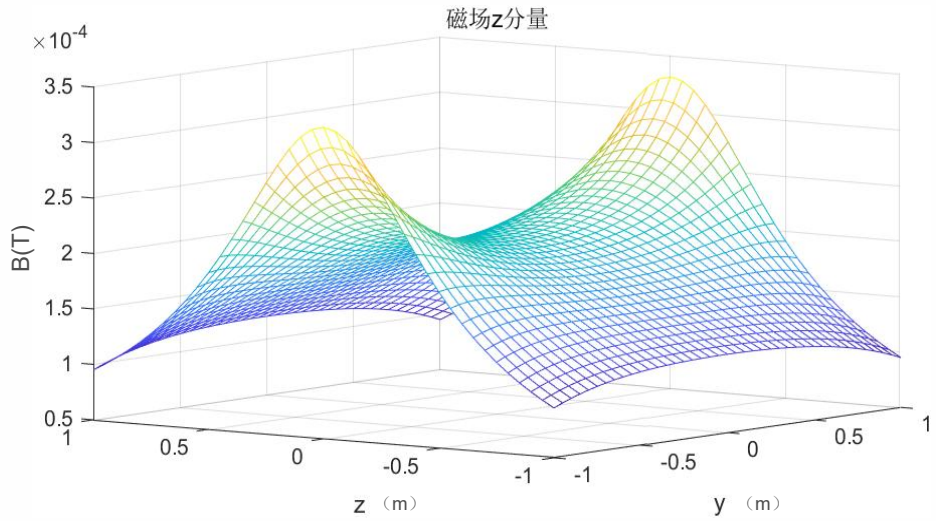


图11：载流圆环在圆环中心附近产生磁场的磁感应强度z分量的空间分布R=1.5m I=1A

16

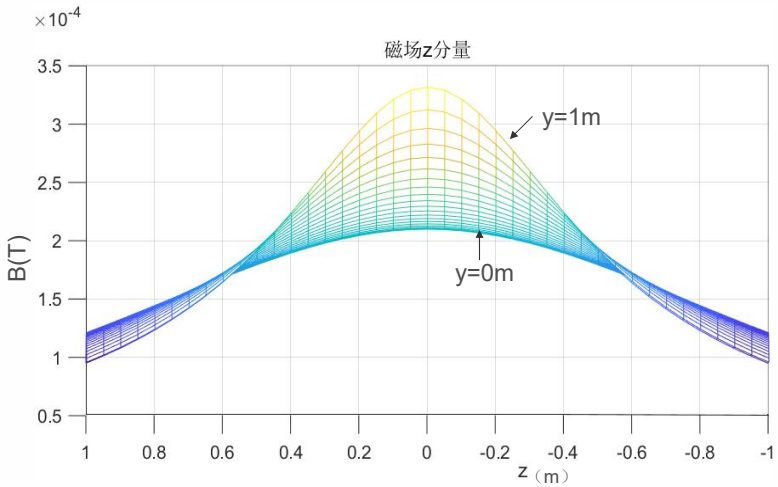


图12：载流圆环在圆环中心附近产生磁场的磁感应强度z分量在z轴上的分布 R=1.5m I=1A

- **圆环电流轴线上磁感应强度关于圆环所在平面对称,大小、方向均相同;而且在圆环的中心轴线上圆环中心处磁感应强度最强,随距离圆环中线越远,磁感应强度越弱**

17

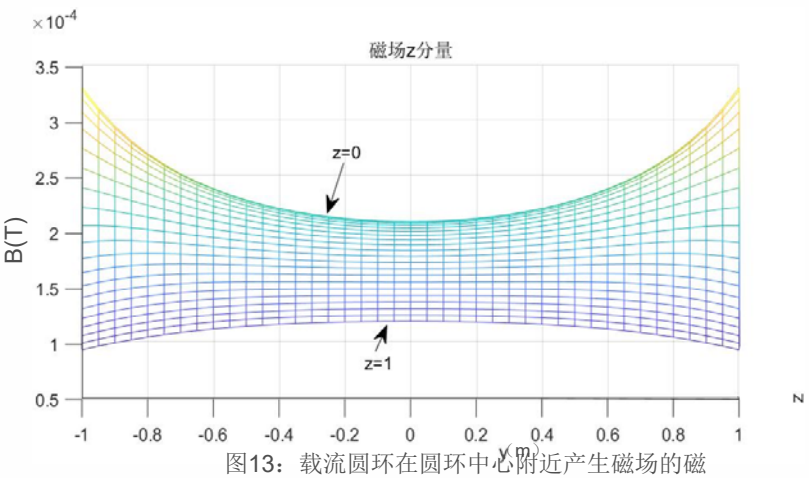


图13：载流圆环在圆环中心附近产生磁场的磁感应强度z分量在y轴上的分布 R=1.5m I=1A

- **与圆环面平行的面离圆环面距离较近时,圆环中心的磁感应强度小于圆环附近的磁感应强度;而当离圆环面距离稍远时,与圆环面平行的面上中心轴线上磁感应强度最大,大于该面上其他任意位置处的磁感应强度**

