



中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

土星光环雨模型

——带电粒子在磁偶极子场与引力场共同作用下的运动

PB18000071 李易

目录



中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

- 综述
 - 研究背景
 - 磁层粒子动力学
 - 土星主磁场模型
- 带电粒子在磁偶极子场与引力场下的运动
 - 磁偏角为0
 - 磁偏角为 χ
- 结论与讨论
- 研究展望
- 致谢
- 参考文献

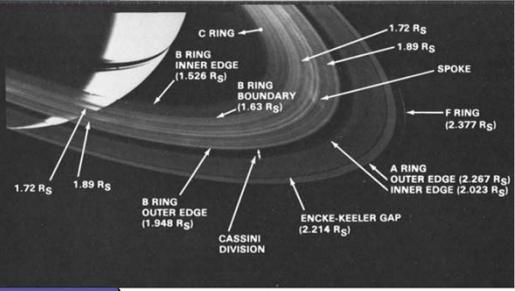

中国科学技术大学
 University of Science and Technology of China

- 综述
- 带电粒子的运动
- 结论与讨论
- 研究展望
- 致谢
- 参考文献


中国科学技术大学
 University of Science and Technology of China

研究背景

土星的基本参数	
质量 (kg)	5.6846×10^{26}
半径 (km)	60270
磁偶极矩 (T·m ³)	4.3×10^{25}
磁偏角	0.037
土星光环的基本参数	
尺寸 (m)	$10^4 \sim 10$
分布范围 (km)	74500~136780



光化作用
辐射带的等离子体云的碰撞

↓

带电

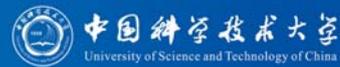
研究背景



光环稳定性？

- 理论 Northrop 旋转磁场中的绝热运动 得出了光研究裂缝的位阻参数动力学的基本研究方法，从理论与数值模拟的角度对单个粒子在磁偶极子场与引力场的作用下的运动轨迹
- 观测 James O'Donoghue 星的密度分布估算光环下落的流量约为 $432 \sim 2870 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2}$ 在均匀下落的前提下光环的年龄约为 292_{-124}^{+18} 百万年【2】

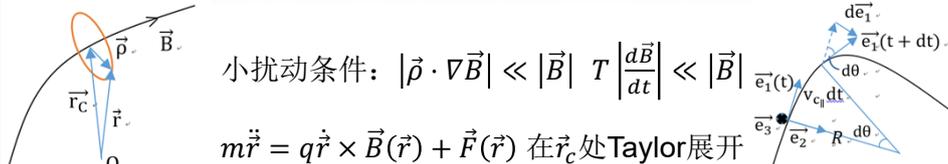
磁层粒子动力学



带电粒子的运动规律

- 运动区
- 引导中心的漂移运动
- 绝热不变量
- 非线性特征

引导中心的漂移运动

小扰动条件: $|\dot{\rho} \cdot \nabla \vec{B}| \ll |\vec{B}|$ $T \left| \frac{d\vec{B}}{dt} \right| \ll |\vec{B}|$

$m\ddot{\vec{r}} = q\dot{\vec{r}} \times \vec{B}(\vec{r}) + \vec{F}(\vec{r})$ 在 \vec{r}_c 处 Taylor 展开

$$m(\ddot{\vec{r}}_c + \ddot{\rho}) = q(\dot{\vec{r}}_c + \dot{\rho}) \times [\vec{B}(\vec{r}_c) + (\dot{\rho} \cdot \nabla) \vec{B}(\vec{r}_c)] + \vec{F}(\vec{r}_c) + (\dot{\rho} \cdot \nabla) \vec{F}(\vec{r}_c)$$

引入磁力线坐标系 $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ 考虑一个周期内的平均值

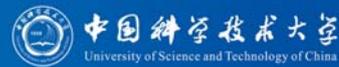
$$\langle \dot{\rho} \rangle = 0, \quad \left\langle \frac{d\dot{\rho}}{dt} \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \omega \rho (\cos \theta \vec{e}_2 - \sin \theta \vec{e}_3) d\theta = 0, \quad \left\langle \frac{d^2 \dot{\rho}}{dt^2} \right\rangle = 0$$

$$m\ddot{\vec{r}}_c = q\dot{\vec{r}}_c \times \vec{B}(\vec{r}_c) + \vec{F}(\vec{r}_c) + q\langle \dot{\rho} \times (\dot{\rho} \cdot \nabla) \vec{B}(\vec{r}_c) \rangle$$

