

中国科学技术大学  
University of Science and Technology of China

## 对静电感应时间的研究及拓展

报告人：王志强

中国科学技术大学  
University of Science and Technology of China

### How did I get this idea?

- 导体内自由电荷分布以及导体内、外的电场分布不再随时间变化，我们说导体达到静电平衡。
- 达到静电平衡的过程很快，在 $10^{-14} \sim 10^{-8}$ 就能完成。
- 对于不存在非静电力、各向同性导体，达到静电平衡的条件是导体内部电场强度处处为零。

过程很快？  
先得出什么结论？  
给出的时间估值怎么得到？

中国科学技术大学  
University of Science and Technology of China

- 1 感应时间理论计算初级模型
- 2 感应时间理论计算升级模型
- 3 探究变化电场下的介电常数

中国科学技术大学  
University of Science and Technology of China

### 一. 感应时间理论计算初级模型

我们来计算处于恒定电场下某导体的情况，如图所示：

导体会在表面产生感应电荷，其电荷密度为 $\sigma'$ ，感应电荷的电场为 $\sigma'/\epsilon_0$ ，则导体内总电场 $E$ 为：

$$E = E_0 + \frac{\sigma'}{\epsilon_0}$$

中国科学技术大学  
University of Science and Technology of China

### 一. 感应时间理论计算初级模型

$$\begin{cases} E = E_0 + \frac{\sigma'}{\epsilon_0} \\ i = \frac{E}{\rho} \\ -i = \frac{d\sigma'}{dt} \end{cases} \longrightarrow \frac{d\sigma'}{dt} = -\frac{1}{\rho} (E_0 + \frac{\sigma'}{\epsilon_0})$$

最终得到： $\sigma' = -\epsilon_0 E_0 (1 - e^{-\frac{t}{\tau_M}})$

中国科学技术大学  
University of Science and Technology of China

### 一. 感应时间理论计算初级模型

面电荷密度的变化图像  $\tau_M = \rho\epsilon_0$

中国科学技术大学  
University of Science and Technology of China

一. 感应时间理论计算初级模型

在气体中,  $\rho \approx 10^6 \Omega \cdot m$ ,  $\tau_M = 10 \mu s$ ;  
 在电解质溶液中,  $\rho \approx 10^{-2} \Omega \cdot m$ ,  $\tau_M = 10^{-13} s$ ;  
 在金属中,  $\rho = 10^{-8} \Omega \cdot m$ ,  $\tau_M = 10^{-19} s$

**这些时间都非常短暂!**

■ 达到静电平衡的过程很快, 在  $10^{-16} \sim 10^{-19} s$  就能完成。

**短暂到太不合理!!!**

中国科学技术大学  
University of Science and Technology of China

一. 感应时间理论计算初级模型

对初级模型进行分析:

前面的选取的模型过于理想, 忽略了电子质量。

**因为电子有质量, 必须要考虑电子的惯性效果。**

中国科学技术大学  
University of Science and Technology of China

二. 感应时间理论计算升级模型

**因为电子有质量, 必须要考虑电子的惯性效果。**

考虑电子在电场中的运动方程, 则应有以下方程:

$$m \frac{dv}{dt} = -m\gamma v - eE$$

其中,  $e$  为电子电荷,  $m\gamma$  为由于碰撞所产生的阻尼作用力。

与感应物体的属性有关, 我们设法来用熟悉的物理量表示它。

中国科学技术大学  
University of Science and Technology of China

二. 感应时间理论计算升级模型

若在一定电场的作用下, 其中流过的是稳恒电流, 这时电子的加速度为零, 则应有:

$$v = -\frac{eE}{m\gamma}$$

用电子数密度来表示电流密度, 则有:

$$i = -env = \frac{ne^2}{m\gamma} E$$

根据欧姆定律, 推得:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{ne^2}{m\gamma} \iff \gamma = \frac{\rho ne^2}{m}$$

中国科学技术大学  
University of Science and Technology of China

二. 感应时间理论计算升级模型

$$\begin{cases} m \frac{dv}{dt} = -m\gamma v - eE \\ i = -env = \frac{ne^2}{m\gamma} E \\ E = E_0 + \frac{1}{\epsilon_0} \sigma \\ i = \frac{E}{\rho} \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{d^2 \sigma'}{dt^2} + \gamma \frac{d\sigma'}{dt} + \omega_p^2 \sigma' = -\omega_p^2 \epsilon_0 E_0 \\ \omega_p^2 = \frac{ne^2}{\epsilon_0 m} \end{cases}$$

初始条件  $t=0$  时  $\sigma'=0$ ,  $\frac{d\sigma'}{dt} = -\frac{eE_0 \omega_p^2}{\gamma}$

