

地磁场中带电粒子的运动 与 太阳风对地磁场的影响

王正瑞龙

CONTENTS

01

研究背景

02

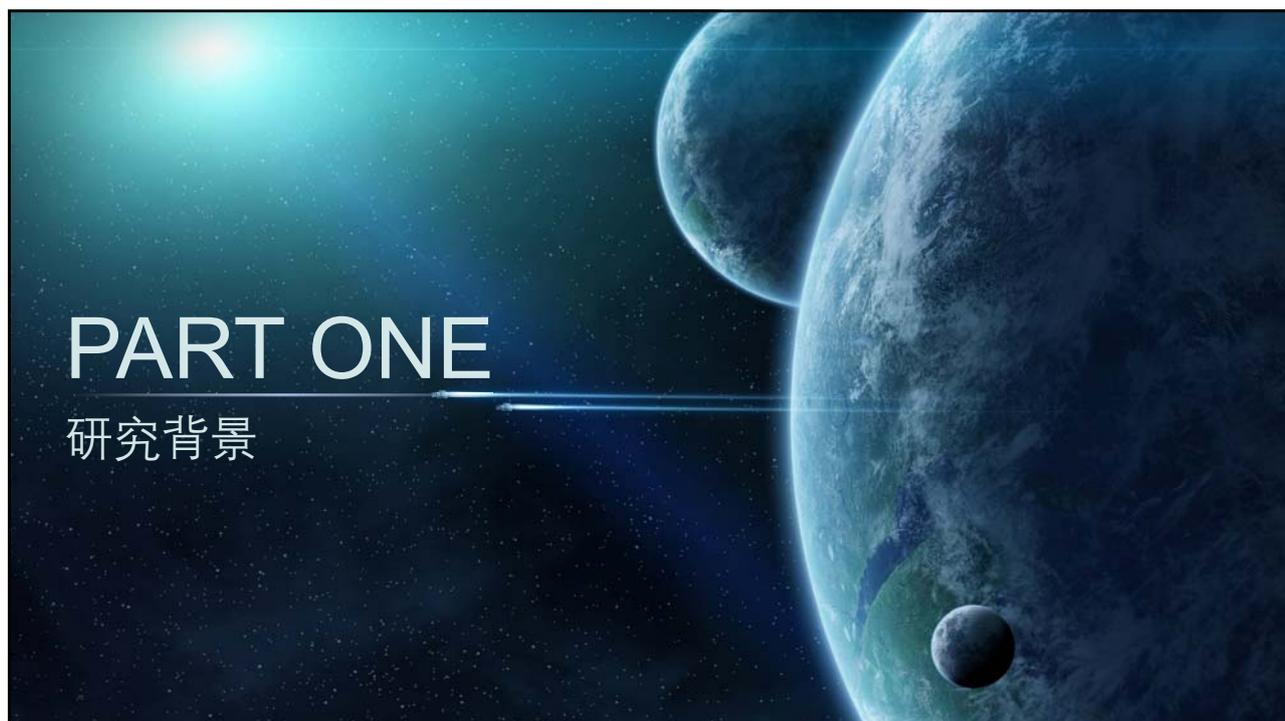
带电粒子在
范艾伦辐射带中的运动

03

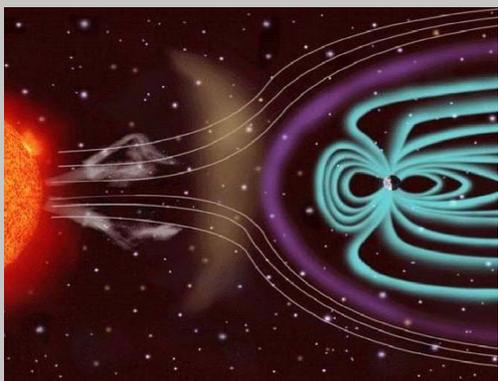
太阳风影响下的
地磁场位形

04

未来展望



研究背景

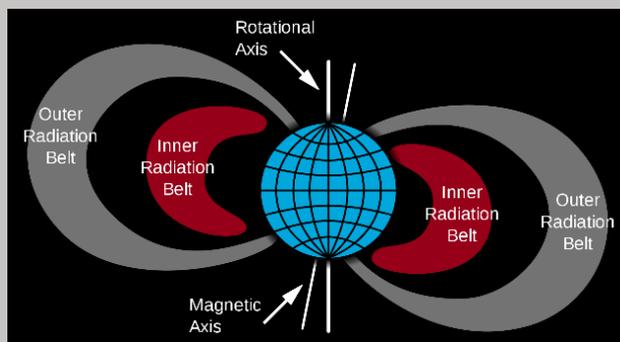


太阳风 (solar wind) 特指由太阳上层大气射出的超高速等离子体 (带电粒子) 流, 其主要成分为质子, 氦原子核和自由电子, 速度一般在 200-800km/s



来自太阳的带电粒子到达地球附近, 地球磁场迫使其中一部分沿着磁场线集中到南北两极, 与大气中的原子和分子碰撞并激发, 便产生了美丽的极地景观——极光

研究背景



强烈的太阳风裹挟着大量带电粒子吹向地球，在地磁场的阻隔与捕获下，部分粒子聚集在地球周围做着往复运动，形成了一个轮胎状辐射层，即今所谓范艾伦辐射带。

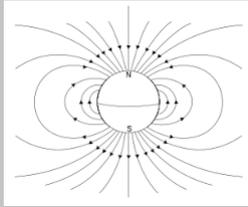
处于辐射带中的高能粒子会对人造卫星，太空望远镜等精密仪器的运作带来损坏，故引起人们对其的深入研究。

PART TWO

范艾伦辐射带中带电粒子的运动

偶极子场

由实际观测数值与理论模型比较得知，在一级近似下，地磁场在2倍地球半径以外，6倍地球半径以内的区域是一个非常理想的偶极场。



易求得偶极子磁场为：

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 \mathbf{m}}{4\pi r_0^3} + \frac{3\mu_0 \mathbf{r}_0 (\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}_0)}{4\pi r_0^5}$$

在直角坐标系中即可表示成：

$$B_x = \frac{3xzM}{r^5}$$

$$B_y = \frac{3yzM}{r^5}$$

$$B_z = \frac{(3z^2 - r^2)M}{r^5}$$

(式中M表示地球的等效磁偶极矩，数值约为 $7.8 \times 10^{22} \text{A} \cdot \text{m}^2$)

粒子运动

结合洛伦兹力公式，列出粒子运动的微分方程：

$$m\ddot{x} = q(v_y B_z - v_z B_y)$$

$$m\ddot{y} = q(v_z B_x - v_x B_z)$$

$$m\ddot{z} = q(v_x B_y - v_y B_x)$$

将已得到的偶极子场带入上述方程，并做化简，令 $k = \frac{qM}{m}$ 得：

$$k\ddot{x} = v_y B'_z - v_z B'_y$$

$$k\ddot{y} = v_z B'_x - v_x B'_z$$

$$k\ddot{z} = v_x B'_y - v_y B'_x$$

(式中 B' 为之前的 B 除以 M)

