

Chua's Circuit

物理学院 PB18020631 黄阅迅

——参数对其动力学行为的影响





Chua's Circuit

-Main Points-

- 蔡氏电路简介
- 研究方法及意义
- 单参数变化影响
- 双参数变化影响



蔡氏电路简介 // Chua's Circuit

蔡氏电路简介及方程导出

蔡氏电路是一种简单的非线性电子电路设计，它可以表现出标准的混沌理论行为。
其由蔡少棠教授于1983年发表。

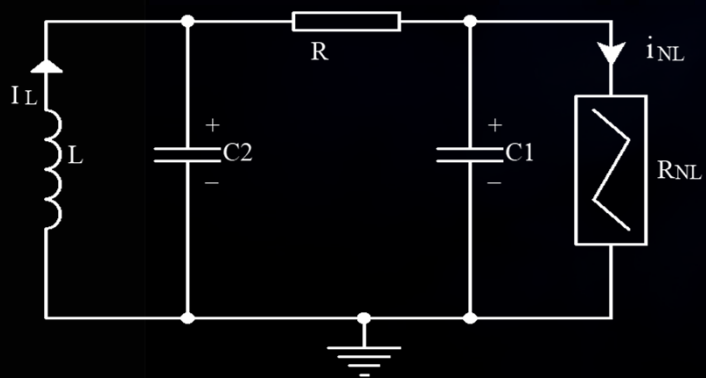
混沌系统一定是一个非线性系统，因此表征出混沌行为的系统必须满足以下条件：

- ① 一个或者多个的非线性元件
- ② 一个或者多个的本地有源电阻
- ③ 三个或者更多个能量存储元件

蔡氏电路则是满足这些标准的最简单的电子线路。



Professor. Leon O. Chua 1936-



如左图所示，蔡氏电路由两个电容 C_1, C_2 ，和一个电感 L 充当能量储存元件。一个常规电阻 R 作为本地有源电阻。以及一个蔡氏二极管 R_{NL} 作为电路中的非线性元件。

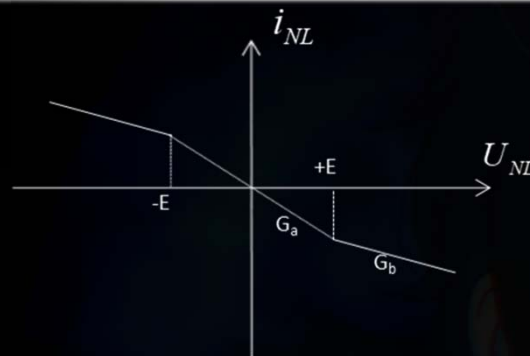
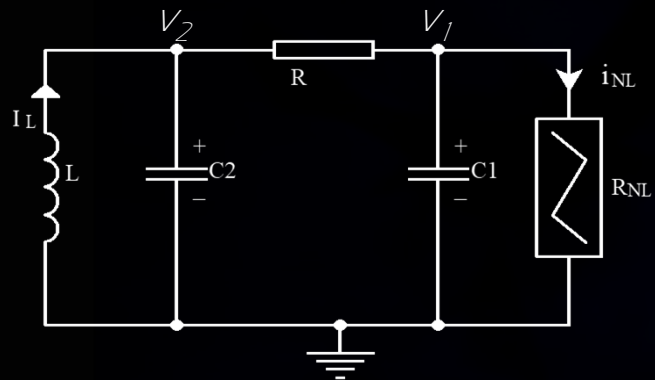
其中非线性元件满足：

$$I(V) = G_b V + 0.5(G_a - G_b)[|V + E| - |V - E|]$$

(式中 G_a , G_b 以及 E 为由元件特性决定的常数)

诸君对混沌系统和电路应已有一定的了解，各位一定也知道三体系统是一个典型的混沌系统。关于混沌系统的一些介绍，可以参见（赵凯华）《力学》非线性振动一节。而关于电路，相信各位已经在高中有了一定程度的学习。

