

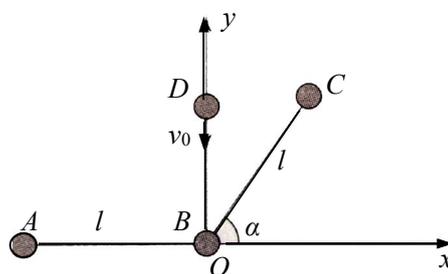
第 24 届全国中学生物理竞赛决赛试题

2007 年 11 月 宁波

★ 理论部分

一、

A, B, C 三个刚性小球静止在光滑的水平面上. 它们的质量皆为 m , 用不可伸长的长度皆为 l 的柔软轻线相连, AB 的延长线与 BC 的夹角 $\alpha = \pi/3$, 如图 1 所示. 在此平面内取正交坐标系 Oxy , 原点 O 与 B 球所在处重合, x 轴正方向和 y 轴正方向如图. 另一质量也是 m 的刚性小球 D 位于 y 轴



上, 沿 y 轴负方向以速度 v_0 (如图) 与 B 球发生弹性正碰, 碰撞时间极短. 设刚碰完后, 连接 A, B, C 的连线都立即断了. 求碰后经多少时间, D 球距 A, B, C 三球组成的系统的质心最近.

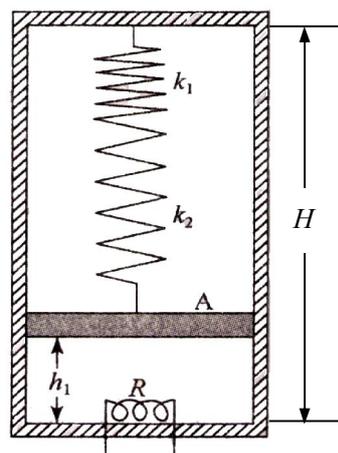
二、

为了近距离探测太阳并让探测器能回到地球附近, 可发射一艘以椭圆轨道绕太阳运行的携带探测器的宇宙飞船, 要求其轨道与地球绕太阳的运动轨道在同一平面内, 轨道的近日点到太阳的距离为 0.01AU (AU 为距离的天文单位, 表示太阳和地球之间的平均距离: $1\text{AU} = 1.495 \times 10^{11} \text{m}$), 并与地球具有相同的绕日运行周期 (为简单计, 设地球以圆轨道绕太阳运动). 试问从地球表面应以多大的相对于地球的发射速度 u_0 (发射速度是指在关闭火箭发动机, 停止对飞船加速时飞船的速度) 发射此飞船, 才能使飞船在克服地球引力作用后仍在地球绕太阳运行轨道附近 (也就是说克服了地球引力作用的飞船仍可看做在地球轨道上) 进入符合要求的椭圆轨道绕日运行? 已知地球半径 $R_e = 6.37 \times 10^6 \text{m}$, 地面处的重力加速度 $g = 9.80 \text{m/s}^2$, 不考虑空气的阻力.

三、

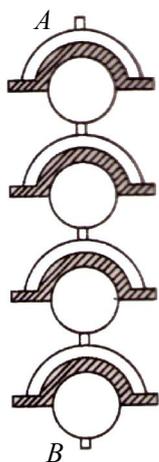
如图 2 所示, 在一个竖直放置的封闭的高为 H 、内壁横截面积为 S 的绝热气缸内, 有一质量为 m 的绝热活塞 A 把缸内分成上、下两部分. 活塞可在缸内贴缸壁无摩擦地上下滑动. 缸内顶部与 A 之间串联着两个劲度系数分别为 k_1 和 k_2 ($k_1 \neq k_2$) 的轻质弹簧. A 的上方为真空;

A 的下方盛有一定质量的理想气体. 已知系统处于平衡状态, A 所在处的高度 (其下表面与缸内底部的距离) 与两弹簧总共的压缩量相等皆为 $h_1 = H/4$. 现给电炉丝 R 通电流对气体加热, 使 A 从高度 h_1 开始上升, 停止加热后系统达到平衡时活塞的高度为 $h_2 = 3H/4$. 求此过程中气体吸收的热量 ΔQ . 已知当体积不变时, 每摩尔该气体温度每升高 1 K 吸收的热量为 $3R/2$, R 为普适气体恒量. 在整个过程中假设弹簧始终遵从胡克定律.