令 $\mu = \frac{1}{2} q \omega \rho^2$, 由矢量分析得 $q\langle \dot{\rho} \times (\dot{\rho} \cdot \nabla) \vec{B}(\vec{r}_c) \rangle = -\mu \nabla B(\vec{r}_c)$

$$m\ddot{\vec{r}}_c = q\dot{\vec{r}}_c \times \vec{B}(\vec{r}_c) + \vec{F}(\vec{r}_c) - \mu \nabla B(\vec{r}_c)$$

引导中心的漂移运动



$$m\ddot{\vec{r}}_c = q\dot{\vec{r}}_c \times \vec{B}(\vec{r}_c) + \vec{F}(\vec{r}_c) - \mu \nabla B(\vec{r}_c)$$

两边叉乘 \vec{e}_1

$$\vec{v}_{c\perp} = \frac{\overrightarrow{F_{total} \times \vec{B}}}{qB^2}, \quad \text{其中 } \overrightarrow{F_{total}} = \vec{F} + m \frac{v_{c\parallel}^2}{R} \vec{e}_2 - \mu \nabla B$$

两边点乘 \vec{e}_1

$$m \frac{dv_{c\parallel}}{dt} = F_{\parallel} - \mu \frac{\partial B}{\partial e_1} - m \frac{v_{c\parallel} v_{c\perp}}{R}$$

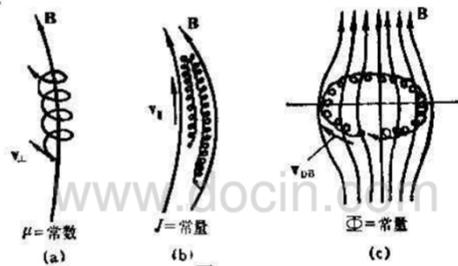
粒子的绝热不变量



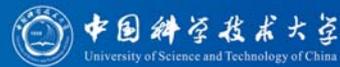
磁矩不变量 $\mu = \frac{1}{2} q \omega \rho^2 = \frac{W_{\perp}}{B}$

纵向不变量 $J = \int_{s_1}^{s_2} m v_{\parallel} ds$

磁通不变量 引导中心横切磁力线漂移运动所围成的曲面

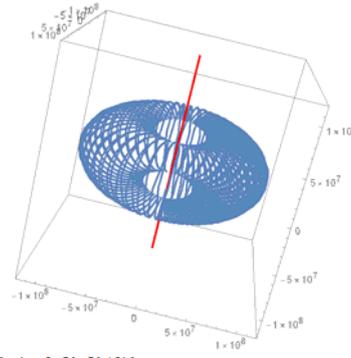


土星的主磁场模型



地心共轴 $\vec{B} = \frac{\mu_0 m_e}{4\pi r^3} (2\cos\theta \hat{r} + \sin\theta \hat{\theta})$

地心倾斜
 设北磁极在地理坐标系为 $(\pi/2 - \chi, 0)$



```

In[11]:= Clear[x, r, B];
          Rotate = RotationTransform[x, {{1, 0, 0}, {0, 0, 1}}];
          B1 = rotate[{{
                    3xz / ((x^2 + y^2 + z^2)^(5/2)),
                    3yz / ((x^2 + y^2 + z^2)^(5/2)),
                    -(x^2 + y^2 - 2z^2) / ((x^2 + y^2 + z^2)^(5/2))
                    }}];
          TransformedField["Cartesian" -> "Spherical", B1, {x, y, z} -> {r, theta, phi}] // Simplify;
          Do[Print[StreamPlot[Rest[B1 /. {x -> theta}], // Evaluate, {y, -10, 10}, {z, -10, 10}], {x, theta, Pi, Pi / 2}];
          Out[14]= {
                    2 Cos[theta]^3 Cos[x] - Cos[theta] Sin[theta]^2 (2 Cos[phi]^2 Cos[x] - (-3 - Cos[x]) Sin[phi]^2) - Cos[theta]^2 Cos[phi] Sin[theta] Sin[x] + Cos[phi] Sin[theta]^3 Sin[x],
                    Cos[x] Sin[theta]^3 + Cos[theta]^2 Sin[theta] ((-2 + 3 Cos[phi]^2) Cos[x] + 3 Sin[phi]^2) - 2 Cos[theta]^3 Cos[phi] Sin[x] - 2 Cos[theta] Cos[phi] Sin[theta]^2 Sin[x],
                    Sin[phi] (6 Cos[phi] Sin[2 theta] Sin[x/2]^2 + Sin[x] + 3 Cos[2 theta] Sin[x])
                    } / (2 (r^2)^(3/2))
    
```