蔡氏电路简介及方程导出



蔡氏二极管特性曲线

由基尔霍夫定律，我们可以简单地列出电路方程：

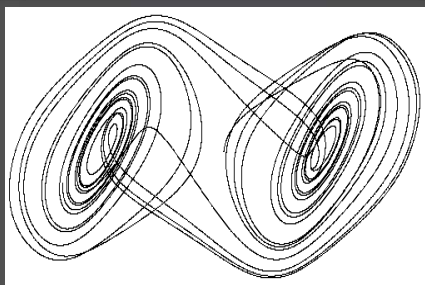
$$\left[\begin{array}{l} C_1 \frac{dv_1}{dt} = \frac{v_2 - v_1}{R} - g(v_1) \\ C_2 \frac{dv_2}{dt} = i_L + \frac{1}{R}(v_1 - v_2) \\ L \frac{di_L}{dt} = -v_2 \\ g(v_1) = g(v) = G_b v + \frac{1}{2}(G_a - G_b)[|v + E| - |v - E|] \end{array} \right. \xrightarrow[\text{归一化}]{\text{无量纲}} \left[\begin{array}{l} \dot{x} = \alpha(y - x - f(x)) \\ \dot{y} = x - y + z \\ \dot{z} = -\beta y \\ f(x) = \begin{cases} m_1 x + (m_1 - m_0), & x \leq -1 \\ m_0 x, & -1 \leq x \leq 1 \\ m_1 x + (m_0 - m_1), & x \geq 1 \end{cases} \end{array} \right.$$

令 $x = \frac{v_1}{E}$, $y = \frac{v_2}{E}$, $z = \frac{Ri_L}{E}$, $\tau = \frac{t}{RC_2}$, $m_0 = RG_a$, $m_1 = RG_b$, $\alpha = \frac{C_2}{C_1}$, $\beta = \frac{C_2 R^2}{L}$ 。

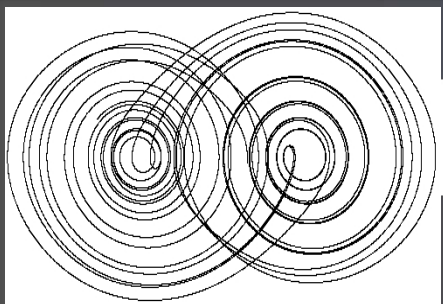
严格意义上 $\dot{x}$ 表示 x 对时间求导，而此处均用于表示对 τ 求导。

蔡氏电路简介及方程导出

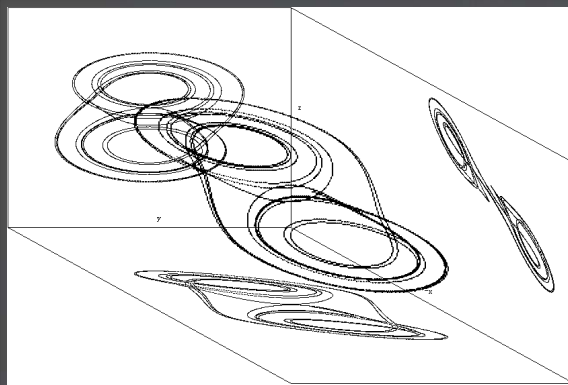
事实上蔡氏电路是一个三阶微分电路，典型的蔡氏电路参数将产生双涡旋混沌，具有奇怪吸引子。其模拟相图如下所示：



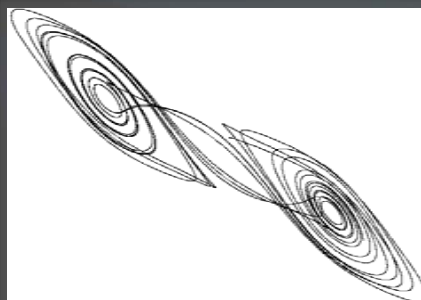
$V_1 \sim V_2$ 平面相图



$V_2 \sim I_L$ 平面相图



三维空间三相图



$V_1 \sim I_L$ 平面相图

以上相图图片仅作为参照，均来源网络。



研究方法及意义

//利用盒子法求解Hausdorff维的粗略值



Hausdorff测度与维数的数学定义

设 F 为 R^n 中任一子集:

①其 δ -覆盖 $\{U_i\}$ 定义为:

$F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$, 且对每一个 i 有 $0 < |U_i| \leq \delta$
则称 $\{U_i\}$ 为 F 的一个 δ -覆盖。

②令 s 为一个非负数, 对任意 $\delta > 0$, 定义:

$\mathcal{H}_{\delta}^s(F) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{为} F \text{的一个} \delta\text{-覆盖}\}$
则 F 的 s -维Hausdorff测度为:

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_{\delta}^s(F)$$

③则 F 的Hausdorff维数 (以 D_H 表示) 为

$$D_H = \inf\{s : \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup\{s : \mathcal{H}^s(F) = \infty\}$$

