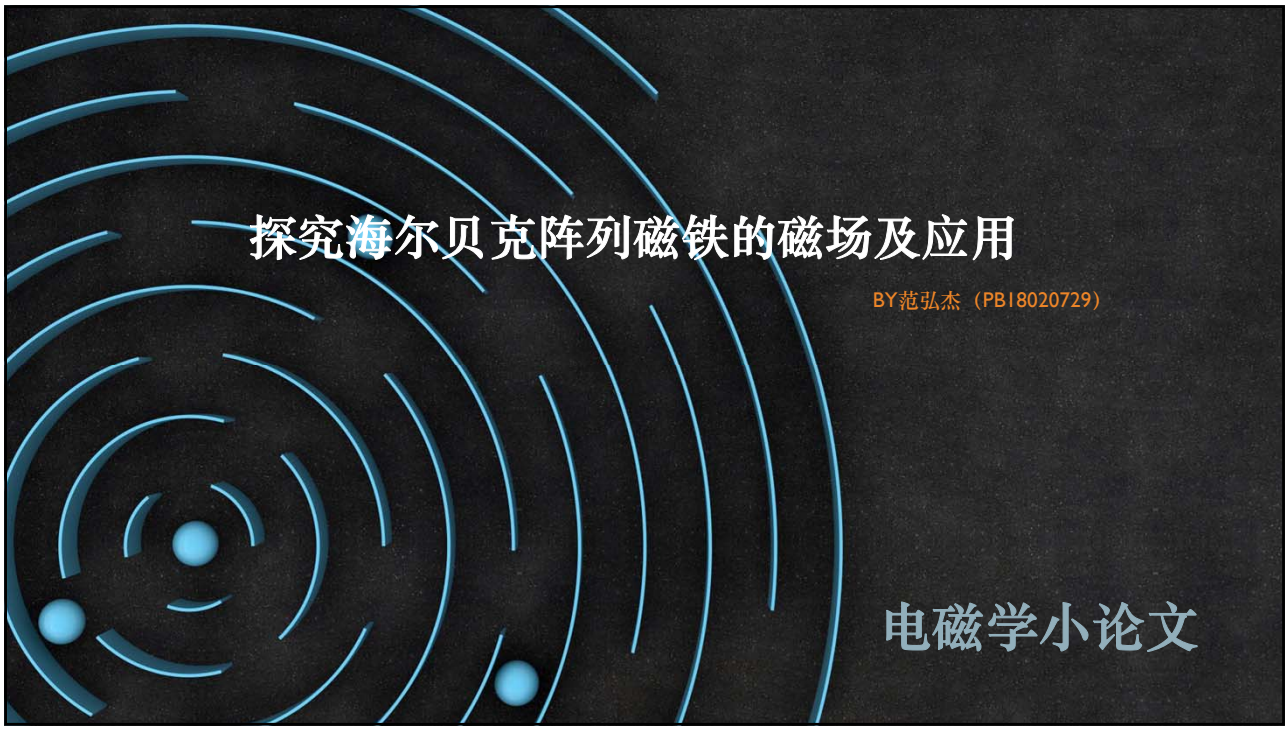


目录

1.理论

- 海尔贝克阵列是一种磁体结构，目标是用最少量的磁体产生最强的磁场。1979 年，美国学者Klaus Halbach做电子加速实验时，发现了这种特殊的永磁铁结构，并逐步完善这种结构，最终形成了所谓的“Halbach”磁铁。这种排布有线性（如图1）和环形（如图2）。本文主要对磁环进行探究。