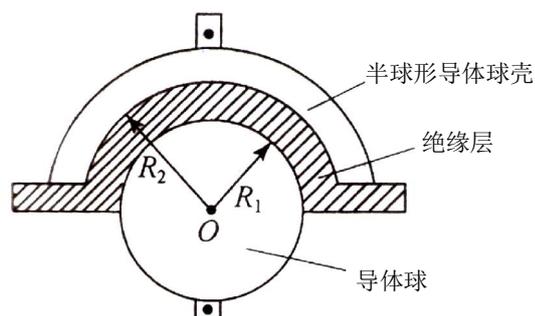


四、

为了减少线路的输电损耗, 电力的远距离输送一般采用高电压的交流电传输方式. 在输电线路路上建造一系列接地的铁塔, 把若干绝缘子连成串 (称为绝缘子串, 见图甲), 其上端 A 挂在铁塔的横臂上, 高压输电线悬挂在其下端 B . 绝缘子的结构如图乙所示: 在半径为 R_1 的导体球外紧包一层耐高压的半球形陶瓷绝缘介质, 介质外是一内半径为 R_2 的半球形导体球壳. 已知当导体球与导体球壳间的电压为 U 时, 介质中离球心 O 的距离为 r 处的场强为 $E = \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \frac{U}{r^2}$, 场强方向沿径向.



图甲



图乙

1. 已知绝缘子导体球壳的内半径 $R_2 = 4.6\text{ cm}$, 陶瓷介质的击穿强度 $E_k = 135\text{ kV/cm}$. 当介质中任一点的场强 $E > E_k$ 时, 介质即被击穿, 失去绝缘性能. 为使绝缘子所能承受的电压 (即加在绝缘子的导体球和导体球壳间的电压) 为最大, 导体球的半径 R_1 应取什

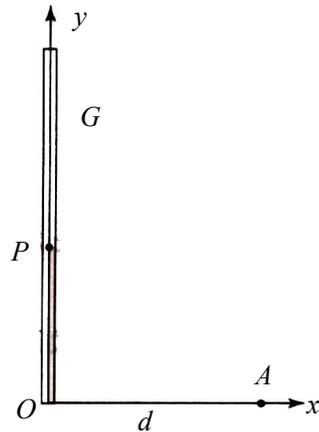
么数值？此时，对应的交流电压的有效值是多少？

2. 一个铁塔下挂有由四个绝缘子组成的绝缘子串（如图甲），每个绝缘子的两导体间有电容 C_0 。每个绝缘子的下部导体（即导体球）对于铁塔（即对地）有分布电容 C_1 （导体球与铁塔相当于电容器的两个导体极板，它们之间有一定的电容，这种电容称为分布电容）；每个绝缘子的上部导体（即导体球壳）对高压输电线有分布电容 C_2 。若高压输电线对地电压的有效值为 U_0 。试画出该系统等效电路图。

3. 若 $C_0 = 70 \text{ pF} = 7 \times 10^{-11} \text{ F}$ ， $C_1 = 5 \text{ pF}$ ， $C_2 = 1 \text{ pF}$ ，试计算该系统所能承受的最大电压（指有效值）。

五、

如图 1 所示， G 为一竖直放置的细长玻璃管，以其底端 O 为原点，建立一直角坐标系 Oxy ， y 轴与玻璃管的轴线重合。在 x 轴上与原点 O 的距离为 d 处固定放置一电荷量为 Q 的正点电荷 A ，一个电荷量为 q ($q > 0$) 的粒子 P 位于管内，可沿 y 轴无摩擦地运动。设两电荷之间的库仑相互作用力不受玻璃管的影响。



1. 求放在管内的带电粒子 P 的质量 m 满足什么条件时，可以在 $y > 0$ 的区域内存在平衡位置。

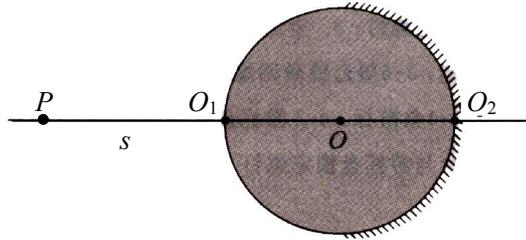
2. 上述平衡状态可以是稳定的，也可能是不稳定的；它依赖于粒子的质量 m 。以 $y(m)$ 表示质量为 m 的粒子 P 处于平衡位置时的 y 坐标。当粒子 P 处于稳定平衡状态时， $y(m)$ 的取值区间是_____；当粒子 P 处于不稳定平衡状态时， $y(m)$ 的取值区间是_____（请将填空答案写在答题纸上）。