通过查阅相关数据，我们将初始条件取为如下数值：

$$x[0] = 3 * R_e, y[0] = z[0] = 0, E_0 = 10 \text{MeV}$$

$$x'[0] = 0, y'[0] = v/2, z'[0] = v * \sqrt{3}/2$$

$$R_e = 6371.2 \text{km}, k = 1.35 * 10^{-31} \text{kg} \cdot \text{m}^2 / \text{C} \cdot \text{A}$$

$$m_p = \frac{m_p^0}{\sqrt{1-\beta^2}}, m_p^0 \text{ 为质子静质量}$$

由于此方程无法求出精确的解析解，故利用 Mathematica 的 `NDSolveValue` 的功能，求此微分方程组的数值解。

求解微分方程

带入数值进行计算，代码及结果如下：

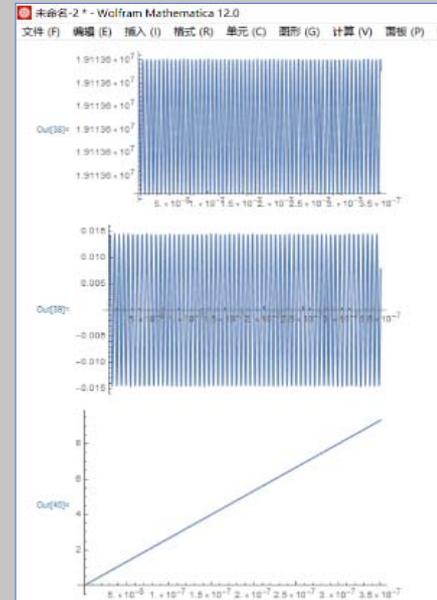
```

未命名-2 - Wolfram Mathematica 12.0
文件(F) 编辑(E) 插入(I) 格式(R) 单元(C) 图形(G) 计算(V) 面板(P) 窗口(W) 帮助(H)

tmax = 10^-7; R = 6371.2 * 1000; v = 3.08 * 10^7;
k = 1.35 * 10^(-31);
bx[x_, y_, z_] := 3 * x * z / (x^2 + y^2 + z^2)^2.5;
by[x_, y_, z_] := 3 * y * z / (x^2 + y^2 + z^2)^2.5;
bz[x_, y_, z_] := (2 * z^2 - x^2 - y^2) / (x^2 + y^2 + z^2)^2.5;
{xsol, ysol, zsol} = NDSolveValue[{k x''[t] = y'[t] * bz[x[t], y[t], z[t]] - z'[t] * by[x[t], y[t], z[t]],
(*数值解的值*)
ky''[t] = z'[t] * bx[x[t], y[t], z[t]] - x'[t] * bz[x[t], y[t], z[t]],
kz''[t] = x'[t] * by[x[t], y[t], z[t]] - y'[t] * bx[x[t], y[t], z[t]],
x[0] = 3 + R, y[0] = z[0] = 0, x'[0] = 0, y'[0] = v/2, z'[0] = v * 1.732/2}, {x, y, z}, {t, 0, tmax}]
ParametricPlot3D[{xsol[t], ysol[t], zsol[t]}, {t, 0, tmax}, PlotRange -> {{1.5 R - 1, 1.5 R + 1}, {-1, 1}, {-1, 1}}]
(*制三维参数图*)

Plot[xsol[t], {t, 0, tmax}]
Plot[ysol[t], {t, 0, tmax}]
Plot[zsol[t], {t, 0, tmax}]