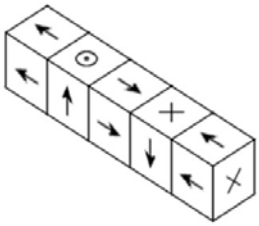


图1（图片源于网络）

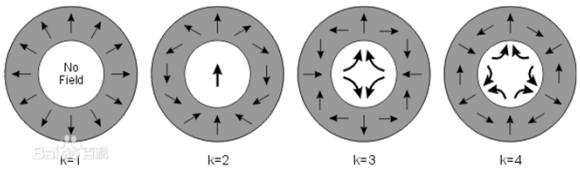


图2（图片源于网络）

- 本文的模型是由24块方形永磁铁组成的海尔贝克阵列，概念图如下：

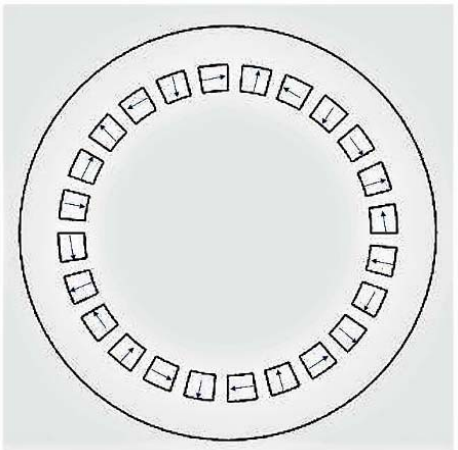


图3（概念图）

- 永磁铁视为均匀磁化的，内部M处处相同，边长为a,将模型型为并排方形电流，如图4，先计算一个方形电流环的空间磁场，如图5：

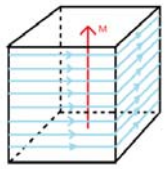


图4

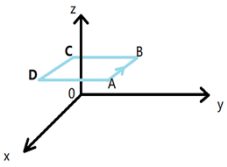


图5

AB段电流在空间（x',y',z'）点产生的磁场为：

$$\vec{B}=\int_{\frac{a}{2}}^{-\frac{a}{2}}\frac{u_0 I(-dx,0,0)\times(x'-x,y-\frac{a}{2},z'-z)}{4\pi[(x'-x)^2+\left(y'-\frac{a}{2}\right)^2+(z'-z)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

积分得：

$$B_{x1}=0$$

$$B_{y1}=\frac{u_0 I(z'-z)}{4\pi t^2}\left[\frac{-x'-\frac{a}{2}}{\sqrt{\left(x'+\frac{a}{2}\right)^2+t^2}}-\frac{\frac{a}{2}-x'}{\sqrt{(x'-\frac{a}{2})^2+t^2}}\right]$$

$$B_{z1}=\frac{u_0 I(\frac{a}{2}-y')}{4\pi t^2}\left[\frac{-x'-\frac{a}{2}}{\sqrt{\left(x'+\frac{a}{2}\right)^2+t^2}}-\frac{\frac{a}{2}-x'}{\sqrt{(x'-\frac{a}{2})^2+t^2}}\right]$$

其中$t^2=(y'-\frac{a}{2})^2+(z'-z)^2$

同理BC段：

$$B_{x2}=\frac{u_0 I(z'-z)}{4\pi t^2}\left[\frac{y'+\frac{a}{2}}{\sqrt{\left(y'+\frac{a}{2}\right)^2+t^2}}-\frac{-\frac{a}{2}+y'}{\sqrt{(y'-\frac{a}{2})^2+t^2}}\right]$$

$$B_{y2}=0$$

$$B_{z2}=\frac{u_0 I(\frac{a}{2}+x')}{4\pi t^2}\left[\frac{-y'-\frac{a}{2}}{\sqrt{\left(y'+\frac{a}{2}\right)^2+t^2}}-\frac{\frac{a}{2}-y'}{\sqrt{(y'-\frac{a}{2})^2+t^2}}\right]$$

其中$t^2=(x'+\frac{a}{2})^2+(z'-z)^2$

CD段：$B_{x3}=0$

$$B_{y3}=\frac{u_0 I(z'-z)}{4\pi t^2}\left[\frac{-x'-\frac{a}{2}}{\sqrt{\left(x'+\frac{a}{2}\right)^2+t^2}}-\frac{\frac{a}{2}-x'}{\sqrt{(x'-\frac{a}{2})^2+t^2}}\right]$$

$$B_{z3}=\frac{u_0 I(\frac{a}{2}+y')}{4\pi t^2}\left[\frac{-x'-\frac{a}{2}}{\sqrt{\left(x'+\frac{a}{2}\right)^2+t^2}}-\frac{\frac{a}{2}-x'}{\sqrt{(x'-\frac{a}{2})^2+t^2}}\right]$$