3. 已知质量为 m_1 的粒子 P 处于稳定平衡位置，其 y 坐标为 y_1 。现给 P 沿 y 轴一微小扰动。试证明以后的运动为简谐运动，并求此简谐运动的周期。

4. 已知质量为 m_2 的粒子 P 的不稳定平衡位置的 y 坐标为 y_2 ，现设想把 P 放在坐标 y_3 处，然后从静止开始释放 P 。求释放后 P 能到达玻璃管底部的所有可能的 y_3 （只要列出 y_3 满足的关系式，不必求解）。

六、

如图 6-1 所示，一半径为 R 、折射率为 n_g 的透明球体置于折射率 $n_0=1$ 的空气中，其球心位于图中光轴的 O 处，左、右球面与光轴的交点为 O_1 与 O_2 。球体右半球面为一球面反射镜，组成球形反射器。

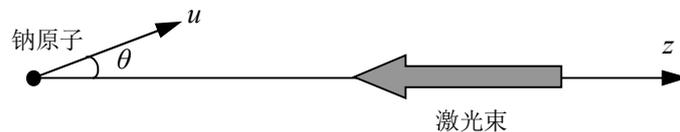


光轴上 O_1 点左侧有一发光物点 P ， P 点到球面顶点 O_1 的距离为 s 。由 P 点发出的光线满足傍轴条件，不考虑在折射面上发生的反射。

1. 问发光物点 P 经此反射器，最后的像点位于何处？
2. 当 P 点沿光轴以大小为 v 的速度由左向右匀速运动时，试问最后的像点将以怎样的速度运动？并说明当球体的折射率 n_g 取何值时像点亦做匀速运动。

七、

已知钠原子从激发态（记做 $P_{3/2}$ ）跃迁到基态（记做 $S_{1/2}$ ）所发出的光谱线波长 $\lambda_0 = 588.9965 \text{ nm}$ 。现有一团钠原子气，其中的钠原子做无规的热运动（钠原子的运动不必考虑相对论效应），被一束沿 z 轴负方向传播的波长为 $\lambda = 589.0080 \text{ nm}$ 的激光照射。以 θ 表示钠原子运动方向与 z 轴正方向之间的夹角（如图 7-1 所示）。问在 $30^\circ < \theta < 45^\circ$ 角度区间内的钠原子中速率 u 在什么范围内能产生共振吸收，从 $S_{1/2}$ 态激发到 $P_{3/2}$ 态？并求共振吸收前后钠原子速度（矢量）变化的大小。已知钠原子质量为 $M = 3.79 \times 10^{-26} \text{ kg}$ ，普朗克常量 $h = 6.626069 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ ，真空中的光速 $c = 2.997925 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ 。

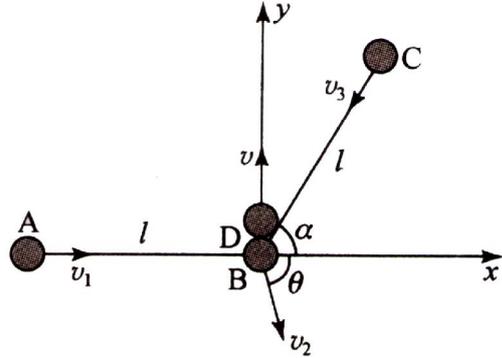


第 24 届全国中学生物理竞赛决赛参考解答

一、

1. 分析刚碰后各球速度的方向. 由于 D 与 B 球发生弹性正碰, 所以碰后 D 球的速度方向仍在 y 轴上; 设其方向沿 y 轴正方向,

大小为 v . 由于线不可伸长, 所以在 D, B 两球相碰的过程中, A, C 两球都将受到线给它们的冲量; 又由于线是柔软的, 线对 A, C 两球均无垂直于线方向的作用力, 因此刚碰后, A 球的速度沿 AB 方向, C 球的速度沿 CB 方向. 用 θ 表示 B 球的速度方向与 x 轴的



夹角, 则各球速度方向将如图所示. 因为此时连接 A, B, C 三球的两根线立即断了, 所以此后各球将做匀速直线运动.