**问题转化带阻尼项的振动方程!!!**

中国科学技术大学  
University of Science and Technology of China

二. 感应时间理论计算升级模型

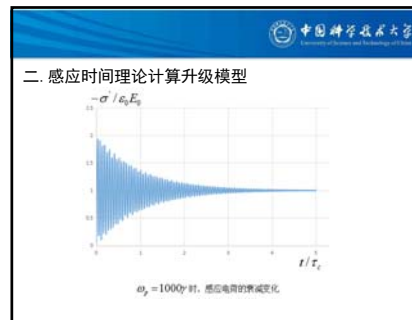
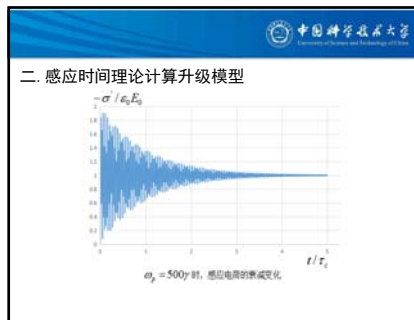
当  $\omega_p^2 > \frac{\gamma^2}{4}$  时, 即小阻尼条件下:

$$\sigma' = -\epsilon_0 E_0 + e^{-\frac{\gamma}{2} t} A \cos\left[\left(\sqrt{\omega_p^2 - \frac{\gamma^2}{4}}\right) t + \alpha\right]$$

$$A = \frac{\omega_p^2 \epsilon_0 E_0}{\sqrt{\omega_p^2 - \frac{\gamma^2}{4}}}$$

$$\tan \alpha = -\frac{\gamma}{\sqrt{4\omega_p^2 - \gamma^2}}$$

$$\tau_c = \frac{\gamma}{2}$$



中国科学技术大学  
University of Science and Technology of China

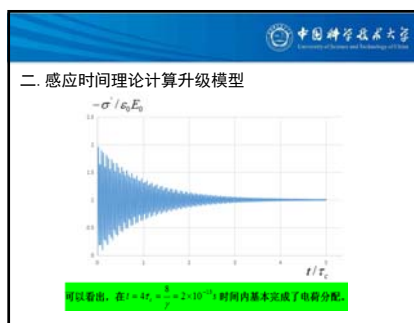
### 二. 感应时间理论计算升级模型

对于金属导体而言, 总是有  $\omega_p^2 \gg \frac{\gamma^2}{4}$ , 以铜为例:  
 每个铜原子只有一个价电子, 该价电子可在金属内部自由运动, 因此电子数密度  $n$  应与原子数密度相同, 铜摩尔质量  $\mu = 63.5g/mol$ , 密度  $\rho = 8.9g/cm^3$ , 则电子数密度  $n$  为:  

$$n = \frac{N_A \rho}{\mu} = \frac{6.02 \times 10^{23} \times 8.9 \times 10^3}{63.5 \times 10^{-3}} m^{-3} = 8.4 \times 10^{28} m^{-3}$$
  
 电子质量  $m = 9.1 \times 10^{-31}kg$ , 电子电荷  $e = 1.6 \times 10^{-19}C$ , 所以:  

$$\omega_p = \sqrt{\frac{n e^2}{\epsilon_0 m}} = \sqrt{\frac{8.4 \times 10^{28} \times (1.6 \times 10^{-19})^2}{9.1 \times 10^{-31} \times 8.85 \times 10^{-12}}} = 1.6 \times 10^{16} s^{-1}$$
  
 20℃时铜的电阻率为  $\rho = 1.7 \times 10^{-8} \Omega \cdot m$ , 有 (1.11) 式可得:  

$$\gamma = \frac{m \rho^2}{m} = 4.0 \times 10^{15} s^{-1}$$



中国科学技术大学  
University of Science and Technology of China

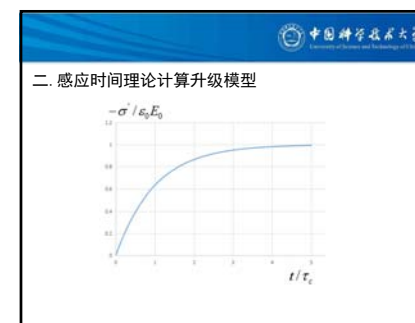
### 二. 感应时间理论计算升级模型

当  $\omega_p^2 < \frac{\gamma^2}{4}$ , 即大阻尼条件下:

$$\sigma' = -\epsilon_0 E_0 + A e^{-\frac{\gamma}{2} \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_p^2} t} + B e^{-\frac{\gamma}{2} \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_p^2} t}$$

↓

$$\sigma' = \frac{\epsilon_0 E_0}{2} \left( \left( 1 + \frac{2\omega_p^2 + \gamma^2}{\gamma \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_p^2}} \right) e^{-\frac{\gamma}{2} \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_p^2} t} + \left( 1 - \frac{2\omega_p^2 + \gamma^2}{\gamma \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_p^2}} \right) e^{-\frac{\gamma}{2} \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_p^2} t} - 2 \right)$$