基于盒子法的分形维数求解器原理

我们如下描述求出其的方法。设一个几何部件的Hausdorff维数为 d_H ，将某一固定一维长度 ε 作为描述度量其Hausdorff测度的基本单位，则其测度大小可以写为 $N=A\varepsilon^{-d_H}$ ，其中 A 为某一常数。则Hausdorff维数可以表示为：

$$d_H = -\frac{\ln N - \ln A}{\ln \varepsilon}$$

当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时， $\ln A$ 相比 $\ln N$ 可以忽略，则有：

$$d_H = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} -\frac{\ln N}{\ln \varepsilon}$$

而在实际计算之中，我们无法使得 $\varepsilon \rightarrow 0$ ，我们只能使得 ε 尽可能小。而本文采基于盒子法(由gangepain于1986年提出)的修改方法。将有界二维相空间，分别基于 ε 与 $\beta\varepsilon$ 划分为若干个盒子。并分别计算出求解器算得点集占有的总盒子数 $N(\varepsilon)$ 与 $N(\beta\varepsilon)$ ，则可以粗略估计其相图中曲线的Hausdorff维数为：

$$d_H \approx \frac{\ln N(\varepsilon) - \ln N(\beta\varepsilon)}{\ln \beta}$$

详情请参见小论文中的附录B



研究方法以及意义

意义

蔡氏电路是一个相当经典的混沌电路，其在特定的参数范围下会对初值以及参数极度敏感的混沌运动，因此我们可以将其应用于制造加密电路或者用于产生混沌密钥。然而，在实际应用时，由于任何一个时间点的状态都可以作为新的初值，我们对其对参数的敏感性以及其动力学行为随参数的变化更有兴趣。我们必须确保系统选择的参数能够产生我们所要求的混沌密钥，因此对其参数对动力学行为的影响的研究是必要的。

方法

为了部署与拓展的方便，此处不采用matlab程序而是采用C++编译微分方程求解器以及分形维度求解器。微分方程求解器采用四阶龙格-库塔法。分形维数求解器则采用盒子法，计算其Hausdorff维的粗略值。从一组参数值出发，通过C++求解器循环求解单参数变化时其分形维数值曲线以及双参数变化时分形维度值并通过python中的matplotlib将其转化为可视化图形进行研究。一般而言，系统达到混沌时，其任一二维相图中曲线的维数值将介于1与2之间。同时，我们通过对蔡氏方程的特征根分布讨论，对一些特殊情况进行理论分析。



