



中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

利用matlab实现磁镜运动 可视化和若干性质探究

导师：邓友金 陈宇翱

答辩人： 物理学院六班 王铠泽

目 录

1 • 选题背景

2 • 研究目标

3 • 研究方法及过程

4 • 关键与实践难点

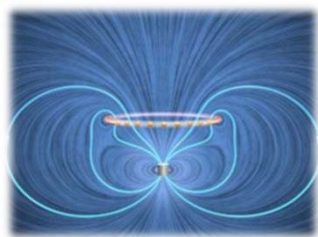
5 • 研究结果

6 • 论文总结



选题背景及意义

——选题的背景



1

1.选题背景

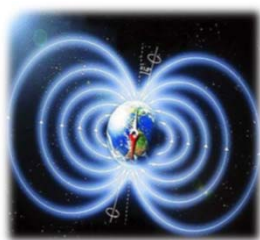
选题背景

磁约束是当今进行氢核聚变约束装置的理想选择，有了可靠安全的磁镜装置，我们就有了可控核聚变，核能应用可谓有更广阔的前景。了解磁镜结构和粒子的运动性能能提供指导性的建议。

但尽管经过一系列假设简化，磁镜中的运动仍不能得到解析解，想要进一步了解，必须借助数值模拟！

研究目标

——选题的研究目标



2

2. 研究目标

研究目标

- 1.实现静态的粒子模拟
- 2.实现动态的粒子模拟
- 3.分析运动特性

研究方法及过程

——选题的研究方法

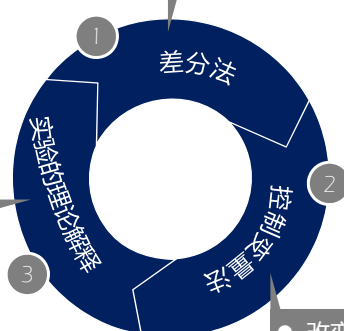
——选题的研究过程



3

3.研究方法及过程

- 对于数值模拟的结果给出恰当的理论解释



- 利用matlab强大的计算功能用差分法模拟粒子运动

- 改变某一条件，研究粒子在磁场中的性态



关键技术与实践难点

——选题的技术与实践难点



4

1.磁镜模型的建立

- 使用的近似简化：

最基本的架构假设由两个位于 $x=\pm a$ 磁偶极子构成，保证场的对称性。

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(3\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{p}}{r^3}$$

- 两个磁偶极子叠加的磁感应强度分量形式：

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 p}{4\pi} \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{2(x-a)^2 - y^2 - z^2}{[(x-a)^2 + y^2 + z^2]^{2.5}} + \frac{2(x+a)^2 - y^2 - z^2}{[(x+a)^2 + y^2 + z^2]^{2.5}} \right) \hat{x} + \\ &\left(\frac{3(x-a)y}{[(x-a)^2 + y^2 + z^2]^{2.5}} + \frac{3(x+a)y}{[(x+a)^2 + y^2 + z^2]^{2.5}} \right) \hat{y} + \\ &\left(\frac{3(x-a)z}{[(x-a)^2 + y^2 + z^2]^{2.5}} + \frac{3(x+a)z}{[(x+a)^2 + y^2 + z^2]^{2.5}} \right) \hat{z} \end{aligned} \right\}$$

- 将 x, y, z 以 a 为单位, B 以 $\frac{\mu_0 p}{4\pi a^3}$ 为单位, 将上式无量纲化。

$$B = \left\{ \left(\frac{2(x-1)^2 - y^2 - z^2}{[(x-1)^2 + y^2 + z^2]^{2.5}} + \frac{2(x+1)^2 - y^2 - z^2}{[(x+1)^2 + y^2 + z^2]^{2.5}} \right) \hat{x} + \right. \\ \left. \left(\frac{3(x-1)y}{[(x-1)^2 + y^2 + z^2]^{2.5}} + \frac{3(x+1)y}{[(x+1)^2 + y^2 + z^2]^{2.5}} \right) \hat{y} + \right. \\ \left. \left(\frac{3(x-1)z}{[(x-1)^2 + y^2 + z^2]^{2.5}} + \frac{3(x+1)z}{[(x+1)^2 + y^2 + z^2]^{2.5}} \right) \hat{z} \right\}$$