其中$t^2=(y'+\frac{a}{2})^2+(z'-z)^2$

DA段:

$$B_{x4}=\frac{u_0 I(z'-z)}{4\pi t^2}\left[\frac{y'+\frac{a}{2}}{\sqrt{\left(y'+\frac{a}{2}\right)^2+t^2}}-\frac{-\frac{a}{2}+y'}{\sqrt{(y'-\frac{a}{2})^2+t^2}}\right]$$

$$B_{y4}=0$$

$$B_{z4}=\frac{u_0 I(\frac{a}{2}-x')}{4\pi t^2}\left[\frac{-y'-\frac{a}{2}}{\sqrt{\left(y'+\frac{a}{2}\right)^2+t^2}}-\frac{\frac{a}{2}-y'}{\sqrt{(y'-\frac{a}{2})^2+t^2}}\right]$$

其中$t^2=(x'-\frac{a}{2})^2+(z'-z)^2$

对于并排电流,

$$B_x=\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\frac{(B_{x2}+B_{x4})dz}{a}$$

$$B_y=\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\frac{(B_{y1}+B_{y3})dz}{a},$$

$$B_z=\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\frac{(B_{z1}+B_{z2}+B_{z3}+B_{z4})dz}{a}$$

积分后得

$$B_x$$

$$=-\frac{u_0 I}{2a\pi}\left(\left(y'+\frac{a}{2}\right)\operatorname{atanh}\left(\frac{\sqrt{\left(x'+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y'+\frac{a}{2}\right)^2}-\sqrt{(z-z')^2+\left(x'+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y'+\frac{a}{2}\right)^2}}{\left|x'+\frac{a}{2}\right|-\sqrt{(z-z')^2+\left(x'+\frac{a}{2}\right)^2}}\right)+(y'\right.$$

$$-\frac{a}{2})\operatorname{atanh}\left(\frac{\sqrt{\left(x'+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y'-\frac{a}{2}\right)^2}-\sqrt{(z-z')^2+\left(x'+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y'-\frac{a}{2}\right)^2}}{\left|x'+\frac{a}{2}\right|-\sqrt{(z-z')^2+\left(x'+\frac{a}{2}\right)^2}}\right)+(y'$$

$$+\frac{a}{2})\operatorname{atanh}\left(\frac{\sqrt{\left(y'+\frac{a}{2}\right)^2+\left(x'-\frac{a}{2}\right)^2}-\sqrt{(z-z')^2+\left(y'+\frac{a}{2}\right)^2+\left(x'-\frac{a}{2}\right)^2}}{\left|x'-\frac{a}{2}\right|-\sqrt{(z-z')^2+\left(x'-\frac{a}{2}\right)^2}}\right)+(y'$$

$$\left.-\frac{a}{2})\operatorname{atanh}\left(\frac{\sqrt{(y'-\frac{a}{2})^2+(x'-\frac{a}{2})^2}-\sqrt{(z-z')^2+(y'-\frac{a}{2})^2+(x'-\frac{a}{2})^2}}{\left|x'-\frac{a}{2}\right|-\sqrt{(z-z')^2+(x'-\frac{a}{2})^2}}\right)\right)\Big|_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}$$

$$B_y$$

$$= -\frac{u_0 I}{2a\pi}\left(\left(-x' - \frac{a}{2}\right)\operatorname{atanh}\left(\frac{\sqrt{\left(x'+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y'-\frac{a}{2}\right)^2}-\sqrt{(z-z')^2+\left(x'+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y'-\frac{a}{2}\right)^2}}{\left|y'-\frac{a}{2}\right|-\sqrt{(z-z')^2+\left(y'-\frac{a}{2}\right)^2}}\right)+(x'\right.$$

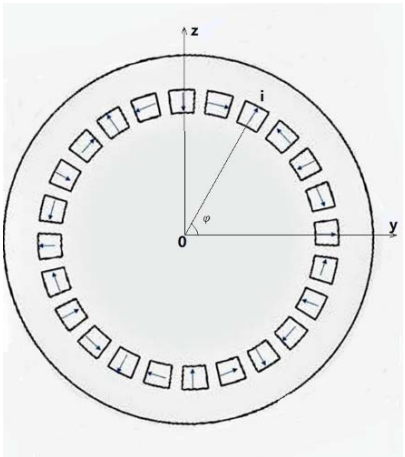
$$-\frac{a}{2})\operatorname{atanh}(\frac{\sqrt{\left(x'-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y'-\frac{a}{2}\right)^2}-\sqrt{(z-z')^2+\left(x'-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y'-\frac{a}{2}\right)^2}}{\left|y'-\frac{a}{2}\right|-\sqrt{(z-z')^2+\left(y'-\frac{a}{2}\right)^2}})+(-x'$$