```



求解微分方程

调整后的参数及运算结果如图：

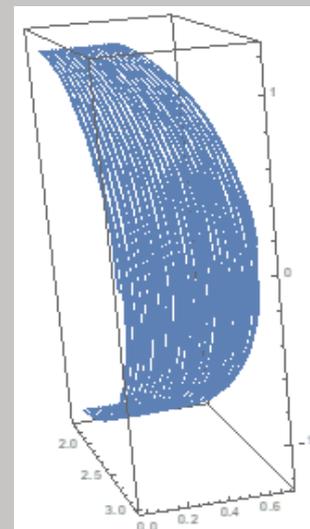
```

未命名-1 - Wolfram Mathematica 12.0
文件(F) 编辑(E) 插入(I) 格式(R) 单元(C) 图形(G) 计算(V) 面板(P) 窗口(W) 帮助(H)

tmax = 80;
k = 8 * 10^(-5);
bx[x_, y_, z_] := 3 * x * z / (x^2 + y^2 + z^2)^2.5;
by[x_, y_, z_] := 3 * y * z / (x^2 + y^2 + z^2)^2.5;
bz[x_, y_, z_] := (2 * z^2 - x^2 - y^2) / (x^2 + y^2 + z^2)^2.5;
{xsol, ysol, zsol} = NDSolveValue[{k x''[t] = y'[t] * bz[x[t], y[t], z[t]] - z'[t] * by[x[t], y[t], z[t]],
(*数值解的值*)
ky''[t] = z'[t] * bx[x[t], y[t], z[t]] - x'[t] * bz[x[t], y[t], z[t]],
kz''[t] = x'[t] * by[x[t], y[t], z[t]] - y'[t] * bx[x[t], y[t], z[t]],
x[0] = 3, y[0] = 0, z[0] = 0, x'[0] = 0, y'[0] = 1.54, z'[0] = 2.66}, {x, y, z}, {t, 0, tmax}]
ParametricPlot3D[{xsol[t], ysol[t], zsol[t]}, {t, 0, tmax}, PlotRange -> {All}]
(*制三维参数图*)

Plot[xsol[t], {t, 0, tmax}]
Plot[ysol[t], {t, 0, tmax}]
Plot[zsol[t], {t, 0, tmax}]

```



求解微分方程

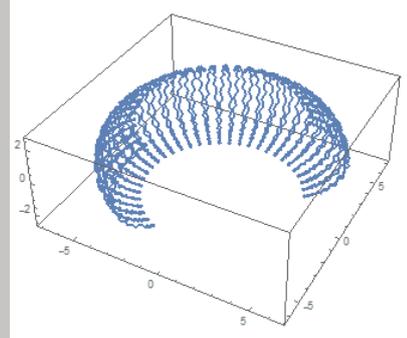
进一步调整初始位置及速度方向，便可得到更为简洁直观的漂移运动与磁镜中的来回振荡运动的叠加：

```

Wolfram Mathematica 12.0
文件(F) 编辑(E) 插入(I) 格式(O) 单元(C) 图形(G) 计算(N) 面板(P) 窗口(W) 帮助(H)

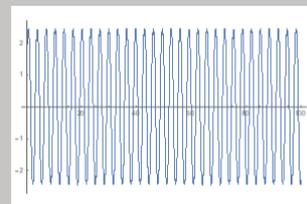
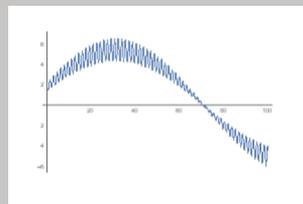
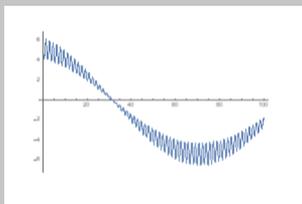
In[247]:=
tmax = 100;
k = 8 * 10^(-5);
bx[x_, y_, z_] := 3 * x * z / (x^2 + y^2 + z^2)^2.5;
by[x_, y_, z_] := 3 * y * z / (x^2 + y^2 + z^2)^2.5;
bz[x_, y_, z_] := (2 * z^2 - x^2 - y^2) / (x^2 + y^2 + z^2)^2.5;
{xsol, ysol, zsol} = NDSolveValue[{k * x''[t] == y'[t] * bz[x[t], y[t], z[t]] - z'[t] * by[x[t], y[t], z[t]],
  k * y''[t] == z'[t] * bx[x[t], y[t], z[t]] - x'[t] * bz[x[t], y[t], z[t]],
  k * z''[t] == x'[t] * by[x[t], y[t], z[t]] - y'[t] * bx[x[t], y[t], z[t]],
  x[0] == 6, y[0] == 2, z[0] == 1, x'[0] == 0, y'[0] == 3, z'[0] == 7}, {x, y, z}, {t, 0, tmax}]
ParametricPlot3D[{xsol[t], ysol[t], zsol[t]}, {t, 0, tmax}, PlotRange -> {All}]
Plot[xsol[t], {t, 0, tmax}]
Plot[ysol[t], {t, 0, tmax}]
Plot[zsol[t], {t, 0, tmax}]