- 进一步简化, 做幂级数展开 (保留到平方项):

$$B = 1\hat{x} + 6\left[\left(x^2 - \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{2}\right)\hat{x} - xy\hat{y} - xz\hat{z}\right]$$

- 这样子初步做成一个关于 x 轴对称的场, 但是为了满足缓变的要求, 需要在轴向上增幅磁场
- 为了简化符号, 我们约定: 磁场增幅 ΔB 等于 x 方向上磁场的常数项, 以 $B_0 = \frac{6\mu_0 p}{4\pi a^3}$ 为单位。
- 调节 ΔB 得到不同的磁镜。当取 $\Delta B=1$, 有:

$$B = \left[1 + \left(x^2 - \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{2}\right)\right]\hat{x} - xy\hat{y} - xz\hat{z}$$

2. 利用matlab进行数值模拟

- 首先由粒子运动方程开始: 在磁镜中只受洛伦兹力:

$$m \frac{dv}{dt} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

- 在磁镜的磁场中, 以分量形式写出:
$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = Ax(v_z y - v_y z) \\ \frac{dv_y}{dt} = A\{V_z \left[1 + \left(x^2 - \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{2}\right)\right] + V_x xz\} \\ \frac{dv_z}{dt} = A\{V_y \left[1 + \left(x^2 - \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{2}\right)\right] + V_x xy\} \end{cases}$$

- 上式中, $A = \frac{q}{m}$

- 我们便可以借助for循环构建迭代

- 函数框架如下：
- **1.set for parameters**
- Including: $\Delta t, X, Y, Z, q/m, \Delta B, \phi = 6 \cdot \text{ratio} \cdot B_0 \dots$
- **2.create a for loop**
 - for $t=0:\Delta t:\sim \sim \Delta t \sim 10^{-11}/-12$
 - $i=i+1; x(i)=X; T(i)=t;$
 - $A_x = \phi * X * (V_z * Y - V_y * Z);$
 - $\Delta X = V_x * \Delta t + 0.5 * A_x * \Delta t * \Delta t;$
 - $X_1 = X + \Delta X; V_1 = A_x * \Delta t + V_x;$
 - $X=X_1; V_x=V_1; \dots$
- **3.using counters to save datas**
- **4.using datas to create pictures**

3.关于动态模拟

为了实现动态模拟，我们需要在原本静态绘图的基础上加入pause函数，实现图片与图片之间的衔接。函数框架如下：

```
%function drawing pictures:
for i=1:1:~ ~
plot3([x(i),x(i+1)], [y(i),y(i+1)], [z(i),z(i+1)]);
hold on;
pause(0.02);
```

研究结果展示

——选题的结果

And God said

$$\iiint_V \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\iiint_V \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0$$

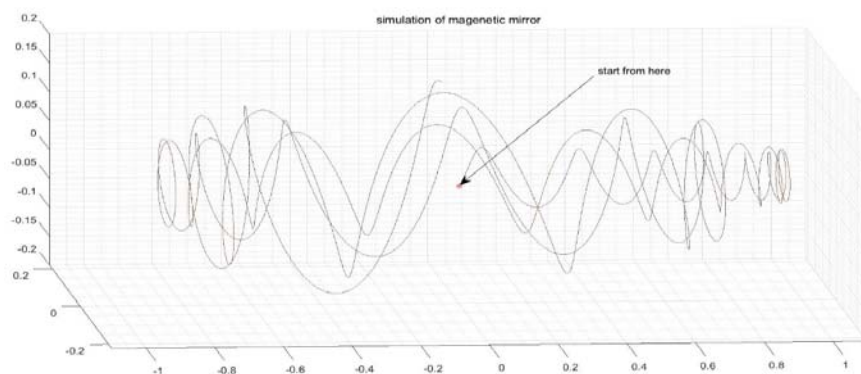
$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A}$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_s + \mu_0 \epsilon_0 \iint_S \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A}$$
 and then there was light.