中国科学院大学  
University of Science and Technology of China

### 二. 感应时间理论计算升级模型

对于电离气体而言, 总是有  $\omega_p^2 \ll \omega^2$

由于没有合适的参数, 在这里仅作定性分析

$$\sigma = \frac{e_0 E_0}{2} \left\{ \left(1 + \frac{2\omega_p^2 + \gamma^2}{\gamma^2} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}\right)^{1/2} + \left(1 - \frac{2\omega_p^2 + \gamma^2}{\gamma^2} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}\right)^{1/2} - 2 \right\}$$

在满足  $\omega_p^2 \ll \omega^2$  的条件下,  $\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$  会很快衰减掉, 剩下一项:

$$\sigma \approx \frac{e_0 E_0}{2} \left( \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \frac{\gamma^2}{\omega^2} \right)$$

$\tau_p$  给出了衰减过程的特征项, 和不考虑电子惯性效果的特征项一致, 但  $\sigma(t)$  确存在较大差异, 这说明考虑电子的惯性效果是必须的。

中国科学院大学  
University of Science and Technology of China

### 二. 感应时间理论计算升级模型

当  $\omega_p^2 = \frac{\omega^2}{4}$ , 即临界阻尼条件下:  $\sigma' = -\epsilon_0 E_0 + e^{-\frac{\gamma}{2}t} \left( \epsilon_0 E_0 - \frac{\epsilon_0 E_0}{4} \gamma t \right)$

中国科学院大学  
University of Science and Technology of China

### 三. 探究变化电场下的“介电常数”

前面的方法, 也可应用于变化电场中的电感应分析。  
复杂的电场变化函数可以通过傅里叶级数展开写出一系列弦函数的叠加, 分析简单弦函数变化下的电场便具有一般意义。

由于在金属中  $\omega_p \gg \gamma$ , 为简单运算, 可忽略  $\gamma$  项。  
不妨假设外电场的振幅为  $E_0$ , 角频率为  $\omega$ , 则前式改写为:

$$\frac{d^2 \sigma'}{dt^2} + \omega_p^2 \sigma' = -\omega_p^2 \epsilon_0 E_0 \cos \omega t$$

中国科学院大学  
University of Science and Technology of China

### 三. 探究变化电场下的“介电常数”

**稳态解:**  $\sigma' = \frac{\epsilon_0 \omega_p^2}{\omega^2 - \omega_p^2} E_0 \cos \omega t$  → 金属表面感应电荷周期性变化!

当  $\omega = 0$  时,  $\sigma' = -\epsilon_0 E_0$  对外电场完全屏蔽;

当  $\omega \neq 0$  时,  $\sigma'$  周期性变化, 金属内部电场为:

$$E = E_0 \cos \omega t + \frac{1}{\epsilon_0} \sigma' = \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_p^2} E_0 \cos \omega t$$

可以看出, 金属在变化电场下不能发生静电屏蔽!

中国科学院大学  
University of Science and Technology of China

### 三. 探究变化电场下的“介电常数”

感应电荷:  $\sigma' = \frac{\epsilon_0 \omega_p^2}{\omega^2 - \omega_p^2} E_0$   $E_t = E_0 \cos \omega t$

极化电荷:  $\sigma_p = p = \frac{\epsilon_0 \chi_e}{1 + \chi_e} E_t$

金属的感应电荷表达式与电介质极化电荷表达式具有相同形式, 这说明他们有着相似的性质! → 带来了一些有趣的东西!

中国科学院大学  
University of Science and Technology of China

### 三. 探究变化电场下的“介电常数”

接下来, 将根据相似性质定义金属“介电常数”

$\sigma_p = p = \frac{\epsilon_0 \chi_e}{1 + \chi_e} E_t$  代入到金属  $\frac{\epsilon_0 \chi_e(\omega)}{1 + \chi_e(\omega)} = -\frac{\epsilon_0 \omega_p^2}{\omega^2 - \omega_p^2}$

极化率  $\chi_e(\omega)$   $\chi_e(\omega) = -\frac{\omega_p^2}{\omega^2}$

“介电常数”  $\epsilon(\omega)$ :  $\epsilon(\omega) = \epsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)$

中国科学技术大学  
University of Science and Technology of China

### 三. 探究变化电场下的“介电常数”

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)$$

讨论:  
当 $\omega \rightarrow 0$ 时,  $\epsilon(\omega) \rightarrow \infty$ !  
这就是通常认为导体在静电感应中介电常数为 $\infty$ 的物理意义的解答。  
若 $\omega = 0$ 时, 感应电荷与极化电荷性质相似, 不能把外场抵消掉。

查阅资料发现: 金属的介电常数确实随外界  
电场频率变化!!

中国科学技术大学  
University of Science and Technology of China

THANK YOU!