```



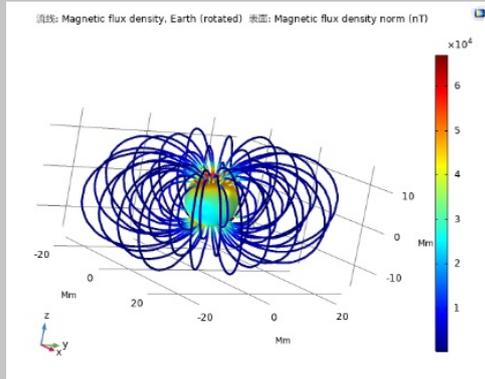
求解微分方程

三个方向上的坐标与时间的关系分别为：

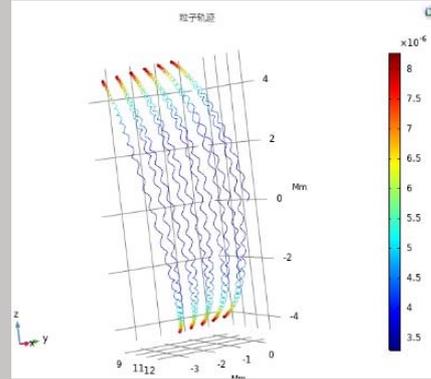


实验验证

利用COMSOL中自带的精确的地磁场，验证我们偶极子模型以及上述讨论的准确性：

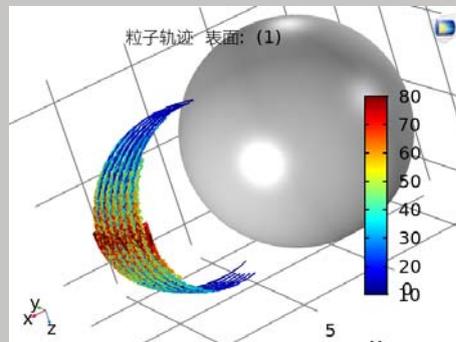
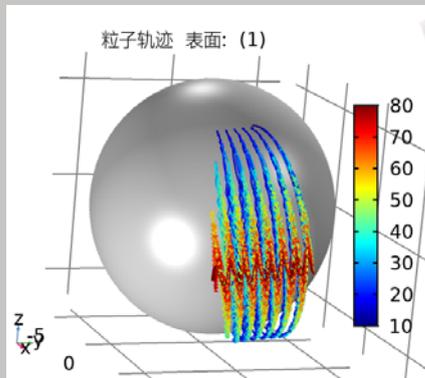


设定好粒子的初始参数：粒子为质子， $E_0 = 10\text{MeV}$ ， $x[0] = 2 * Re$ ， $y[0] = z[0] = 0$ ， $x'[0] = 0$ ， $y'[0] = v/2$ ， $z'[0] = v * \sqrt{3}/2$ 将研究1的时间间隔设置为0.005s，时间域为0~6s：