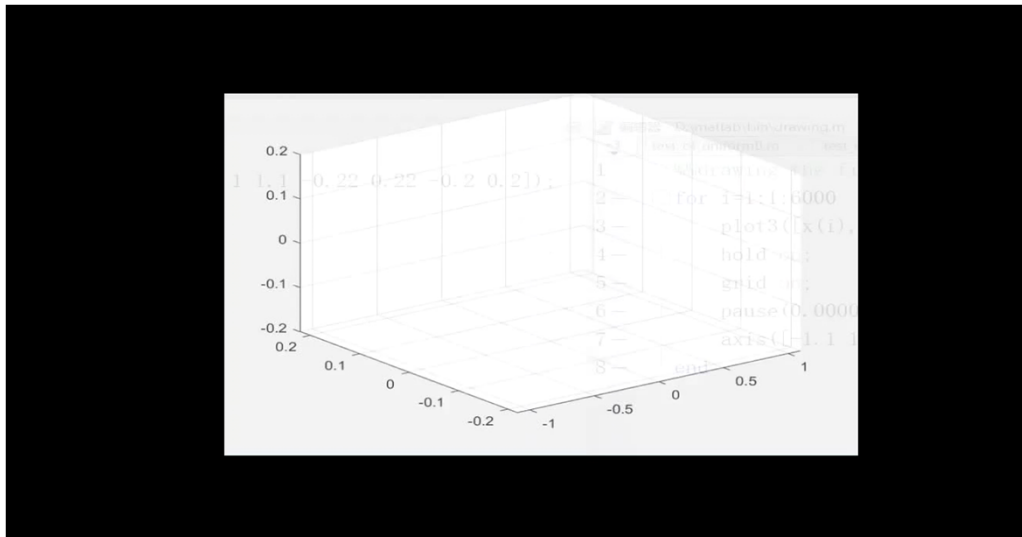
5

1.静态的粒子模拟结果

- 取粒子的比荷 $A=10^{10}$ C/kg;
- 取初值条件 $x=y=z=0, V_x = 4.99375 \times \frac{10^6 m}{s}, V_z = 4.99375 \times \frac{10^6 m}{s}, V_y = 0$;



2.动态的粒子模拟结果（展示1/4周期）



3.粒子运动性态的探究

关于抛射角临界值的误差

由于本身磁镜中粒子临界角的导出是在一系列约束和近似条件下的，我们又进一步做了近似和简化，因此本身理论值和实际模拟值很可能有偏差。另一方面，我们轴向上的磁场增幅强度可能会很大程度上影响两角偏差值，当增幅不够大时，缓变条件不能被很好的满足。

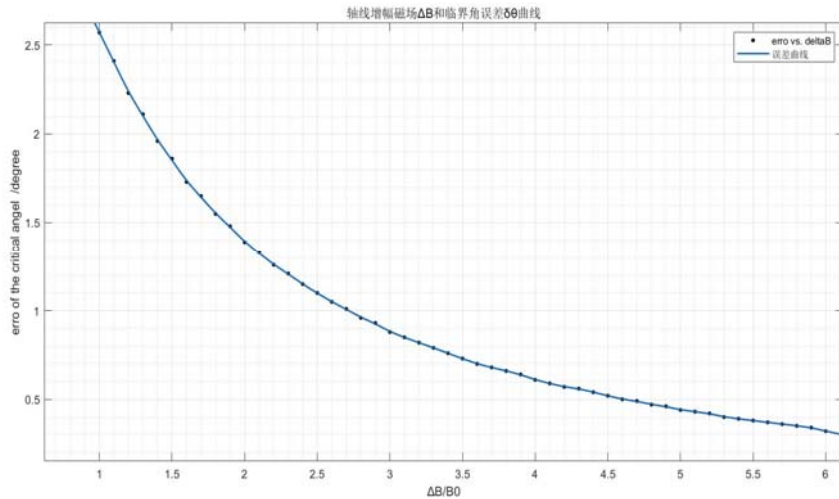
我们利用matlab数值模拟来探究合适的临界磁场增幅。

关键在于找出临界角的实验值。利用下述函数：

%function finding_critical_angel

- Set for parameter theta :for theta:theta0+5:-0.01:theta0-5
- Set a break for this loop : if exist a $X(i) \geq 1$ return theta-0.01
- Set a counter to save all the critical datas