2. 研究碰撞后各球速度的大小. 以 v_1, v_2, v_3 分别表示刚碰后 A, B, C 三球速度的大小, 如图所示. 因为碰撞过程中动量守恒, 所以沿 x 方向有

$$mv_1 - mv_3 \cos \alpha + mv_2 \cos \theta = 0 ; \quad (1)$$

沿 y 方向有

$$-mv_0 = mv - mv_2 \sin \theta - mv_3 \sin \alpha . \quad (2)$$

根据能量守恒有

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}mv_3^2 + \frac{1}{2}mv^2 . \quad (3)$$

因为碰撞过程中线不可伸长, B, C 两球沿 BC 方向的速度分量相等, A, B 两球沿 AB 方向的速度分量相等, 有

$$v_2 \cos \theta = v_1 , \quad (4)$$

$$v_2 \cos [\pi - (\alpha + \theta)] = v_3 . \quad (5)$$

将 $\alpha = \pi/3$ 代入, 由以上各式可解得

$$v_1 = \frac{\sqrt{3}}{12}v_0 , \quad (6)$$

$$v_2 = \frac{\sqrt{21}}{6}v_0 , \quad (7)$$

$$v_3 = \frac{\sqrt{3}}{3}v_0 , \quad (8)$$

$$v = \frac{1}{4}v_0 . \quad (9)$$

3. 确定刚碰完后, A , B , C 三球组成的系统质心的位置和速度. 由于碰撞时间极短, 刚碰后 A , B , C 三球组成的系统, 其质心位置就是碰撞前质心的位置, 以 (x_c, y_c) 表示此时质心的坐标, 根据质心的定义, 有

$$x_c = \frac{ml \cos\alpha - ml}{3m} , \quad (10)$$

$$y_c = \frac{ml \sin\alpha}{3m} . \quad (11)$$

代入数据, 得

$$x_c = -\frac{1}{6}l , \quad (12)$$

$$y_c = \frac{\sqrt{3}}{6}l . \quad (13)$$

根据质心速度的定义, 可求得碰后质心速度 v_c 的分量为

$$v_{cx} = \frac{mv_1 + mv_2 \cos\theta - mv_3 \cos\alpha}{3m} , \quad (14)$$

$$v_{cy} = \frac{-mv_2 \sin\theta - mv_3 \sin\alpha}{3m} . \quad (15)$$

由 (4) ~ (7) 和 (14), (15) 各式及 α 值可得

$$v_{cx} = 0 , \quad (16)$$

$$v_{cy} = -\frac{5}{12}v_0 . \quad (17)$$

4. 讨论碰后 A , B , C 三球组成的系统的质心和 D 球的运动. 刚碰后 A , B , C 三球组成的系统的质心将从坐标 $(x_c = -l/6, y_c = \sqrt{3}l/6)$ 处出发, 沿 y 轴负方向以大小为 $5v_0/12$ 的速度做匀速直线运动; 而 D 球则从坐标原点 O 出发, 沿 y 轴正方向以大小为 $v_0/4$ 的速度做匀速直线运动. A , B , C 三球组成系统的质心与 D 球是平行反向运动, 只要 D 球与 C 球不发生碰撞, 则 v_c, v_D 不变, 质心与 D 球之间的距离逐渐减少. 到 y 坐标相同处时, 它们相距最近. 用 t 表示所求的时间, 则有

$$vt = y_c + v_{cy}t \quad (18)$$

将 v_{cy}, v, y_c 的值代入, 得

$$t = \frac{\sqrt{3}l}{4v_0} . \quad (19)$$

此时, D 球与 A, B, C 三球组成系统的质心两者相距 $l/6$. 在求出 (19) 式的过程中, 假设了在 $t = \sqrt{3}l/4v_0$ 时间内 C 球未与 D 球发生碰撞. 下面说明此假设是正确的; 因为 $v_3 = \sqrt{3}v_0/3$, 它在 x 方向分量的大小为 $\sqrt{3}v_0/6$. 经过 t 时间, 它沿 x 轴负方向经

过的距离为 $l/8$. 而 C 球的起始位置的 x 坐标为 $l/2$. 经 t 时间后, C 球尚未到达 y 轴, 不会与 D 球相碰.