实验验证

再同时从不同角度释放多个粒子，将研究2的时间间隔设置为0.01s，时间域为0~7s，得到一组粒子运动的轨迹：

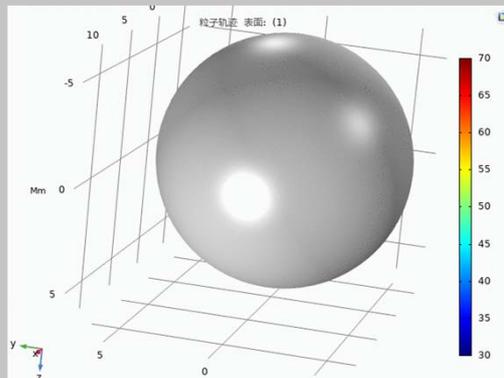


实验验证

附上两份动画：



单个粒子运动轨迹



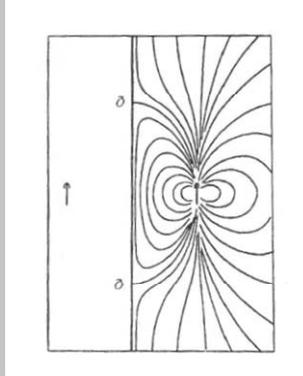
不同角度发射粒子

PART THREE

太阳风对地磁场的影响

刚性超导平面模型

在外层空间气体非常稀薄的条件下，粒子间不存在频繁的碰撞，离子-电子气体或等离子体是高导电的，当太阳发出的等离子体接近地球时，被视为一压向地球的无限大超导片。这一镜像磁场的净效果就是使地球磁场压缩，效果如下图。

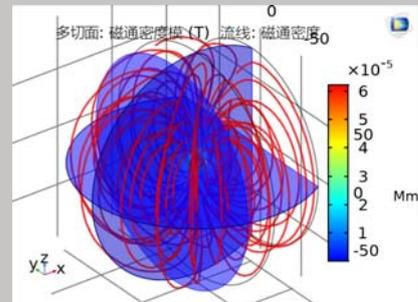
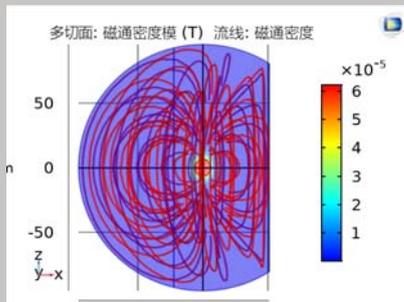


这一模型在1940年由英国地球物理学家Sydney Chapman 和Ferraro提出

刚性超导平面模型

作者通过COMSOL做出上述等效模型。用一个均匀磁化的磁介质球等效地球。求解范围设置为15倍地球半径，超导片位于距球心8倍半径处。

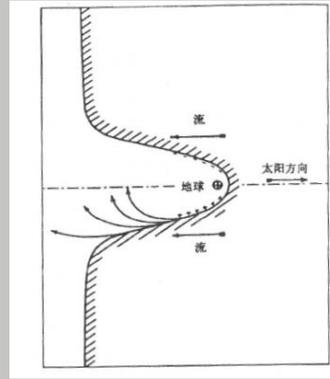
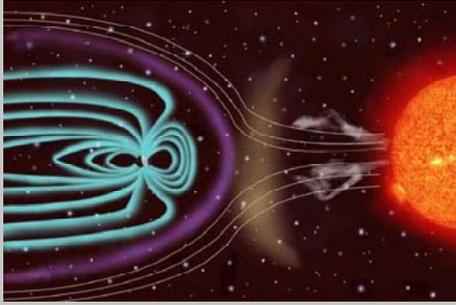
画出磁场线的分布：



能够看出该模型在磁层顶到地球的一片区域内能较好地模拟出实际磁感线的分布，但是对地磁场的磁尾的模拟与实际出现较大偏差

前沿演化模型

当等离子体以极高的速度从太阳表面抛射出，飞临地球时，会与地磁场相互作用，压迫地磁场的外边缘，在太阳风动压与地球磁压强相抵消处，形成地磁场的边界，即图片中所呈现的紫色的磁层顶。当太阳风吹得强劲时，磁层收缩；太阳风变弱时，磁层膨胀。