- 再利用matlab自带的cftool工具箱，绘出误差曲线。

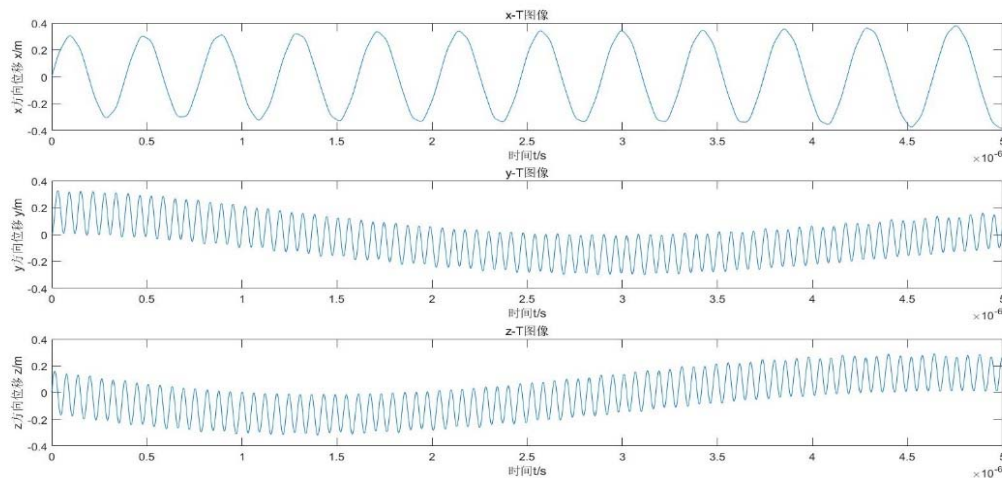


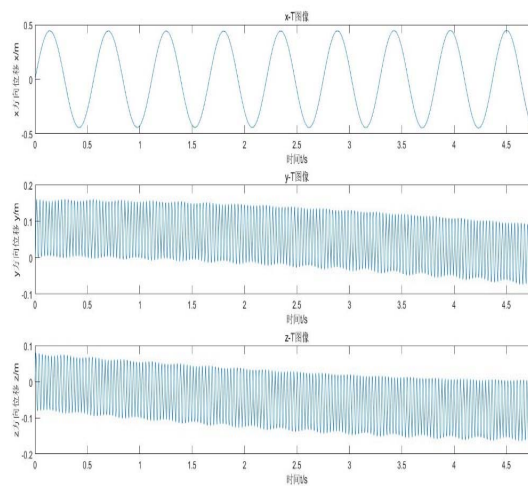
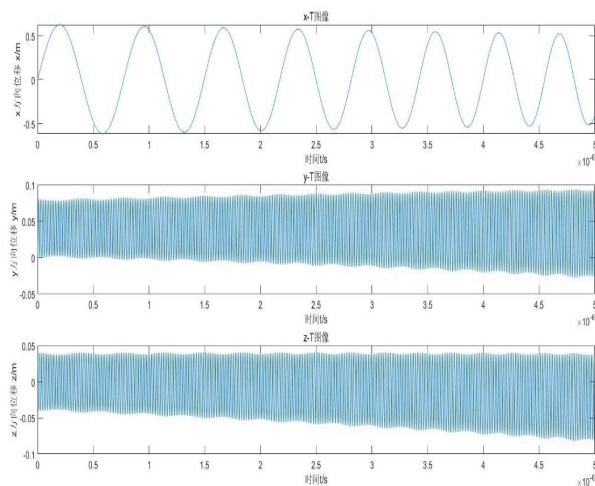
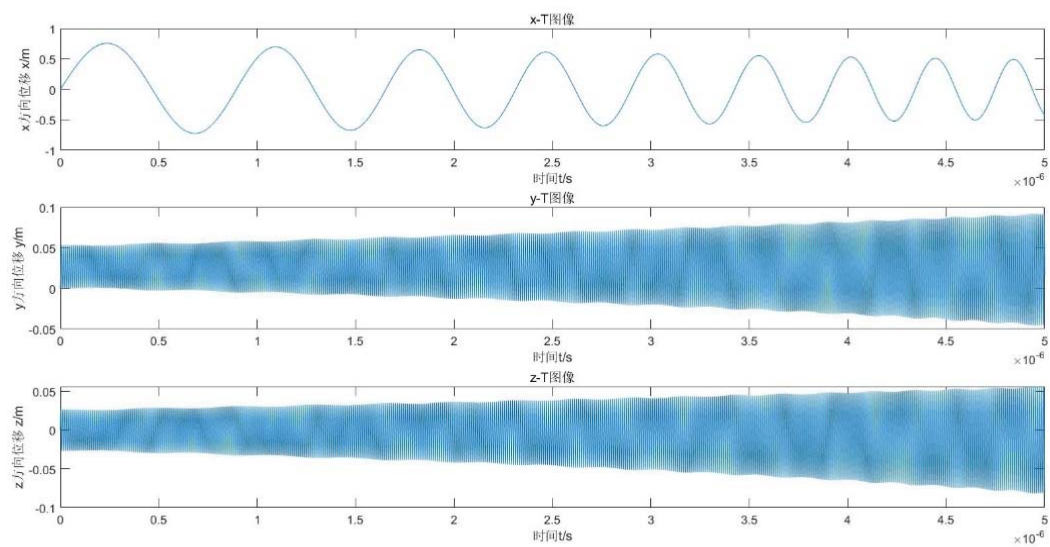
可见，要把角度误差控制在 0.5° 以下需要大于4.6的磁场增幅，这对于现实中实现磁镜的缓变条件磁场增幅临界值给出一个估计。