- 综述
- 带电粒子的运动
- 结论与讨论
- 研究展望
- 致谢
- 参考文献

模型

由于我们所讨论的背景限于行星的光环，故可抽象为如下模型：

在中心有一质量为 M ，磁偶极矩为 m_e 天体，半径为 R ，有一粒子初始时刻绕着天体在赤道平面上作匀速圆周运动，轨道半径为 r_0 ，质量为 m ，在某一时刻突然带上 q 的电荷，考察粒子之后的运动情况。由于天体的半径很大，粒子在坠入天体前所在区域的磁场可视为理想磁偶极子产生的磁场。

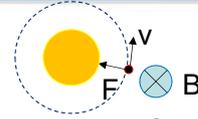
- 忽略相对论效应
- 不考虑粒子间的相互作用
- 理想磁偶极子

WOLFRAM
MATHEMATICA 11

版本: 11.3.0.0



磁偏角为 0°



在赤道平面运动

$$\text{极坐标系下 } \frac{q}{m} v_r B_\theta = \frac{1}{r} \frac{d^2(r^2 \dot{\varphi})}{dt^2} \quad -\frac{GM}{r^2} - \frac{q}{m} v_\varphi B_\theta = \ddot{r} - r \dot{\varphi}^2$$

设 $\frac{q}{m} = \gamma$ 对粒子所受洛伦兹力与万有引力的数量级作估算。

$$\frac{F_l}{F_g} = \frac{\gamma v B r^2}{GM} \sim 10^{-2} \gamma$$

- $\gamma \ll 1$ 引力主导 部分地忽略磁场
- $1 < \gamma < 10^3$ 磁场影响不可忽略、不满足小扰动条件 数值计算
- $\gamma > 10^3$ 满足小扰动条件 引导中心

磁偏角为 0° ($\gamma \ll 1$)



假设一个周期内角动量守恒 $L = m v_\varphi r = \text{const} = m \sqrt{\frac{GM}{r_0}} r_0$

$$\text{带入 } \vec{B} = \frac{\mu_0 m_e}{4\pi r^3} \hat{\theta}, \text{ 得 } -\frac{GM}{r^2} - \gamma \sqrt{\frac{GM}{r_0}} r_0 \cdot \frac{\mu_0 m_e}{4\pi r^4} = \ddot{r} - r \dot{\varphi}^2$$

由于 $\gamma \ll 1$ 可近似认为 $r \approx r_0$

$$\text{把第二项改写为 } r^{-2}, \text{ 得 } -\frac{GM}{r^2} - \gamma \sqrt{\frac{GM}{r_0}} r_0 \cdot \frac{\mu_0 m_e}{4\pi r_0^2 r^2} = \ddot{r} - r \dot{\varphi}^2,$$

$$\text{记 } M^* = (1 + \gamma \sqrt{\frac{1}{GM r_0}} r_0 \cdot \frac{\mu_0 m_e}{4\pi r_0^2}) M,$$

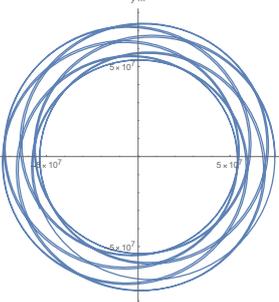
$$\text{于是 } \frac{F}{m} = -\frac{GM^*}{r^2}, \text{ 粒子运动的半长轴为 } a = \frac{M^* r_0}{2M^* - M}$$