二、

从地球表面发射宇宙飞船时, 必须给飞船以足够大的动能, 使它在克服地球引力作用后, 仍具有合适的速度进入绕太阳运行的椭圆轨道. 此时, 飞船离地球已足够远, 但到太阳的距离可视为不变, 仍为日地距离. 飞船在地球绕太阳运动的轨道上进入它的椭圆轨道, 用 E 表示两轨道的交点, 如图 1 所示. 图中半径为 r_{se} 的圆 A 是地球绕太阳运行的轨道, 太阳 S 位于圆心. 设椭圆 B 是飞船绕日运行的轨道, P 为椭圆轨道的近日点.

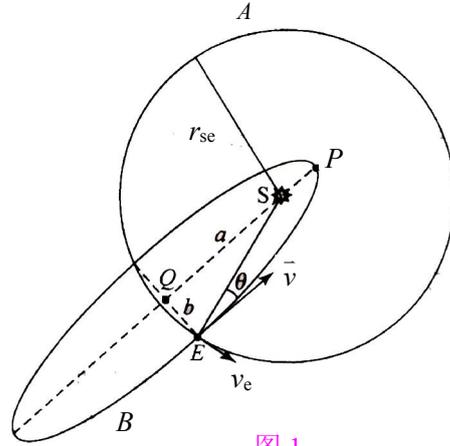


图 1

由于飞船绕日运行的周期与地球绕日运行的周期相等, 根据开普勒第三定律, 椭圆的半长轴 a 应与日地距离 r_{se} 相等, 即有

$$a = r_{se} \quad (1)$$

根据椭圆的性质, 轨道上任一点到椭圆两焦点的距离之和为 $2a$, 由此可以断定, 两轨道的交点 E 必为椭圆短轴的一个顶点, E 与椭圆长轴和短轴的交点 Q (即椭圆的中心) 的连线垂直于椭圆的长轴. 由 $\triangle ESQ$, 可以求出半短轴

$$b = \sqrt{r_{se}^2 - (a - \overline{SP})^2} . \quad (2)$$

由 (1), (2) 两式, 并将 $a = r_{se} = 1\text{AU}$, $\overline{SP} = 0.01\text{AU}$ 代入, 得

$$b = 0.141\text{AU} . \quad (3)$$

在飞船以椭圆轨道绕太阳运行过程中, 若以太阳为参考系, 飞船的角动量和机械能是守恒的. 设飞船在 E 点的速度为 v , 在近日点的速度为 v_p , 飞船的质量为 m , 太阳的质量为 M_s , 则有

$$mva \sin\theta = mv_p \overline{SP} , \quad (4)$$

式中 θ 为速度 v 的方向与 E , S 两点连线间的夹角:

$$\sin\theta = \frac{b}{a} . \quad (5)$$

由机械能守恒, 得

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M_s m}{a} = \frac{1}{2}mv_p^2 - \frac{GmM_s}{SP}. \quad (6)$$

因地球绕太阳运行的周期 T 是已知的 ($T = 365 \text{ d}$), 若地球的质量为 M_e , 则有

$$G\frac{M_s M_e}{a^2} = M_e \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a. \quad (7)$$

解 (3) ~ (7) 式, 并代入有关数据, 得

$$v = 29.8 \text{ km/s}. \quad (8)$$

(8) 式给出的 v 是飞船在 E 点相对于太阳的速度的大小, 即飞船在克服地球引力作用后从 E 点进入椭圆轨道时所必须具有的相对于太阳的速度. 若在 E 点飞船相对地球的速度为 u , 因地球相对于太阳的公转速度为

$$v_e = \frac{2\pi a}{T} = 29.8 \text{ km/s}, \quad (9)$$

方向如图 1 所示. 由速度合成公式, 可知

$$v = u + v_e, \quad (10)$$

速度合成的矢量图如图 2 所示, 注意到 v_e 与 \overline{ES} 垂直, 有

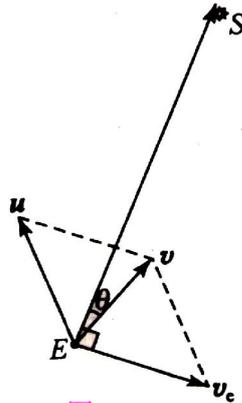


图 2

$$u = \sqrt{v^2 + v_e^2 - 2vv_e \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}, \quad (11)$$