不同磁场增幅下的运动状态

$X=Y=Z=0, V_x = 4.99375 \times \frac{10^6 m}{s}, V_z = 16.00000 \times \frac{10^6 m}{s}$, 抛射角为 72.66° (足够大的抛射角保证粒子不逃逸)。

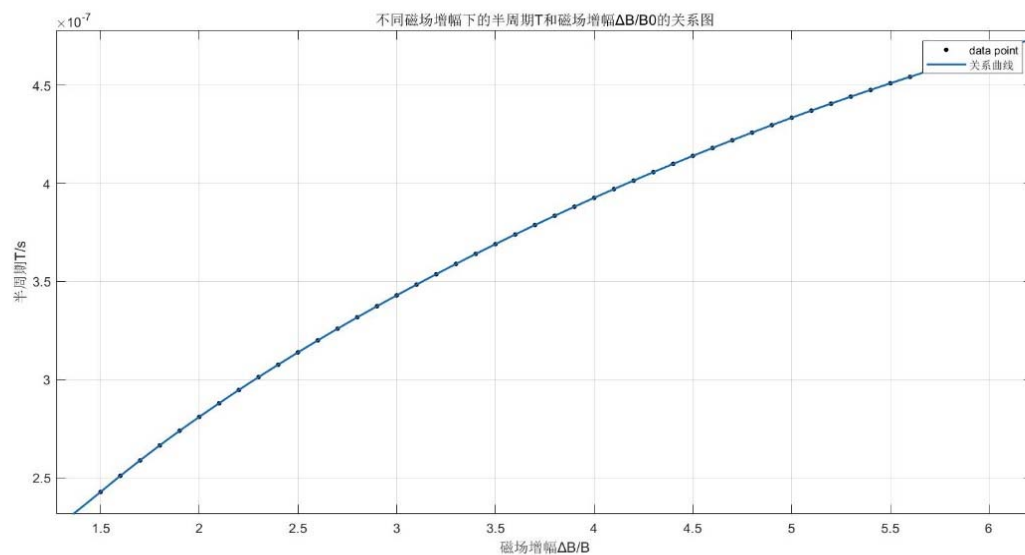
(1) $\Delta B=1$



(2) $\Delta B=2$ (3) $\Delta B=4$ (4) $\Delta B=6$ 

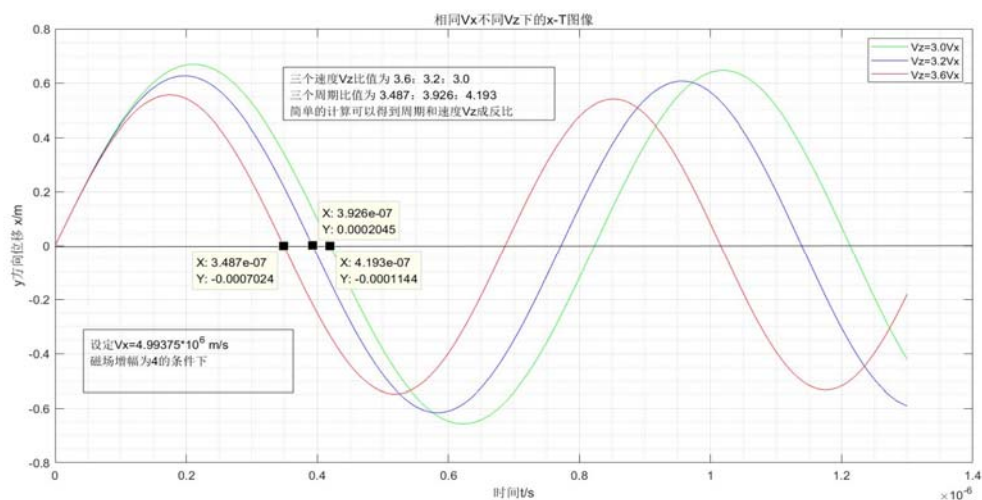
结论

- 1) 随着轴向磁场增幅变大, Y-Z平面的运动周期变小(甚至于太小以至后面的图像过于稠密)。定性分析如下, $T = \frac{2\pi m}{qB}$, B和纵向增幅正相关, 当增幅变大, 周期变小, 理论和实验吻合。
- (2) 随着轴向磁场增大, Y,Z方向振幅减小。粗略地估计半径 $r = \frac{mv}{qB}$, 当磁场增幅变大, r变小, Y,Z振幅减小, 理论和实验吻合。
- (3) 磁场增幅越强, 在Y,Z方向的运动越稳定, 模拟效果越理想。
- (4) 随着磁场增幅增强, 在X方向的位移振幅越大。这也是可以被理解的, 轴向磁场越强, 说明临界角越大, 粒子更倾向于逃逸, 既在同一个抛射角下在X方向的位移更大。