磁偏角为 0° $(1 < \gamma < 10^3)$ 中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

$$T_l = \frac{2\pi}{\gamma B} \sim \frac{10^5}{\gamma} T_g \sim 10^4$$

两者数量级相近的 回旋运动与椭圆运动相叠加的拍运动
 过渡阶段，兼有两者的部分特征。

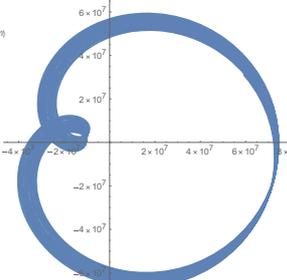
赤道处沿赤道平面的中等核质比粒子运动轨道示意图 $\gamma = 3$



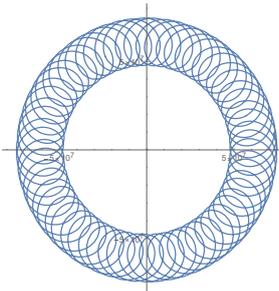
$\gamma = 3$

$\gamma = 7$

赤道处沿赤道平面的中等核质比粒子运动轨道示意图 $\gamma = 7$



赤道处沿赤道平面的中等核质比粒子运动轨道示意图 $\gamma = 100$



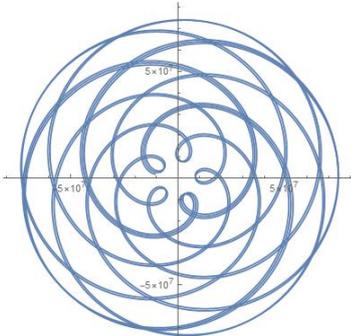
$\gamma = 100$

磁偏角为 0° $(1 < \gamma < 10^3)$ 中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

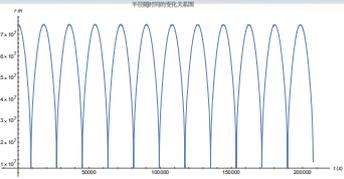
周期性

接近球心时会出现一个拐点
 从而并不会落入球心，而与此同时，
 径向与切向速度发生了一个突变

赤道处沿赤道平面的中等核质比粒子运动轨道示意图 $\gamma = 5$

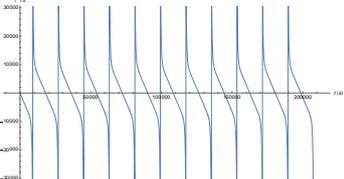


半径随时间的变化示意图



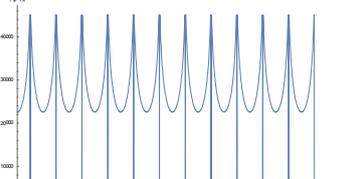
半径

径向速度随时间的变化示意图



径向速度

切向速度随时间的变化示意图



切向速度

磁偏角为0° ($\gamma > 10^3$)



中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

满足小扰动条件
利用引导中心

$$\vec{v}_{C\perp} = \frac{\vec{F}_{total} \times \vec{B}}{qB^2}$$

其中 $\vec{F}_{total} = \vec{F} - \mu \nabla B$

$$= -\frac{GM}{R^2} \hat{r} + \mu \frac{3\mu_0 m_e}{4\pi r^4} \hat{r}$$

故 $\vec{v}_{C\perp} = \frac{-\frac{GM}{R^2} + \mu \frac{3\mu_0 m_e}{4\pi r^4}}{qB} \hat{\phi}$

$$= \frac{-\frac{GM}{R^2} + \frac{3v^2}{2r}}{\gamma B} \hat{\phi}$$

(-----粒子运动的引导中心与粒子的关系-----)

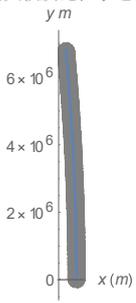
$w = (-b/r\theta^2 + 3b/(2r\theta^2)) / (a/r\theta^2)$;

$p = \sqrt{b/r\theta} / (a/r\theta^2)$;

$g = \text{ParametricPlot}[\{(r\theta - p) \text{Cos}[w t], (r\theta - p) \text{Sin}[w t], \{t, \theta, 1\theta + tm\}];$

Show[f, g]

赤道处沿赤道平面的大核质比粒子运动轨道示意图 $\gamma = 10^4$



由于当 γ 较大时计算量较大且粒子环绕天体一周的时间也较长，故系统运行时间较长，在此仅给出一小段轨迹上的运动

验证绝热不变量



中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

纵向不变量 平凡
磁通不变量 由引导中心的轨迹易得
磁矩不变量 数值计算

周期变化，一个周期内的平均值随时间单调递减，部分动能转化为了引力势能

但由于引力在一个周期内的影响非常小，所以可近似认为在一个周期内粒子的磁矩保持不变 (<0.5%)