18

1. 有了对于单个载流线圈所产生磁场空间分布的详细认识，我们接下来就分析两平行圆线圈的磁场分布

2. 由上图可得在圆环环心附近的磁场强度比较均匀，提供了我们继续研究两个平行线圈能否产生均匀磁场提供了可能性。

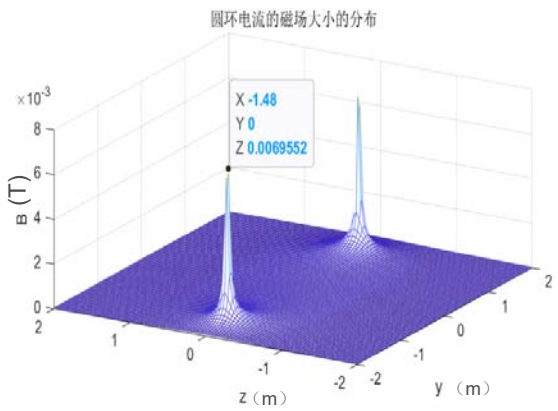


图14：载流圆环产生磁场的磁感应强度大小的分布R=1.5m I=1A

Part 3

两平行同向载流圆线圈间产生的磁场的磁场的磁感应强度的表达式

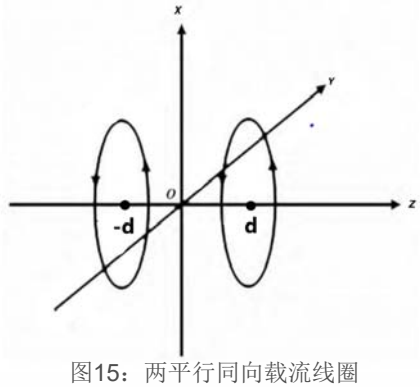


图15：两平行同向载流线圈

类比于单个圆线圈，将分别位于z=d和z=-d的两平行圆线圈产生的磁场合成得赫姆霍兹线圈产生磁场的磁感应强度。

$$B_z(y,z)=\frac{\mu_\circ IR}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(R-y\sin\varphi)d\varphi}{(y^2+(z+d)^2+R^2-2R\sin\varphi y)^{3/2}}+\frac{\mu_\circ IR}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(R-y\sin\varphi)d\varphi}{(y^2+(z-d)^2+R^2-2R\sin\varphi y)^{3/2}}$$

$$B_y(y,z)=\frac{\mu_\circ IR}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(z+d)\,\boldsymbol{\sin\varphi}}{(y^2+(z+d)^2+R^2-2R\sin\varphi y)^{3/2}}d\varphi+\frac{\mu_\circ IR}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(\boldsymbol{z-d})\sin\varphi}{(y^2+(z-d)^2+R^2-2R\sin\varphi y)^{3/2}}d\varphi$$

由上式原点（0,0,z）处的磁感应强度为

$$B=\frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2+(z+d)^2)^{3/2}}+\frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2+(z-d)^2)^{3/2}}$$

将上式对z一次求导，得

$$\frac{dB}{dZ}=-\frac{3\mu_0 IR^2}{2}\left[\frac{z+d}{(R^2+(z+d)^2)^{5/2}}+\frac{z-d}{(R^2+(z-d)^2)^{5/2}}\right]$$

当z=0时$\frac{dB}{dZ}=0$

将上式对z再求一次导，得

$$\frac{d^2B}{dz^2}=-\frac{3\mu_0 IR^2}{2}\left[\frac{R^2-4(z+d)^2}{(R^2+(z+d)^2)^{7/2}}+\frac{R^2-4(z-d)^2}{(R^2+(z-d)^2)^{7/2}}\right]$$