$$-\frac{a}{2})\operatorname{atanh}(\frac{\sqrt{\left(y'+\frac{a}{2}\right)^2+\left(x'+\frac{a}{2}\right)^2}-\sqrt{(z-z')^2+\left(y'+\frac{a}{2}\right)^2+\left(x'+\frac{a}{2}\right)^2}}{\left|y'+\frac{a}{2}\right|-\sqrt{(z-z')^2+\left(y'+\frac{a}{2}\right)^2}})+(x'$$

$$-\frac{a}{2})\operatorname{atanh}(\frac{\sqrt{(y'+\frac{a}{2})^2+(x'-\frac{a}{2})^2}-\sqrt{(z-z')^2+(y'+\frac{a}{2})^2+(x'-\frac{a}{2})^2}}{\left|y'+\frac{a}{2}\right|-\sqrt{(z-z')^2+(y'+\frac{a}{2})^2}}))\Big|_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}$$

Z方向磁场的符号解matlab未能解出。

回到原来的海尔贝克阵列，圆心为坐标原点，刚才已经得到一块磁铁的磁场分布，对于24块磁铁，只需利用叠加原理，值得注意的是，对于每块磁铁的磁场分布，在换到现在的坐标架时，都应乘上一个旋转矩阵和平移变换。如下图:



设与y轴正方向相交的磁铁规定为1号，按逆时针排号，$\varphi = (i-1)\frac{\pi}{12}$，则在这个坐标下点$(x,y,z)$对应原i号磁铁坐标架的 $(x_1,y_1,z_1)^T =$ $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & cos\theta & -sin\theta\\ 0 & sin\theta & cos\theta\end{pmatrix}(x, y-lcos\varphi, z-lsin\varphi)^T$,其中$\theta$为旋转角，第i个磁铁对应的旋转角$\theta_i = \frac{\pi}{2} - \varphi + \frac{\pi}{2}(i-1) = \frac{\pi}{2} + (i-1)\frac{5\pi}{12}$

而换坐标架后的磁场为

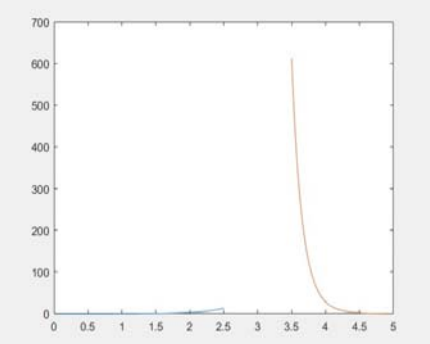
$$B_{y0} = \sqrt{B_y^2+B_z^2}\sin(\arctan\left(\frac{B_y}{B_z}\right)-\theta)$$