- (5) 随着磁场增幅增强, 在X方向的振动的周期变大。从极端情况来看, 如果轴向磁场远远大于其他方向, 仅考虑轴向磁场, 那么周期是无穷大, 这也吻合实际。更加精细的X方向振动半周期和磁场增幅的图像如下:



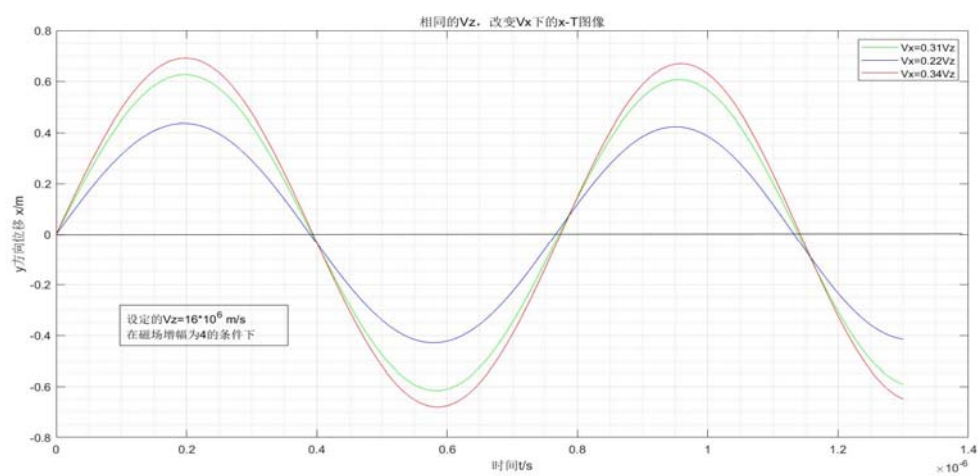
在X向上振动周期的进一步探究

• 1) 相同的 V_x 下改变 V_z :



在X向上振动周期的进一步探究

• 2) 相同的 V_z 下改变 V_x :



- 理论解释:
- 粒子的磁矩 μ 和角动量 L 之间是线性关系, 磁矩守恒意味着轨道角动量的守恒。
- $\mu = \frac{mv_{\perp}^2}{2B}$ 可导出 L 正比于 $v_{\perp}^2$
- 从而有: $\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \text{const} * v_{\perp}^2$ (x平面的角动量)
- 写成分量形式: $v_z y - v_y z = -\text{const} * v_{\perp}^2$
- 将上述式子回代到 $\frac{dv_x}{dt} = Ax(v_z y - v_y z)$, 立有:
- $\ddot{x} = -(\text{const} * v_{\perp}^2)x = -\omega^2 x$
- 所以可得到周期:
- $T = \text{const}/v_{\perp}$ 和实验结果吻合