当z=0时

$$\frac{d^2B}{dz^2}=-3\mu_0 IR^2\frac{R^2-4d^2}{(R^2+d^2)^{7/2}}$$

当且仅当$R^2=4d^2$时$\frac{d^2B}{dz^2}=0$

故当圆线圈的半径等于两线圈的距离时线圈间形成的磁场最均匀

Part 4

两平行同向载流圆线圈间产生的磁场的磁场的可视化模拟

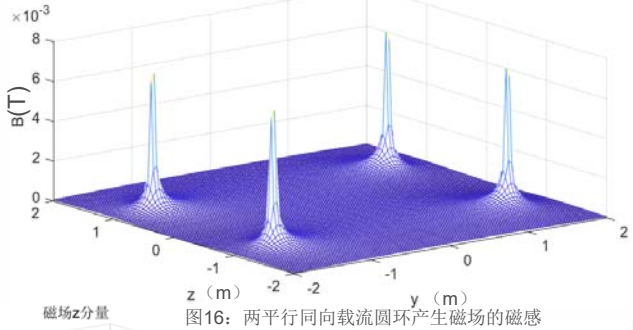


图16：两平行同向载流圆环产生磁场的磁感应强度大小的空间分布R=1.5m I=1A d=1.0m

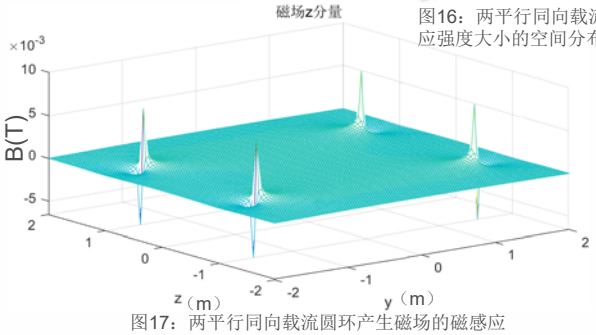


图17：两平行同向载流圆环产生磁场的磁感应强度z分量的空间分布R=1.5m I=1A d=1.0m

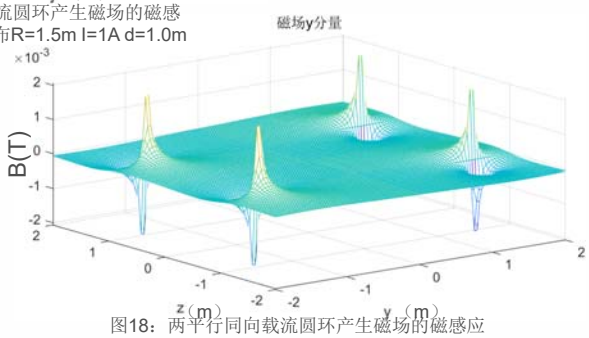
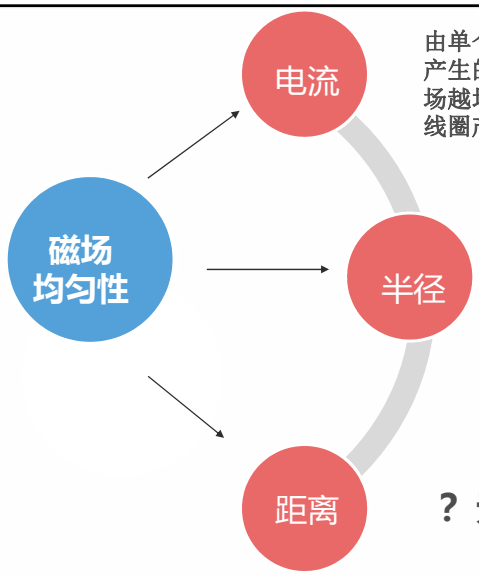


图18：两平行同向载流圆环产生磁场的磁感应强度y分量的空间分布R=1.5m I=1A d=1.0m

由上图可以直观验证我们的猜想：平行的两同向载流线圈能在中间产生匀强磁场

Part 5

影响两平行同向载流圆线圈间产生磁场均匀性的因素



由单个载流线圈的磁场分布可得，线圈的电流强度越小，产生的磁场在中心趋近于某值得变化越平稳，故产生的磁场越均匀，则可推断线圈的电流越小则平行的两同向载流线圈产生的磁场越均匀

由单个载流线圈的磁场分布可得，距离线圈越远，磁场在中心趋近于某值得变化越平稳，故产生的磁场越均匀，则可推断线圈的半径越大则平行的两同向载流线圈产生的磁场越均匀

？无法直接判断

取线圈半径为R=1m，分别取两线圈的距离为0.5，1.0，1.5，2.0，2.5，3.0m时由MARLAB绘制平行的两同向载流线圈产生匀强磁场的磁感应强度的空间分布，得到以下六幅图