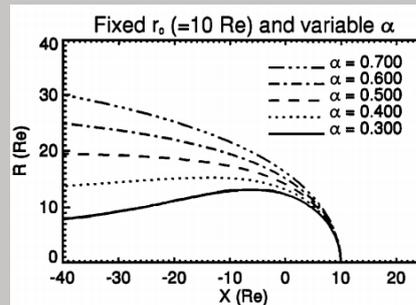
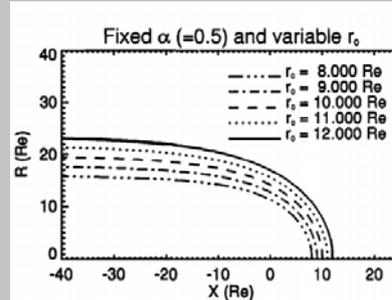


前沿演化模型

Shue 于1997年提出了一个轴对称的磁层顶模型，该模型有两个可调参数，一个是 α ，可以控制磁尾收缩或扩张，另一个是 r_0 ，表示磁层顶的顶点到地球球心的距离。 r 表示磁层顶上一点到地心的距离， θ （天顶角）表示径向矢量与日地连线的夹角：

$$r = r_0 * \left(\frac{2}{1 + \cos\theta} \right)^\alpha$$

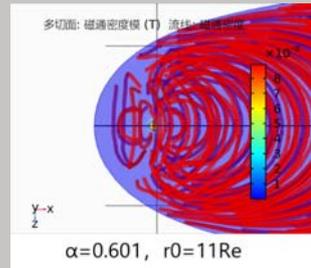
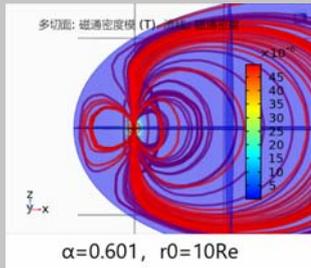
这一模型在1997年由J.-H. Shue, 和J.K. Chao提出



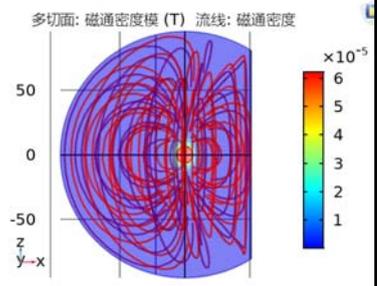
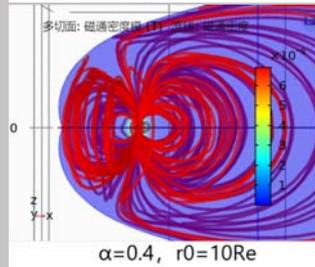
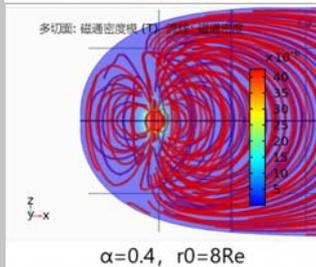
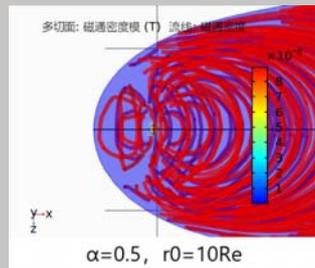
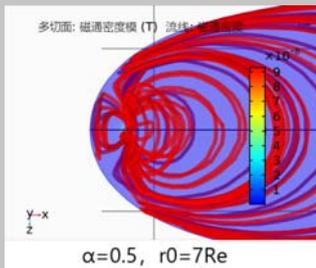
前沿演化模型

由于磁层顶的位形并非是固定的，Shue在他的论文中也结合了不同的数据样本得到了不同的 α 和 r_0 ，于是本文作者结合Shue的假设，从其研究成果中取出一系列合适的 α 和 r_0 ，再结合上极其稀薄的离子-电子气体或等离子体是高导电的这一特性，将磁层顶简化为一个超导曲面，尝试分析出此时的地磁场位形。