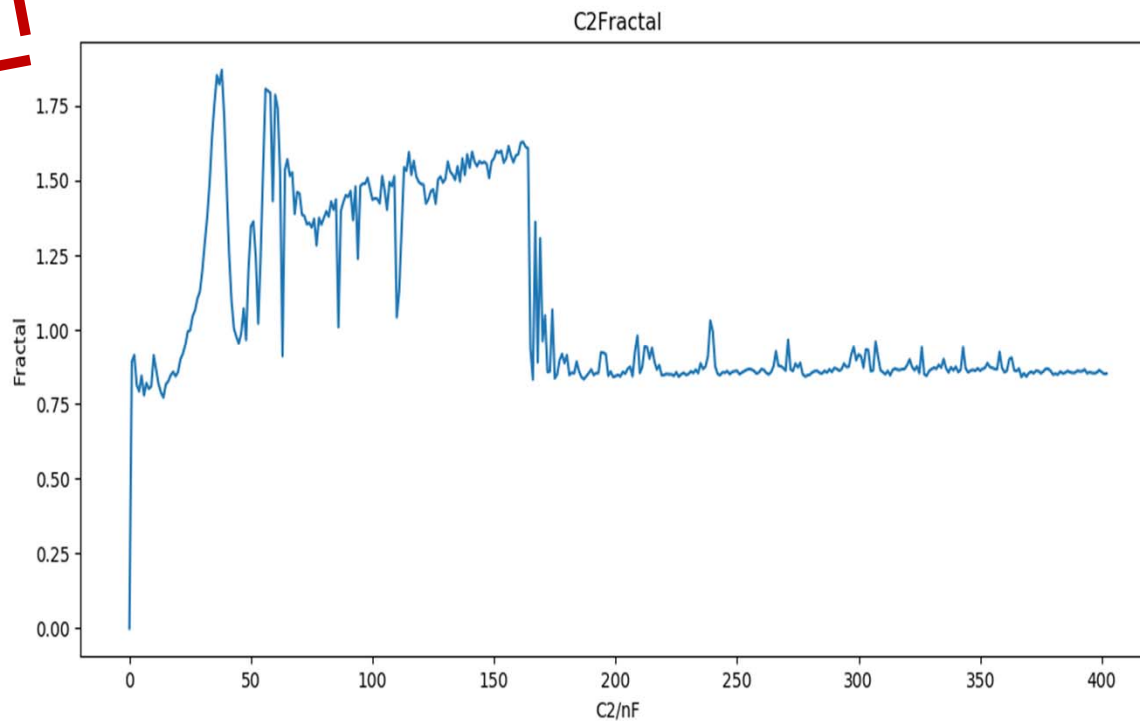
单参数变化影响

//以C++配合python作工具

各参数的分形维变化图

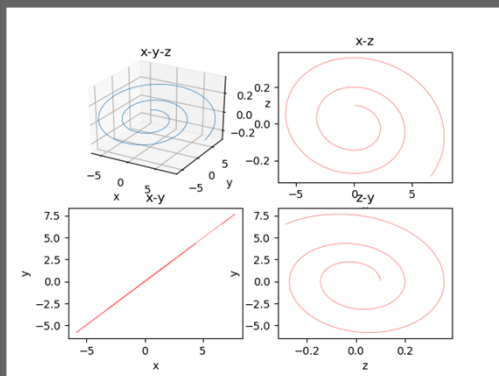
利用微分方程求解器及分形维求解器，从一组参数值 ($L=15\text{mH}$, $C1=10\text{nF}$, $C2=100\text{nF}$, $R=1.5\text{k}\Omega$, $Ga=-0.8\text{mS}$, $Gb=-0.4\text{mS}$) 以及一组初值 ($x0=0.1, y0=0.1, z0=0.1$) 出发，固定其他参数值，单独研究单个参数的影响。