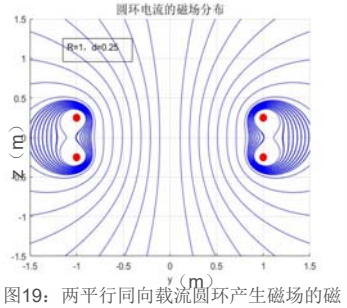


图19：两平行同向载流圆环产生磁场的磁感应强度的空间分布R=1m I=1A d=0.5m

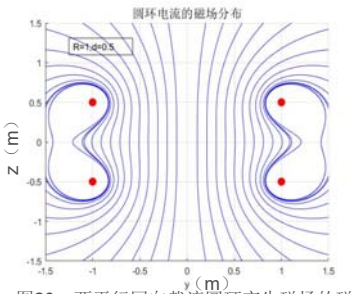


图20：两平行同向载流圆环产生磁场的磁感应强度的空间分布R=1m I=1A d=1.0m

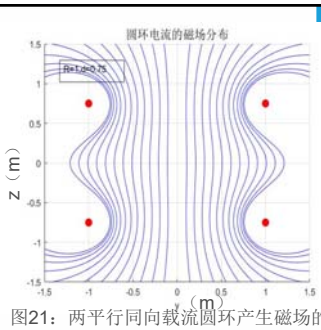


图21：两平行同向载流圆环产生磁场的磁感应强度的空间分布R=1m I=1A d=1.5m

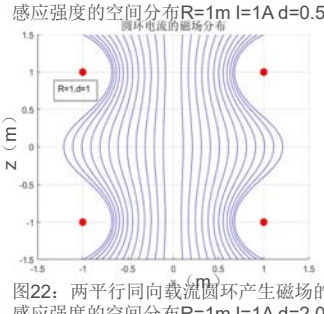


图22：两平行同向载流圆环产生磁场的磁感应强度的空间分布R=1m I=1A d=2.0m

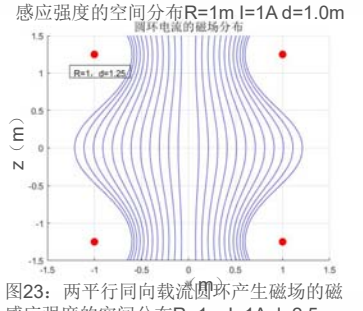


图23：两平行同向载流圆环产生磁场的磁感应强度的空间分布R=1m I=1A d=2.5m

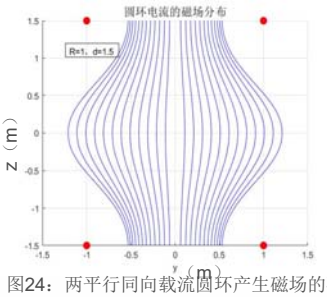


图24：两平行同向载流圆环产生磁场的磁感应强度的空间分布R=1m I=1A d=3.0m

由以上六幅图较直观地验证了刚才理论证明的当量圆线圈的距离为线圈的半径时形成的磁场较均匀

27

我们再作当线圈半径R=1m时，两线圈的距离分别为0.25、0.5、1.0、1.5、2.0、2.5m时线圈间磁场的均匀区域（$\frac{|B-B_0|}{B_0} < 0.001$, B_0为原点的磁感应强度）。