论文总结

——选题的总结



Summary

- 综上，通过实验matlab进行的一系列数值模拟，我们对磁镜总结如下：如果磁场增幅过小不能满足缓变条件，使得实际操作起来可能有很大的误差，并且很可能不能有效约束粒子，并且另一方面，在Y-Z方向上的运动可能会有不稳定性，造成操作上的不便；磁场增幅过大，临界角又太大，不能有效地捕获粒子，并且沿X方向振动周期会显著增大，从更实际的角度考虑，更强的磁场增幅也意味着更昂贵的开销。所以考虑实用性和可行性，磁场增幅应该取一个合适的数值，不宜过大或过小。

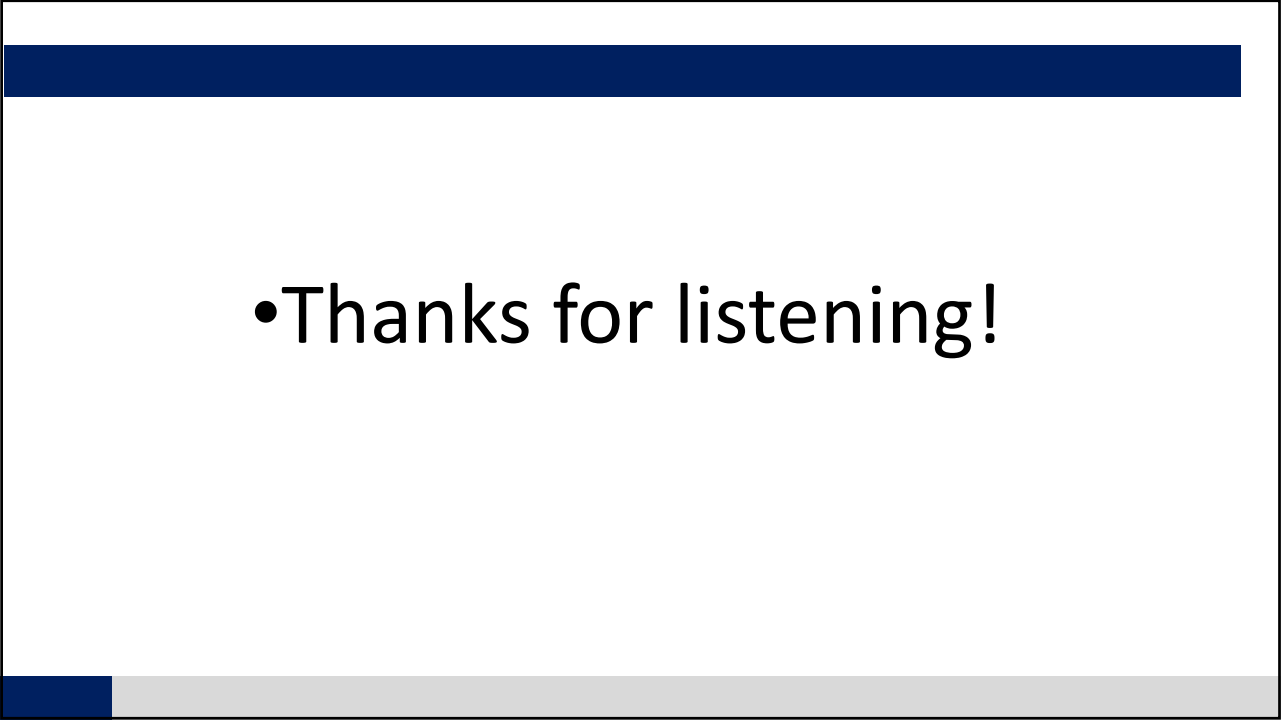
Acknowledgement

- 感谢邓友金，陈宇翱两位老师以及助教们的悉心指导。
- 感谢潘海俊老师精心制作的PPT以及叶邦角老师内容详实的电磁学课本给我提供了最初的想法。
- 感谢17级信息学院的陈文博学长在实现代码过程中提供的帮助。

参考文献

- 【1】叶邦角.电磁学第二版.[M]. 合肥:中国科学技术大学出版社.2014.8
- 【2】胡友秋,程福臻.电磁学与电动力学上册.[M].科学出版社.2016.1
- 【3】韩永胜,杨宏新.带电粒子在磁镜中运动的模拟.[J].大学物理.2014.vol33.No.3.35-40
- 大部分用到的函数源代码m文件可在百度云上找到:
- 链接: <https://pan.baidu.com/s/18v4DtpbvmUsmzx0g90JapQ>
- 提取码: ssrz

• Q&A



- Thanks for listening!