$$B_{z0} = \sqrt{B_y^2+B_z^2}\cos(\arctan\left(\frac{B_y}{B_z}\right)-\theta)$$

2 模拟

下面求y轴上的磁场的数值解，核心代码如图：

```
const double a=5.0,pi=3.1415926535;
double atanh(double x){
    return 0.5*log((x+1)/(1-x));
}
double magneticfieldz(double y,double z){
    double f=0.0,zz,f1,f2,f3,f4;
    for(zz=-a/2;zz<=a/2;zz+=0.001){
        f1=sqrt(a*a/4+(y-a/2)*(y-a/2)+(zz-z)*(zz-z));f2=sqrt(a*a/4+(y+a/2)*(y+a/2)+(zz-z)*(zz-z));
        f+=(a/2-y)*(-a)/f1+(a/2)*((-y-a/2)/f2-(a/2-y)/f1)+(a/2+y)*(-a)/f2+(a/2)*((-y-a/2)/f2-(a/2-y)/f1);
        f*=0.001;
    }
    return f/2;
}
double magneticfieldy(double y,double z){
    double f=0.0,zz=a/2,f1,f2,f3,f4,f5,f6;
    f1=sqrt(a*a/4+(y-a/2)*(y-a/2));f2=sqrt(a*a/4+(y+a/2)*(y+a/2));
    f3=sqrt(a*a/4+(y-a/2)*(y-a/2)+(zz-z)*(zz-z));f4=sqrt(a*a/4+(y+a/2)*(y+a/2)+(zz-z)*(zz-z));
    f5=sqrt((y-a/2)*(y-a/2)+(zz-z)*(zz-z));f6=sqrt((y+a/2)*(y+a/2)+(zz-z)*(zz-z));
    f+=(-a)*atanh((f1-f3)/(abs(y-a/2)-f5));f+=(-a)*atanh((f2-f4)/(abs(y+a/2)-f6));
    zz=-a/2;
    f1=sqrt(a*a/4+(y-a/2)*(y-a/2));f2=sqrt(a*a/4+(y+a/2)*(y+a/2));
    f3=sqrt(a*a/4+(y-a/2)*(y-a/2)+(zz-z)*(zz-z));f4=sqrt(a*a/4+(y+a/2)*(y+a/2)+(zz-z)*(zz-z));
    f5=sqrt((y-a/2)*(y-a/2)+(zz-z)*(zz-z));f6=sqrt((y+a/2)*(y+a/2)+(zz-z)*(zz-z));
    f-=(-a)*atanh((f1-f3)/(abs(y-a/2)-f5));f-=(-a)*atanh((f2-f4)/(abs(y+a/2)-f6));
    return -f;
}
int main(){
    int i;double y,z,by=0.0,bz=0.0,by0,u=0,uu=0;
    for(y=0,z=0;y<=50;y+=0.1){
        by0=0.0;
        for(i=1;i<=24;i++){
            u=pi/2+(i-1)*5*pi/12;
            uu=(i-1)*pi/12;
            by=magneticfieldy(cos(u)*(y-30*cos(uu))-sin(u)*(z-30*sin(uu)),sin(u)*(y-30*cos(uu))+cos(u)*(z-30*sin(uu)));
            bz=magneticfieldz(cos(u)*(y-30*cos(uu))-sin(u)*(z-30*sin(uu)),sin(u)*(y-30*cos(uu))+cos(u)*(z-30*sin(uu)));
            by0+=sqrt(by*by+bz*bz)*sin(atan(by/bz)-u);
        }
        printf("%llf %llf\n",y,by0);
    }
    return 0;
}
```