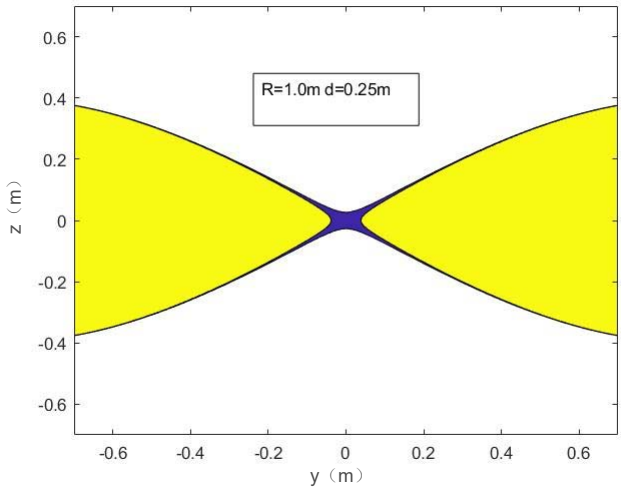


图25：两平行同向载流圆环产生匀强磁场空间分布R=1m I=1A d=0.25m

28

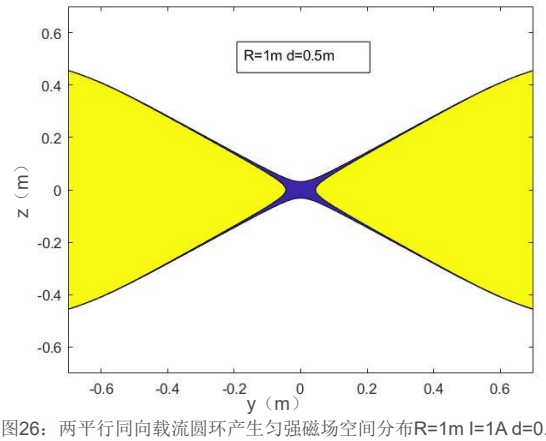


图26：两平行同向载流圆环产生匀强磁场空间分布R=1m I=1A d=0.5m

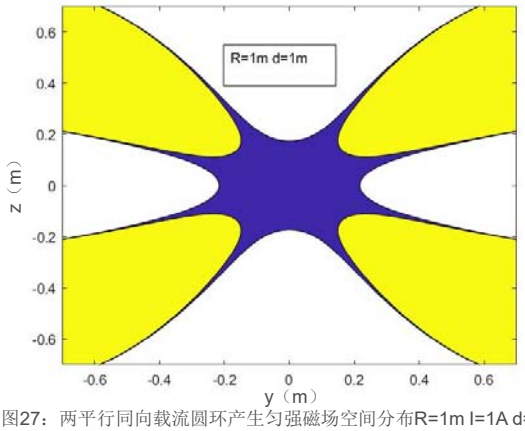


图27：两平行同向载流圆环产生匀强磁场空间分布R=1m I=1A d=1.0m

29

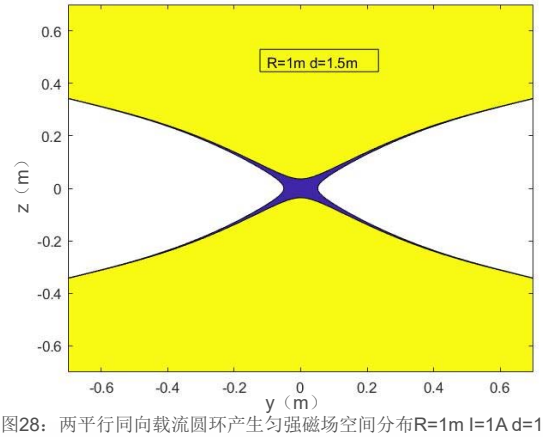


图28：两平行同向载流圆环产生匀强磁场空间分布R=1m I=1A d=1.5m

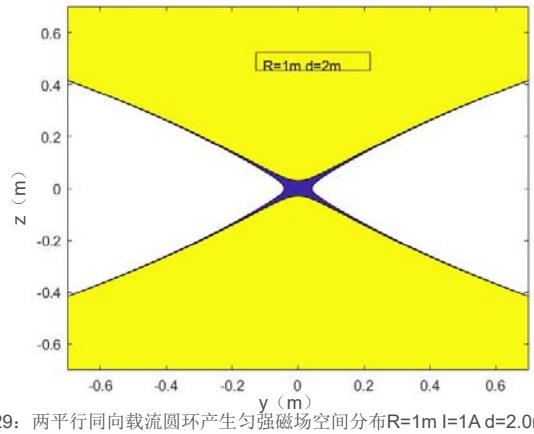
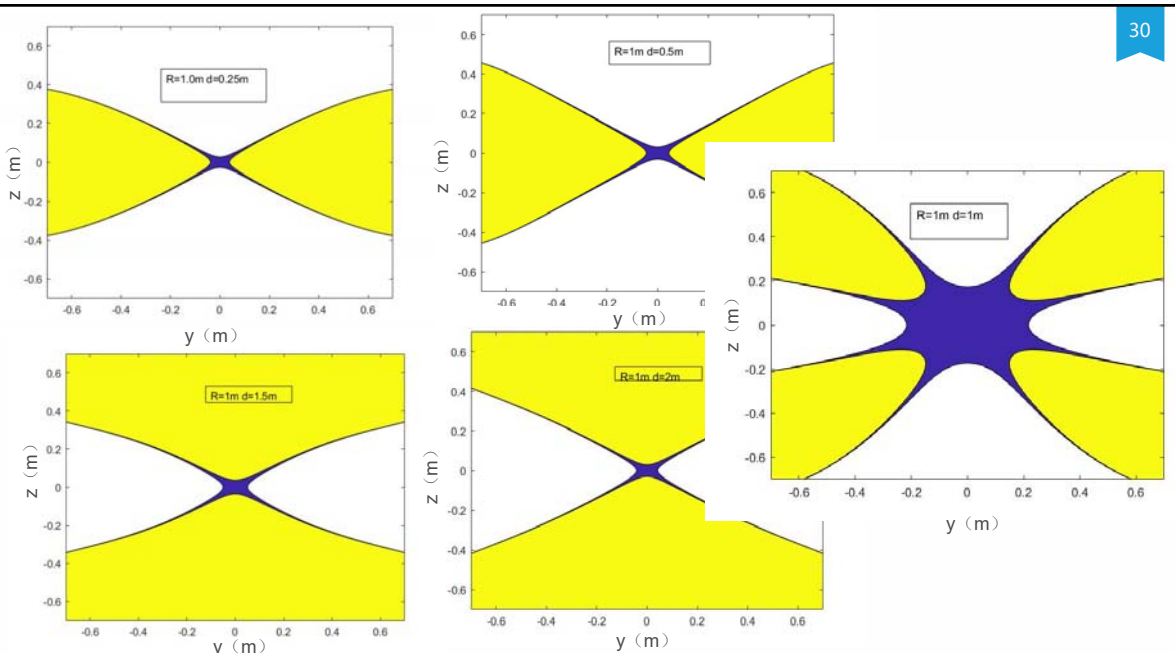