(-----验证磁矩不变量-----)

$\mu[t_] := (r'[t]^2 + r[t]^2 \phi'[t]^2) / (m_e \cdot 10^{-7} / r[t]^3);$

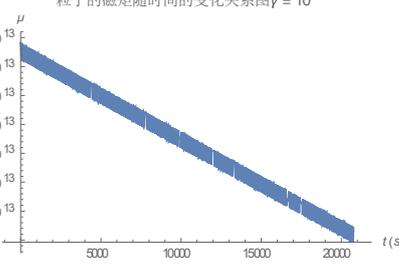
$\text{ParametricPlot}[\{t, \mu[t]\}, \{t, \theta, tm\}, \text{ImageSize} \rightarrow \{360, 215\}, \text{AspectRatio} \rightarrow \text{Full},$

$\text{AxesLabel} \rightarrow \{\text{RowBox}[\{\text{RowBox}[\{t\}], \text{RowBox}[\{t, \theta, tm\}]\}], \text{HoldForm}[\mu]\}, \text{PlotLabel} \rightarrow \text{HoldForm}[\text{粒子的磁矩随时间的变化关系图 } \gamma = 10^5]$

$\text{ParametricPlot}[\{t, r'[t]^2 + r[t]^2 \phi'[t]^2\}, \{t, \theta, tm\}, \text{AxesLabel} \rightarrow \{\text{HoldForm}[\{t\}], \text{HoldForm}[\mu]\}, \text{PlotLabel} \rightarrow \text{HoldForm}[\text{粒子动能随时间的变化}],$

$\text{LabelStyle} \rightarrow \{\text{GrayLevel}[0]\}, \text{ImageSize} \rightarrow \{360, 215\}, \text{AspectRatio} \rightarrow \text{Full}$

粒子的磁矩随时间的变化关系图 $\gamma = 10^5$



磁偏角为 χ

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

粒子的运动不再在一个平面上，但讨论的方法类似
介于定量分析较为复杂，仅给出数值解，并作定性分析

```

Clear[s, equ, r, t, phi, chi, theta, Br, Btheta, Bphi, gamma, alpha, f, B, r0, mu, nu, f1, f2, f3]
[清除]
chi = 0.1;
gamma = 10^2; mu = 4.3 * 10^25; nu = 5.6846 * 10^25;
a = gamma * mu * 10^-7; b = 6.67 * 10^-11; r0 = 10^3; tm = sqrt(4 * Pi^2 * r0^3 / b);
B[t_] := Norm[{Br[r[t], phi[t], chi], Btheta[r[t], phi[t], chi], Bphi[r[t], phi[t], chi]}]
[赋值]

(*-----粒子运动的微分方程-----*)
Br[r_, phi_, chi_] := a
  2 Cos[phi]^2 Cos[chi] + Cos[phi]^2 Sin[phi]^2 (2 Cos[phi]^2 Cos[chi] - (-3 + Cos[chi]) Sin[phi]^2) + Cos[phi]^2 Cos[phi] Sin[phi] Sin[chi] + Cos[phi] Sin[phi]^2 Sin[chi];
[赋值]
Btheta[r_, phi_, chi_] := a
  Cos[chi] Sin[phi]^3 + Cos[phi]^2 Sin[phi] ((-2 + 3 Cos[phi]^2) Cos[chi] + 3 Sin[phi]^2) - 2 Cos[phi]^2 Cos[phi] Sin[chi] - 2 Cos[phi] Cos[phi] Sin[phi]^2 Sin[chi];
[赋值]
Bphi[r_, phi_, chi_] := a
  Sin[phi] (6 Cos[phi] Sin[2 phi] Sin[chi]^2 + Sin[chi] + 3 Cos[2 phi] Sin[chi]);
[赋值]
equ = {r[t] phi'[t] Btheta[r[t], phi[t], chi] - r[t] phi''[t] Sin[phi[t]] Bphi[r[t], phi[t], chi] - b/r[t]^2 == r''[t] - r[t] phi'[t]^2 - r[t] phi''[t] Sin[phi[t]]^2,
  r[t] phi'[t] Sin[phi[t]] Btheta[r[t], phi[t], chi] - r''[t] Bphi[r[t], phi[t], chi] == r[t] phi''[t] + 2 r'[t] phi'[t] - r[t] phi''[t] Sin[phi[t]] Cos[phi[t]],
  r'[t] Btheta[r[t], phi[t], chi] - r[t] phi''[t] Bphi[r[t], phi[t], chi] == r[t] phi'[t] Sin[phi[t]] + 2 r[t] phi'[t] Cos[phi[t]] + 2 r''[t] phi'[t] Sin[phi[t]]};
[赋值]
r[0] = r0, phi[0] = Pi/2, phi'[0] = 0, r'[0] = 0, phi''[0] = 0.0001, phi''[0] = sqrt(b/r0/r0);
[赋值]
s = NDSolve[equ, {r, phi}, {t, 0, 100 * tm}];
[数值求解微分方程]
{r, phi, phi} = {r, phi, phi} /. s[[1]]
  