Y轴上B关于y的关系图。

利用comsol模拟可以得到更直观的图例，如下：

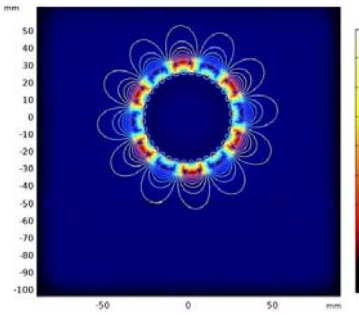


图6（磁场线）

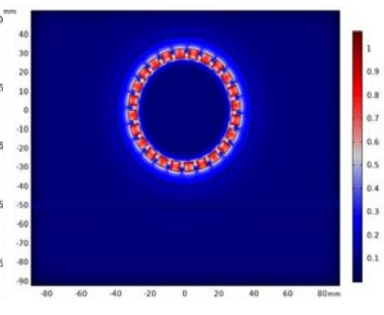


图7（磁场强度分布）

三 实验

- 装置：24个5*5*5mm的方形磁铁，3D打印的圆环框架（磁铁空位位于距圆心30mm处）。
- 组建如下：

图8（磁环）

图9（特斯拉计）

测量了轴线上的磁场，并用tracker提取了数据，根据所测的数据绘制图11：

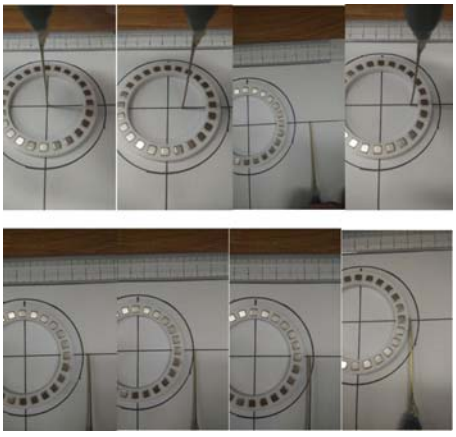


图10 （部分实验图）

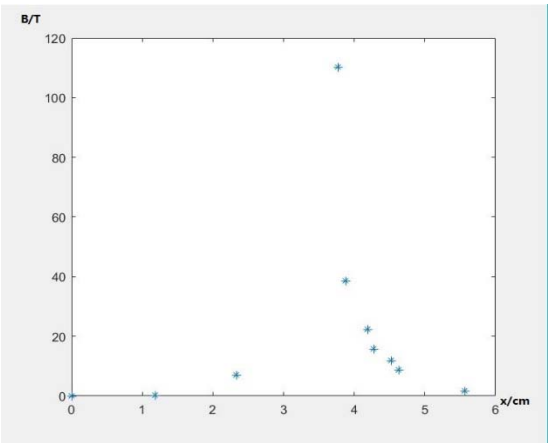


图11

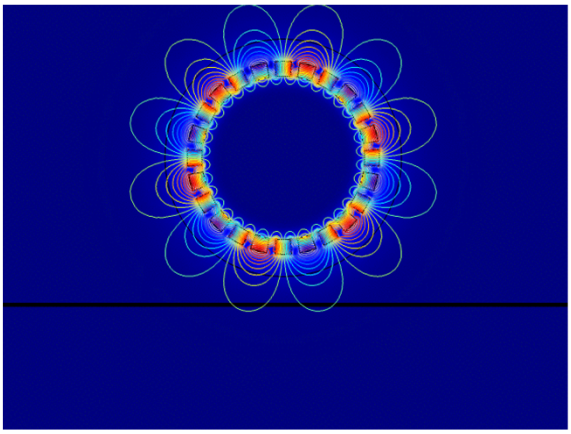
可以看出与理论曲线大致相符，磁场集中在磁铁附近，当离磁环距离渐远时，磁场迅速衰减，在磁环内部，其中心处磁场很小。

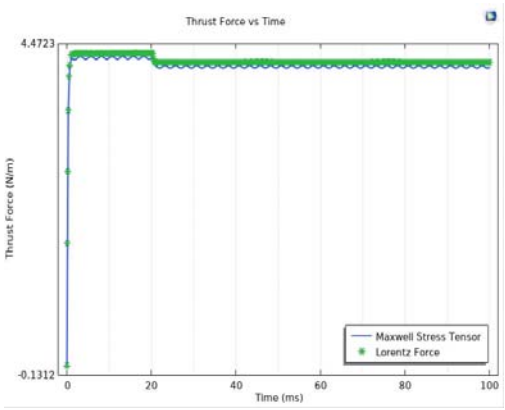
四 应用

这种磁铁阵列由于其较好集中磁场，可以用于磁悬浮列车。当磁环有一转动的角速度时，将其放于导体轨道上，导体会产生感应电流，进而提供悬浮力，和推力，但其转速会减小，故只需将以电机放于磁环中间使其维持转动，便可有持续推力。

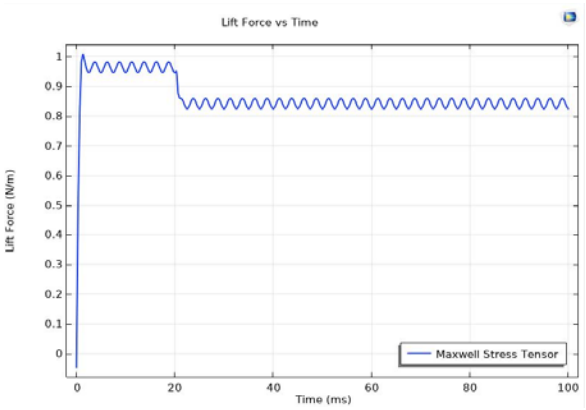
下面利用COMSOL进行模拟（模拟的情形时给定初始2000转/min,计算其之后受力,模拟是基于对案例库现存模型的修改）。

结果如下图:





推力



升力

五 参考文献

- [1].海尔贝克阵列百度百科：https://baike.baidu.com/item/海尔贝克阵列/4092015?fr=aladdin
- [2].”static_field_halbach_rotor”from COMSOL AC/DC
- [3].”edw_maglev_omega_step”from COMSOL AC/DC
- [4].胡友秋，程福臻，叶邦角编著，电磁学与电动力学，上【M】.科学出版社.2008

THANK YOU