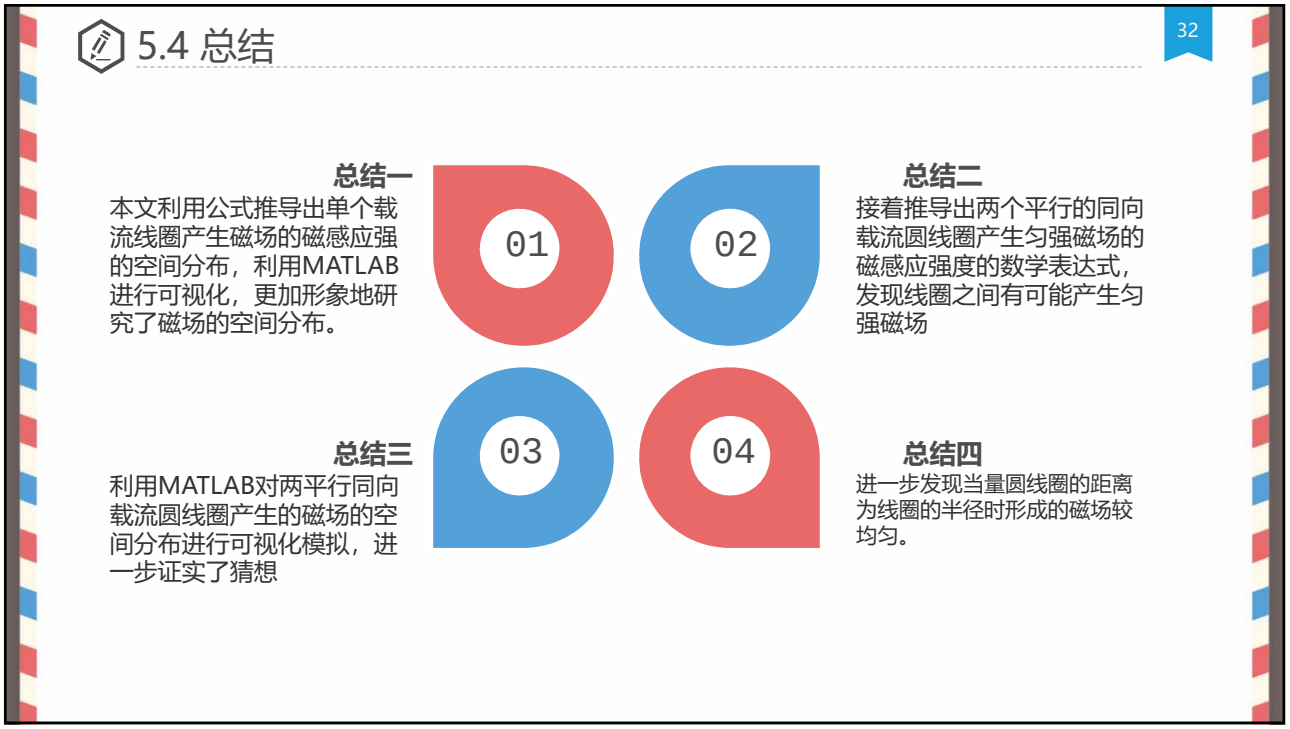
图29：两平行同向载流圆环产生匀强磁场空间分布R=1m I=1A d=2.0m

30



从以上五幅图中我们更加清楚地发现当圆线圈的距离等于线圈的半径时线圈间磁场均匀的区域更大


Part 6
总结


5.4 总结
32
总结一
本文利用公式推导出单个载流线圈产生磁场的磁感应强的空间分布，利用MATLAB进行可视化，更加形象地研究了磁场的空间分布。
01
02
总结二
接着推导出两个平行的同向载流圆线圈产生匀强磁场的磁感应强度的数学表达式，发现线圈之间有可能产生匀强磁场
总结三
利用MATLAB对两平行同向载流圆线圈产生的磁场的空间分布进行可视化模拟，进一步证实了猜想
03
04
总结四
进一步发现当量圆线圈的距离为线圈的半径时形成的磁场较均匀。