```

磁偏角为 χ (小核质比)

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

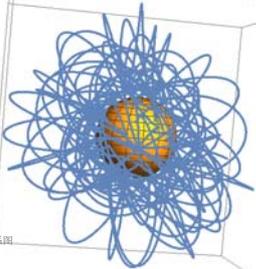
椭圆轨道叠加上绕磁场（地理）的赤道平面的上下振荡
随着 χ 的增大（指与 π 相差的绝对值），粒子在磁场的极点附近运动的时间越长，而 γ 越小，其包络面的周期则越长

左图粒子运动轨道 ($\chi=1.5$ 、 $\gamma=1$)
右图z随时间的变化关系图 (上 $\chi=0.1$ 、 $\gamma=0.1$ ，下 $\chi=1.5$ 、 $\gamma=0.1$)


中国科学技术大学
 University of Science and Technology of China

磁偏角为 χ (中等核质比)

存在一个 γ 的结点
 (χ 越大, 此 γ 也越大,
 这是由于粒子垂直于
 磁场的速度变小)
 从这个之后粒子的运
 动开始变得不太规则



$\chi=1.5, \gamma=20$

z(地理) 随时间的变化关系图



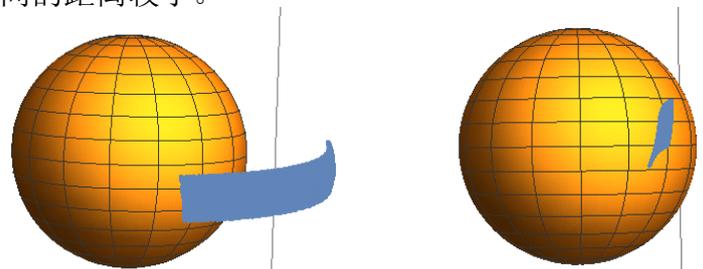
... NDSolve: At t == 2.9013118073506956*^6, step size is effectively zero; singularity or stiff system suspected.

当所要计算的时间较长时, 可能会出现如上的报错, 从而无法研究较长
 时间内粒子运动的总体情况


中国科学技术大学
 University of Science and Technology of China

磁偏角为 χ (大核质比)

漂移速度由引力、磁场梯度组成, 磁场梯度造成的漂移运动沿
 磁场坐标系下的 φ 方向, 而引力则三个方向上都有, 大小取决
 于磁偏角。 γ 越大, 漂移速度越小。
 由于初始时刻粒子有较大的垂直于磁场方向的速度, 故两个磁
 镜点间的距离较小。



大核质比粒子相同时间内的运动轨迹 (左 $\chi = 0.5, \gamma = 10^4$,
 右 $\chi = 0.5, \gamma = 10^5$)