Various C2

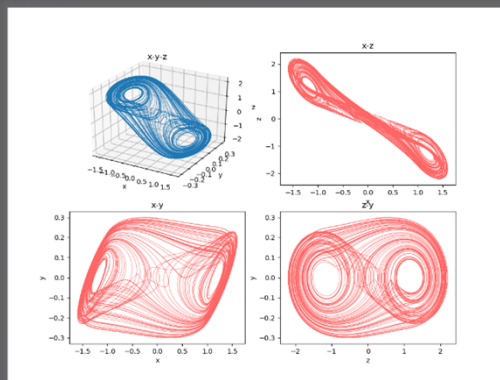


针对R的讨论——基于分形维数变化分析

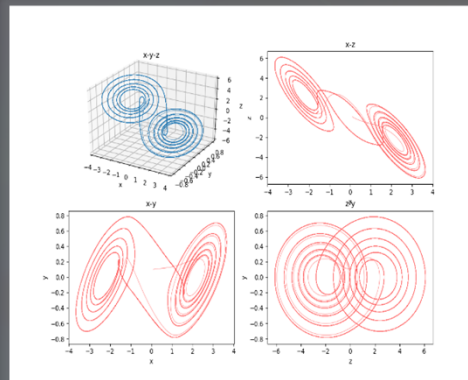
当 R 较小时，系统作增幅振荡。



当 R 增大至 $1.36k\Omega$ 时，系统进入双涡旋混沌。

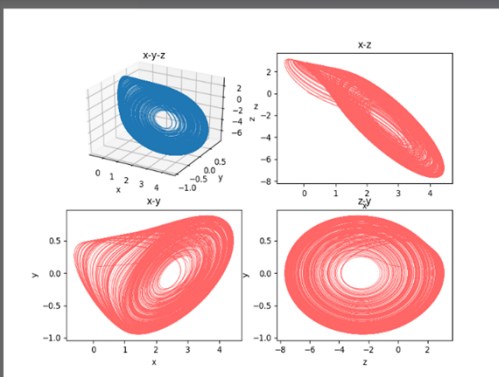


R 取特定值时，出现了周期现象。

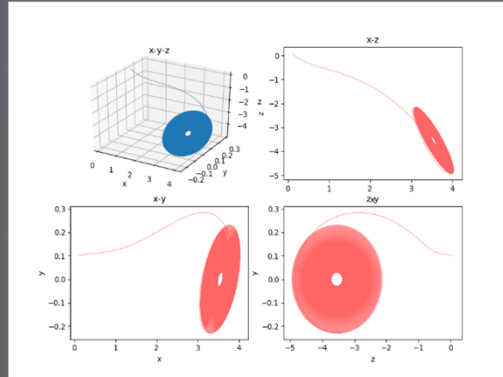


系统呈现混沌-周期-混沌-周期的演变。其中 $R=1.72k\Omega$ 时，相图上所示。

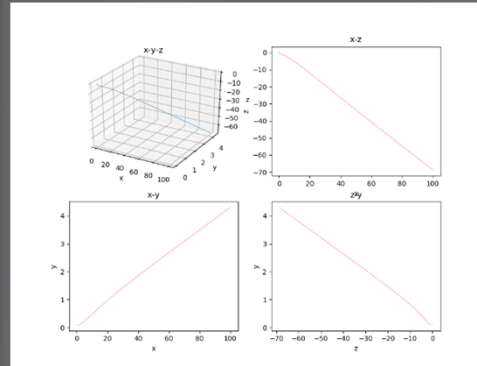
当 R 增大至 $1.81k\Omega$ 时，系统退化为单涡旋混沌。



随后单涡旋混沌结束，系统进入减幅震荡。



随 R 增大，系统无界，三个相图均退化为直线。



此处我们将只对 R 的情况进行讨论，针对其他参数的讨论请参见小论文第4章

针对R的讨论——理论分析

当R很小时，不可能出现混沌。此时 $x^* < 1$ ，这表明可能的凝聚点处于 $(-1, 1)$ 区间内。而当R十分小时，连接 C_1 与 C_2 的支路近似可看成没有电阻的导线，此时 C_1 与 C_2 并联，可以看作一个等效的电容C，其值为 $C_1 + C_2$ 。此时恒有 $x=y$ （事实上，所选择的初值也保证了这一点），则电路方程的齐次方程可以改写为（将方程中第一式与第二式相加，并令 $x=y$ ）

$$\begin{cases} 2\dot{x} = z - \alpha f(x) \\ \dot{z} = -\beta x \end{cases}$$

同样的可以得到分段地得到特征根方程：

$$2r^2 - k\alpha Rr + \beta = 0$$

其中：

$$k = \begin{cases} 0.4, |x| > 1 \\ 0.8, |x| \leq 1 \end{cases}$$

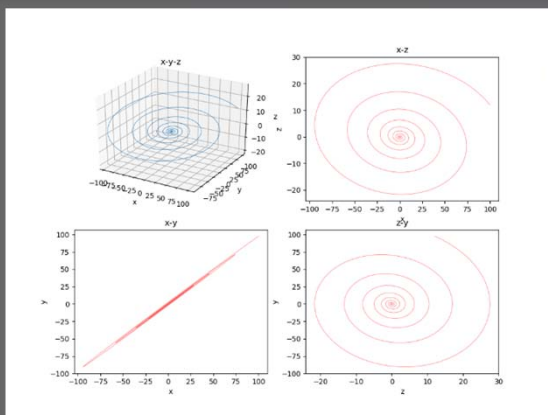
解之，马上可以得到：

$$r_{12} = \frac{k\alpha R \pm \sqrt{k^2\alpha^2 R^2 - 8\beta}}{4}$$

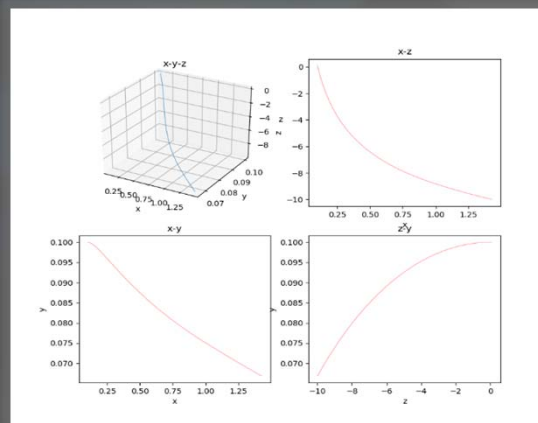
这个解的形式表明，系统是无界的。而在本文固定的参数下， $\beta \approx 6.7R^2$ ，故：

$$\begin{cases} \text{系统有两个正实根, } |x| \leq 1 \\ \text{系统有两个实部为正的共轭复根, } |x| > 1 \end{cases}$$

这表明，系统将作增幅振荡，同时，z与x间存在相位差，z的振幅比x要小。



用同样的分析方法，当R很大时，方程有一个正实根而另两个根为实部小于零的共轭复根。因此，可以推测当系统经过足够长的时间后，振荡项会趋于零，而 x, y, z 绝对值均指数增大