附：MATLAB代码

33

```
1. clear;
I0=1e2;  %电流强度
mu0=4*pi*1e-7;   %真空磁导率
c0=I0*mu0/(4*pi);    %归并系数
R=1.5;  %圆环半径
y=-2:0.04:2;
z=-2:0.04:2;
phi=0:pi/100:2*pi;
[Y,Z,PHI]=meshgrid(y,z,phi);
r=sqrt((R*cos(PHI)).^2+(Y-R*sin(PHI)).^2+Z.^2);
r3=r.^3;
dBy=c0*R*Z.*sin(PHI)./r3;
dBz=c0*R*(R-Y.*sin(PHI))./r3;
By=pi/20*trapz(dBy,3);
Bz=pi/20*trapz(dBz,3);
B=sqrt(By.^2+Bz.^2);
figure;
axis([-2,2,-2,2]);
line(R,0,'marker','.','markersize',30,'color','r');
line(-R,0,'marker','.','markersize',30,'color','r');
hold on
sz=0;
sy=[0.11:0.13:1.28];
[Sy,Sz]=meshgrid(sy,sz);
streamline(Y(:,:,1),Z(:,:,1),By,Bz,Sy,Sz);
streamline(-Y(:,:,1),Z(:,:,1),-By,Bz,-Sy,Sz);
streamline(-Y(:,:,1),-Z(:,:,1),-By,-Bz,-Sy,-Sz);
streamline(Y(:,:,1),-Z(:,:,1),By,-Bz,Sy,-Sz);
grid on
title('圆环电流的磁场分布','FontSize',14)
xlabel('y');
ylabei('z');
figure
subplot(2,2,1)
mesh(Y(:,:,1),Z(:,:,1),By)
title('磁场y分量')
xlabel('y');
ylabel('z');
subplot(2,2,2)
mesh(Y(:,:,1),Z(:,:,1),Bz)
title('磁场z分量')
xlabel('y')
ylabel('z')
subplot(2,2,3)
mesh(Y(:,:,1),Z(:,:,1),B);
title('圆环电流的磁场大小的分布')
xlabel('y');
ylabel('z');
zlabel('B');
```

附：MATLAB代码

34

```
2. clear;
I0=1e2;  %电流强度
mu0=4*pi*1e-7;   %真空磁导率
c0=I0*mu0/(4*pi);    %归并系数
R=1.5;  %圆环半径
y=-1.0:0.05:1.0;
z=-1.0:0.05:1.0;
phi=0:pi/100:2*pi;
[Y,Z,PHI]=meshgrid(y,z,phi);
r=sqrt((R*cos(PHI)).^2+(Y-R*sin(PHI)).^2+Z.^2);
r3=r.^3;
dBy=c0*R*Z.*sin(PHI)./r3;
dBz=c0*R*(R-Y.*sin(PHI))./r3;
By=pi/20*trapz(dBy,3);
Bz=pi/20*trapz(dBz,3);
B=sqrt(By.^2+Bz.^2);
figure
subplot(2,2,1)
mesh(Y(:,:,1),Z(:,:,1),By)
view(-20,20)
title('磁场y分量')
xlabel('y');
ylabel('z');
subplot(2,2,2)
mesh(Y(:,:,1),Z(:,:,1),Bz)
title('磁场z分量')
xlabel('y')
ylabel('z')
subplot(2,2,3)
mesh(Y(:,:,1),Z(:,:,1),B);
title('圆环电流的磁场大小的分布')
xlabel('y');
ylabel('z');
zlabel('B');
```

附：MATLAB代码

35

3.
```
clear;
figure;
R=1.5;  %半径
[X,Y,Z]=meshgrid(-2:0.04:2);
r2=X.^2+Y.^2+Z.^2;
for k=1:101
    phi=pi/50*(k-1);   costh=cos(phi);sinth=sin(phi);
    r3=(r2+R^2-2*R*(X*costh+Y*sinth)).^(3/2);
    Bx0(:,:,:,k)=R*Z*costh./r3;
    By0(:,:,:,k)=R*Z*sinth./r3;
    Bz0(:,:,:,k)=R*(R-X*costh-Y*sinth)./r3;
end
Bx=pi/40*trapz(Bx0,4);
By=pi/40*trapz(By0,4);
Bz=pi/40*trapz(Bz0,4);
v=[-0.85,-0.4,-0.2,0,0.2,0.4,0.6,0.85];
[Vx,Vy,Vz]=meshgrid(v,v,0);
plot3(Vx(:),Vy(:),Vz(:),'r*')
streamline(X,Y,Z,Bx,By,Bz,Vx,Vy,Vz,[0.1,2000]);
hold on;
axis([-2,2,-2,2,-2,2]);
view(3)
box on;
title('圆环磁场的三维图','fontsize',15);
t=0:pi/100:2*pi;
plot(R*exp(i*t),'r-','LineWidth',3);
hold off;
```