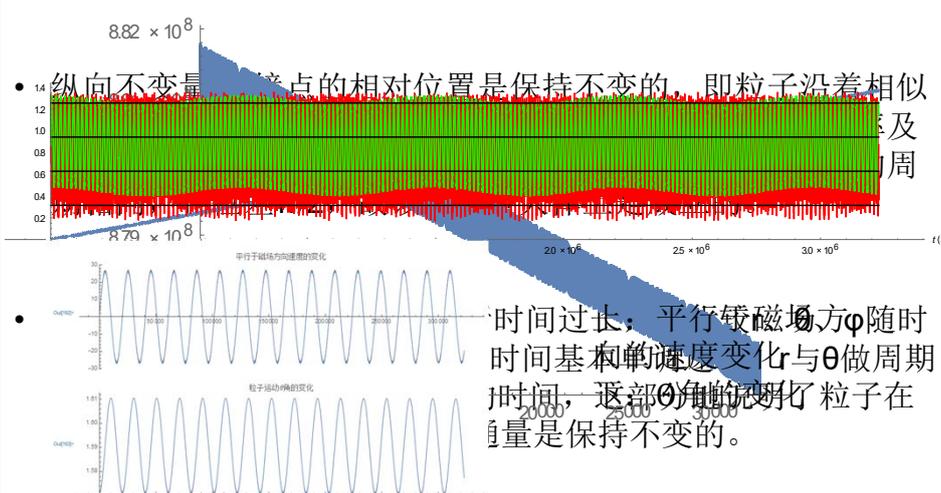
$$m\ddot{\vec{r}}_C = q\vec{r}_C \times \vec{B}(\vec{r}_C) + \vec{F}(\vec{r}_C) - \mu\nabla B(\vec{r}_C)$$

验证绝热不变量



中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

- 磁矩不变量 磁矩单调递减 在一个周期内的变化不超过千分之五
- 纵向不变量 节点的相对位置是保持不变的，即粒子沿着相似速率及周期



- 时间过长，平行磁场方向 φ 随时间基本不变，速度变化与 θ 做周期运动，这部分 θ 角的变化了粒子在量是保持不变的。



中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

- 综述
- 带电粒子的运动
- 结论与讨论
- 研究展望
- 致谢
- 参考文献

结论与讨论



- 静止理想磁偶极子场与引力场作用下粒子的运动轨迹
粒子到原点的距离小于 R 则落入天体的大气层
除 $\gamma > 10^3$ 及 $\gamma < 1$ 的粒子，都会在几个周期之内落入大气层内
土星上方的冰粒大多数在 10^2 的量级
很快消失！与现实不符！
- 忽略了天体的自传
天体的自传带动着磁力线与之同步自转
旋转磁场的模型比较复杂，详细可见参考文献【1】

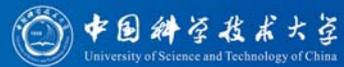


- 综述
- 带电粒子的运动
- 结论与讨论
- **研究展望**
- 致谢
- 参考文献

研究展望



- 天文学
- 工程应用
 - 洛伦兹航天器【6】
带电航天器的无推进工质消耗的轨道机动
悬停 交会 编队

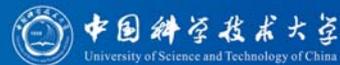


- 综述
- 带电粒子的运动
- 结论与讨论
- 研究展望
- 致谢
- 参考文献

致谢



首先想潘海俊老师，正是在课堂上的学习使我对电磁学的一些小课题充满的兴趣，并有了一些数理基础去解决这些问题。接着感谢公众号科研圈，是这个公众号让我了解到了土星“光环雨”这一神奇的现象，也激发了我去探究这一问题的兴趣。其次我想感谢参考文献3《磁层粒子动力学》，这本书上充满着大量的错误，各种正负号以及字母的错误或遗漏，是这些错误让我静下心来，一步步地去理解和推导每一个公式，而这个过程也让我对带电粒子的运动有了更为深入的了解。最后还想感谢所有一起讨论问题的同学们，特别是17级物院的徐沙沙学姐，她帮忙阅读了本文的初稿并提出了不少建议，这些都让我受益匪浅。



- 综述
- 带电粒子的运动
- 结论与讨论
- 研究展望
- 致谢
- 参考文献

参考文献



- Northrop, T. G., & Hill, J. R. (1983). The adiabatic motion of charged dust grains in rotating magnetospheres. *Journal of Geophysical Research*, 88(A1), 1.
- O'Donoghue, J., Moore, L., Connerney, J., Melin, H., Stallard, T., Miller, S., & Baines, K. H. (2018). Observations of the chemical and thermal response of "ring rain" on Saturn's ionosphere. *Icarus*.
- 《磁层粒子动力学》，徐荣栏、李磊，科学出版社
- 《地球电磁现象物理学》，徐文耀，中国科学技术大学出版社
- **Mathematica**参考资料
- 洛伦兹航天器动力学分析与控制，黄煦，国防科技大学



谢谢