对于 $R=0.1k\Omega$ ，系统的相位图如下所示，其与理论预测符合得较好。

此处我们将只对R的情况进行讨论，针对其他参数的讨论请参见小论文第4章

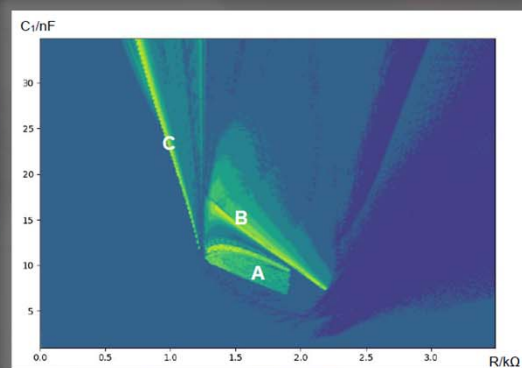


双参数变化影响

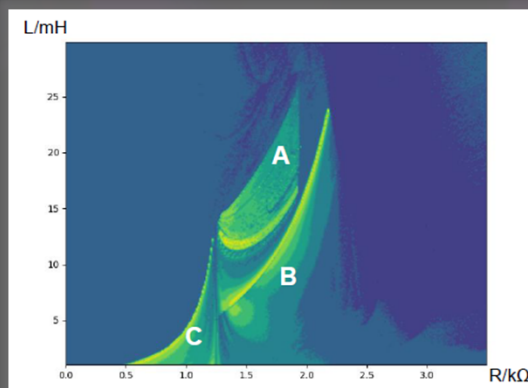
//双参数分形维数等高色图

双参数分形维数等高色图分析

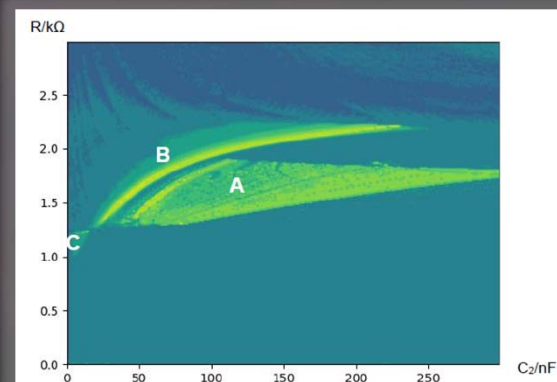
等高色图中，颜色越偏蓝表示维数值越低，反之越高。



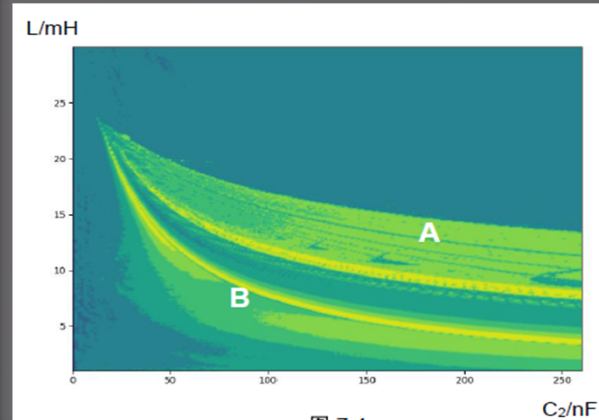
图中A区为混沌区，B区为减幅振荡区但收敛于分段②方程组的特解处，C区同为减幅振荡区，但收敛于(0,0,0)。