代入数据, 得

$$u = 39.1 \text{ km/s}. \quad (12)$$

u 是飞船在 E 点相对于地球的速度, 但不是所要求的发射速度 u_0 . 为了求得 u_0 , 可以从与地心固定连接在一起的参考系来考察飞船的运动. 因飞船相对于地球的发射速度为 u_0 时, 飞船离地心的距离等于地球半径 R_e . 当飞船相对于地球的速度为 u 时, 地球引力作用可以忽略. 由能量守恒, 有

$$\frac{1}{2}mu_0^2 - G\frac{M_em}{R_e} = \frac{1}{2}mu^2 . \quad (13)$$

地面处的重力加速度为

$$g = G\frac{M_e}{R_e^2} , \quad (14)$$

解 (13), (14) 两式, 得

$$u_0 = \sqrt{u^2 + 2gR_e} . \quad (15)$$

由 (15) 式及有关数据, 得

$$u_0 = 40.7 \text{ km/s} . \quad (16)$$

如果飞船在 E 点处以与图示相反的方向进入椭圆轨道, 则 (11) 式要做相应的改变. 此时, 它应为

$$u = \sqrt{v^2 + v_e^2 - 2vv_e \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)} , \quad (17)$$

相应计算, 可得另一解

$$u = 45.0 \text{ km/s} , \quad u_0 = 46.4 \text{ km/s} . \quad (18)$$

如果飞船进入椭圆轨道的地点改在 E 点的对称点处 (即地球绕日轨道与飞船绕日轨道的另一个交点上), 则计算过程相同, 结果不变.

三、

两个弹簧串联时, 作为一个弹簧来看, 其劲度系数

$$k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} . \quad (1)$$

设活塞 A 下面有 $\nu \text{ mol}$ 气体. 当 A 的高度为 h_1 时, 气体的压强为 p_1 , 温度为 T_1 . 由理想气体状态方程和平衡条件, 可知

$$p_1 S h_1 = \nu R T_1 , \quad (2)$$

$$p_1 S = k h_1 + m g . \quad (3)$$

对气体加热后, 当 A 的高度为 h_2 时, 设气体压强为 p_2 , 温度为 T_2 . 由理想气体状态方程和平衡条件, 可知

$$p_2 S h_2 = \nu R T_2 , \quad (4)$$

$$p_2 S = k h_2 + m g . \quad (5)$$

在 A 从高度 h_1 上升到 h_2 的过程中, 气体内能的增量

$$\Delta U = \nu \frac{3}{2} R (T_2 - T_1) . \quad (6)$$

气体对弹簧、活塞系统做的功 W 等于弹簧弹性势能的增加和活塞重力势能的增加, 即

$$W = \frac{1}{2}k(h_2^2 - h_1^2) + mg(h_2 - h_1) . \quad (7)$$

根据热力学第一定律, 有

$$\Delta Q = \Delta U + W . \quad (8)$$

由以上各式及已知数据可求得

$$\Delta Q = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} H^2 + \frac{5}{4} mgH . \quad (9)$$

四、

1. 根据题意, 当导体球与导体球壳间的电压为 U 时, 在距球心 r ($R_1 < r < R_2$) 处, 电场强度的大小为

$$E = \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \frac{U}{r^2} . \quad (1)$$