画出不同 α 与 r_0 所对应的磁场线位形：

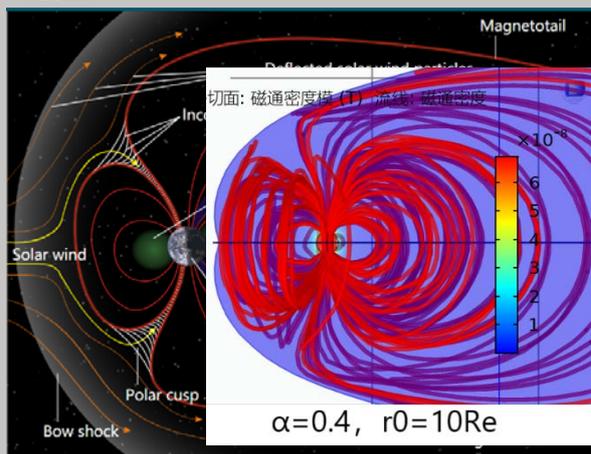


前沿演化模型



前沿演化模型

以上取值只是不断变化的磁层顶位形的几个简单代表，实际上 α 与 r_0 的值一直处于变化之中。而以上的模拟图与真实的测量位形相比，已经比较接近，但毕竟超导平面的假设不够精细，上述模型在磁尾处仍有一定偏差。



分析我们所得到的磁场线位形，发现在地球的两极均能看出较明显的极尖区 (polar cusp)，而这正是太阳风向磁层传递能量和等离子体的关键部位。

PART FOUR

未来展望

未来方向

作者所建立的模型仍然较为理想，还有许多因素没有考虑进去。比如：

1. 范艾伦辐射带中的粒子的运动受空间中电场的影响会很大，这一因素引发的运动大大增加了研究的难度，有待日后加以研究
2. 在时而猛烈的太阳风的侵袭下，地磁场会产生磁暴现象同样与辐射带中的粒子运动有关，需要加以讨论
3. 太阳风简化为超导曲面的模型比较粗糙，未来待作者学识渐丰，可以融入更多等离子体的特性，分析出地磁场的位形。
4. 本研究忽略了地球自转等因素的影响，考虑的是地球磁轴与日地连线垂直时刻的静态的情况，未来可以研究随时间变化的情况

致谢

作者十分感谢蔡方煦同学在进行工作过程中提供的大力支持与倾情帮助。还要感谢王高天，陈誉，李星钰，冯鑫同学提供的宝贵建议和帮助。同时还要感谢叶邦角，周海洋老师的谆谆教诲与辛勤的教学。

参考文献

- [1] Margaret G.Kivelson Christopher T.Russe/主编 曹晋滨等译. 太空物理学导论. 北京：科学出版社. 2001
- [2]H. 阿尔芬 C.-G.菲尔塔玛著 戴世强译. 宇宙电动力学（基本原理）. 北京：科学出版社，1974
- [3]王宣文. 二十世纪的地球偶极子磁场. 地球物理学报，2005，48（1）:52~55
- [4]J.-H. Shue, J.K. Chao. A new functional form to study the solar wind control of the magnetopause size and shape. *Journal of Geophysical Research*, VOL. 102, NO. A5, 9497-9511, MAY 1,1997
- [5]胡友秋，程福臻，叶邦角，刘之景. 电磁学与电动力学. 北京：科学出版社，2014.6
- [6] J.-H. Shue, P. Song. The location and shape of the magnetopause. *Planetary and Space Science* 50 (2002) 549 – 558
- [7] Chapman, S.; Ferraro, V. C. A. A new theory of magnetic storms. *Terrestrial Magnetism and Atmospheric Electricity*, Vol 36, 1931, No.2
- [8]丁凯 黄朝晖 王赤 刘慧莲. 极端太阳风条件下的磁层顶位形. 空间科学报，2012，32（2）：161-169

感谢大家观看

THANK YOU FOR WATCHING