附：MATLAB代码

36

4.
```
d=0.25;  %圆环的坐标
y=-1.5:0.04:1.5;
z=-1.5:0.04:1.5;
phi=0:pi/100:2*pi;
[Y,Z,PHI]=meshgrid(y,z,phi);
r1=sqrt((R*cos(PHI)).^2+(Y-R*sin(PHI)).^2+(Z+d).^2);
r2=sqrt((R*cos(PHI)).^2+(Y-R*sin(PHI)).^2+(Z-d).^2);
r31=r1.^3;
r32=r2.^3;
dBy1=c0*R*(Z+d).*sin(PHI)./r31;
dBy2=c0*R*(Z-d).*sin(PHI)./r32;
dBz1=c0*R*(R-Y.*sin(PHI))./r31;
dBz2=c0*R*(R-Y.*sin(PHI))./r32;
By=pi/20*trapz(dBy1,3)+pi/20*trapz(dBy2,3);
Bz=pi/20*trapz(dBz1,3)+pi/20*trapz(dBz2,3);
B=sqrt(By.^2+Bz.^2);
figure;
axis([-1.5,1.5,-1.5,1.5]);
line(R,d,'marker','.','markersize',30,'color','r');
line(-R,d,'marker','.','markersize',30,'color','r');
line(R,-d,'marker','.','markersize',30,'color','r');
line(-R,-
d,'marker','.','markersize',30,'color','r');
hold on
sz=0;
sy=[0.11:0.1:1.28];
[Sy,Sz]=meshgrid(sy,sz);
streamline(Y(:,:,1),Z(:,:,1),By,Bz,Sy,Sz);
streamline(-Y(:,:,1),Z(:,:,1),-By,Bz,-Sy,Sz);
streamline(-Y(:,:,1),-Z(:,:,1),-By,-Bz,-Sy,-Sz);
streamline(Y(:,:,1),-Z(:,:,1),By,-Bz,Sy,-Sz);
grid on
title('圆环电流的磁场分布','FontSize',14)
xlabel('y');
ylabei('z');
```

附：MATLAB代码

37

```
5. clear;
I0=1e2;                          %电流强度
mu0=4*pi*1e-7;                   %真空磁导率
c0=I0*mu0/(4*pi);                %归并系数
R=1.5;                           %圆环半径
d=1;                             %圆环的坐标
y=-1:0.04:1;
z=-1:0.04:1;
phi=0:pi/100:2*pi;
[Y,Z,PHI]=meshgrid(y,z,phi);
r1=sqrt((R*cos(PHI)).^2+(Y-R*sin(PHI)).^2+(Z+d).^2);
r2=sqrt((R*cos(PHI)).^2+(Y-R*sin(PHI)).^2+(Z-d).^2);
r31=r1.^3;
r32=r2.^3;
dBy1=c0*R*(Z+d).*sin(PHI)./r31;
dBy2=c0*R*(Z-d).*sin(PHI)./r32;
dBz1=c0*R*(R-Y.*sin(PHI))./r31;
dBz2=c0*R*(R-Y.*sin(PHI))./r32;
By=pi/20*trapz(dBy1,3)+pi/20*trapz(dBy2,3);
Bz=pi/20*trapz(dBz1,3)+pi/20*trapz(dBz2,3);
B=sqrt(By.^2+Bz.^2);
figure
subplot(2,2,1)
mesh(Y(:,:,1),Z(:,:,1),By)
title('磁场y分量')
xlabel('y');
ylabel('z');
subplot(2,2,2)
mesh(Y(:,:,1),Z(:,:,1),Bz)
title('磁场z分量')
xlabel('y')
ylabel('z')
subplot(2,2,3)
mesh(Y(:,:,1),Z(:,:,1),B);
title('圆环电流的磁场大小的分布')
xlabel('y');
ylabel('z');
zlabel('B');
```

参考文献

38

1. 胡秋友，程福臻，叶邦角.电磁学与电动力学(上册)[M] .北京:科学出版社, 2007:120-126.
2. 马涛.MATLAB教程[M].杭州：浙江工商大学出版社，2011：157-160

Thanks!