图中A区为混沌区，B区为减幅振荡区但收敛于分段②方程组的特解处，C区同为减幅振荡区，但收敛于(0,0,0)。



图中A区为混沌区，B区为减幅振荡区但收敛于分段②方程组的特解处，C区同为减幅振荡区，但收敛于(0,0,0)。



图中A区为混沌区，B区为减幅振荡区但收敛于分段②方程组的特解处。

同时值得注意的是，图中色带中有稀疏的偏蓝色点出现，这预示着系统在混沌与周期间不断地演化。

总结及参考文献

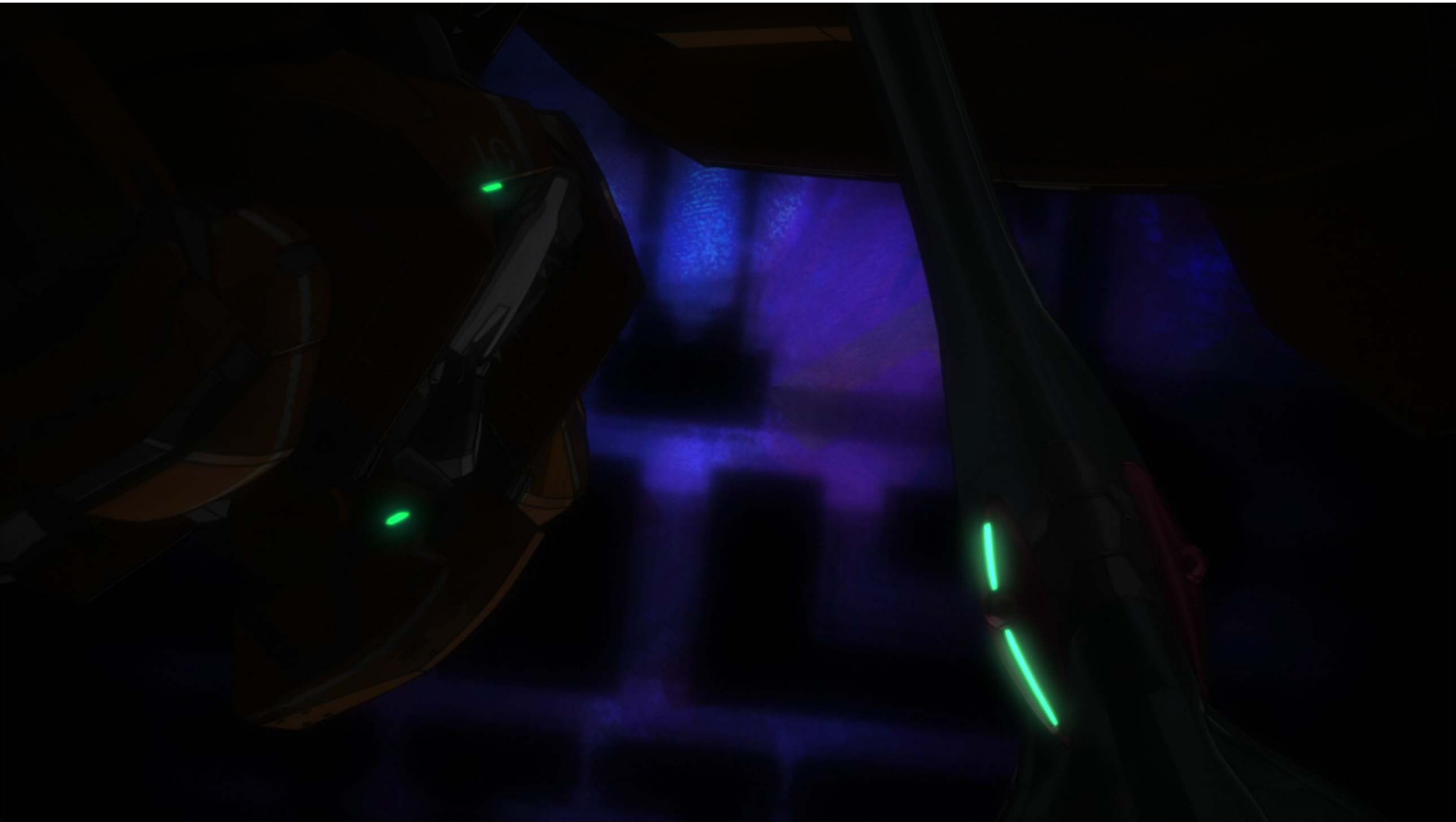
总结

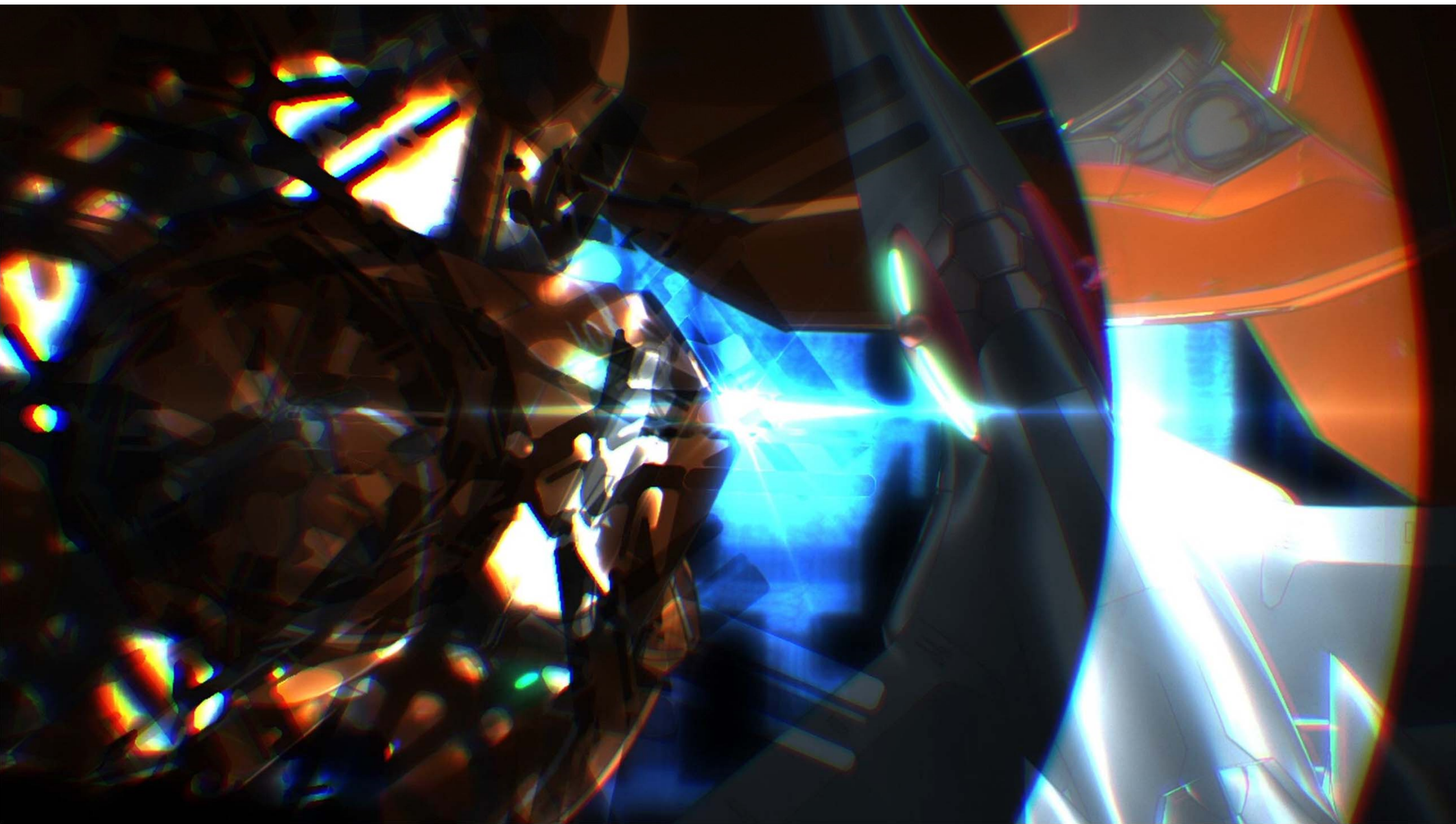
本文从一组参数值与初值出发，通过研究系统分形维数的变化分析了经典蔡氏电路系统随 R, L, C_1, C_2 的变化。这对将蔡氏电路应用于制造加密电路以及产生混沌密钥有所帮助。同时，尽管本文采用的分形维数求解方法有一定的缺陷，但它作为工具仍然能完成本文的研究需求。并且相比于求解系统的李雅普诺夫指数，柯尔莫果洛夫熵或是功率谱，其来得更加简单并具有更低的时间复杂度。本文采用的研究方法对研究其他混沌系统亦有效。值得指出的是，蔡氏电路方程式分段可求解的。对于一组特定的参数值，与初值，可以在分段边界处迭代地求出系统的运动表达式。但是在边界处解出新的初值以及计算机本身的有限精度效应仍然会带来一定的误差，然而这却仍预示着我们可以更加精确地求解系统的运动。但受限于研究时间以及本人的数理基础水平，仍有更多复杂的问题未能解决。

参考文献

- [1]韩敏．混沌时间序列预测理论与方法[M]．中国水利水电出版社，2007:42-91
- [2]朱培勇．混沌数学基础[M]．科学出版社，2016:1-13
- [3]Gangepain J, Roques-Garmes C . Fractal approach to two-dimensional and three-dimensional surface roughness[J] . Wear, 1986, 109: 119-126
- [4]赵凯华，陈熙谋．新概念物理学教程电磁学[M]．高等教育出版社，2006: 344-350
- [5]Leon O . Chua, Komyro M, Matsumoto T. The Double Scroll Family[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems,1986,33(11):1072-1118.
- [6]吕恩胜，黄双成．蔡氏电路的等效电路设计及其应用[J]．电子器件，2014，05: 891-895









Thank you!