在 $r = R_1$, 即导体球表面处, 电场强度最大. 以 $E(R_1)$ 表示此场强, 有

$$E(R_1) = \frac{R_2 U}{(R_2 - R_1) R_1} . \quad (2)$$

因为根据题意, $E(R_1)$ 的最大值不得超过 E_k , R_2 为已知, 故 (2) 式可写为

$$E_k = \frac{R_2 U}{(R_2 - R_1) R_1} \quad (3)$$

或

$$U = E_k \frac{(R_2 - R_1) R_1}{R_2} . \quad (4)$$

由此可知, 选择适当的 R_1 值, 使 $(R_2 - R_1) R_1$ 最大, 就可使绝缘子的耐压 U 为最大. 不难看出, 当

$$R_1 = \frac{R_2}{2} \quad (5)$$

时, U 便是绝缘子能承受的电压的最大值 U_k . 由 (4), (5) 两式得

$$U_k = \frac{E_k R_2}{4} , \quad (6)$$

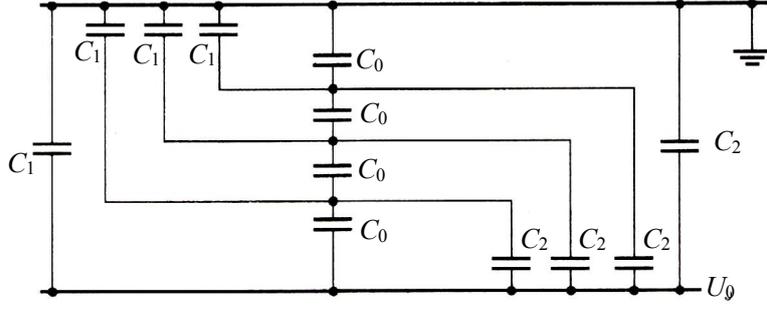
代入有关数据, 得

$$U_k = 155 \text{ kV} . \quad (7)$$

当交流电压的峰值等于 U_k 时, 绝缘介质即被击穿. 这时, 对应的交流电压的有效值

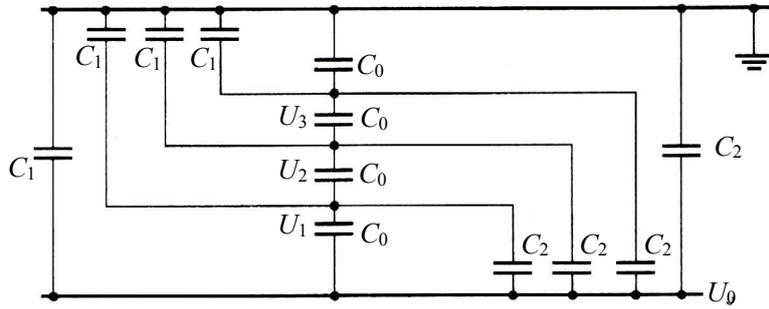
$$U_e = \frac{U_k}{\sqrt{2}} = 110 \text{ kV} . \quad (8)$$

2. 系统的等效电路如图 10-10 所示.



3. 设绝缘子串中间三点的电势分别为 U_1 , U_2 , U_3 , 如图所示. 由等效电路可知, 与每个中间点相连的四块电容极板上的电荷量代数和都应为零, 即有

$$\begin{cases} (U_1 - U_2)C_0 + U_1C_1 - (U_0 - U_1)C_0 - (U_0 - U_1)C_2 = 0, \\ (U_2 - U_3)C_0 + U_2C_1 - (U_1 - U_2)C_0 - (U_0 - U_2)C_2 = 0, \\ U_3C_0 + U_3C_1 - (U_2 - U_3)C_0 - (U_0 - U_3)C_2 = 0. \end{cases} \quad (9)$$



四个绝缘子上的电压之和应等于 U_0 , 即

$$(U_0 - U_1) + (U_1 - U_2) + (U_2 - U_3) + U_3 = U_0. \quad (10)$$

设

$$\Delta U_1 = U_0 - U_1, \quad \Delta U_2 = U_1 - U_2, \quad \Delta U_3 = U_2 - U_3, \quad \Delta U_4 = U_3, \quad (11)$$

则可由 (9) 式整理得

$$\begin{cases} \Delta U_1(C_0 + C_1 + C_2) - \Delta U_2C_0 - U_0C_1 = 0, \\ \Delta U_1(C_1 + C_2) + \Delta U_2(C_0 + C_1 + C_2) - \Delta U_3C_0 - U_0C_1 = 0, \\ \Delta U_1(C_0 + C_1 + C_2) + \Delta U_2(C_0 + C_1 + C_2) + \Delta U_3(2C_0 + C_1 + C_2) - U_0(C_0 + C_1) = 0; \end{cases}$$

代入数据, 得

$$\begin{cases} 76\Delta U_1 - 70\Delta U_2 - 5U_0 = 0, \\ 6\Delta U_1 + 76\Delta U_2 - 70\Delta U_3 - 5U_0 = 0, \\ 76\Delta U_1 + 76\Delta U_2 + 146\Delta U_3 - 75U_0 = 0. \end{cases} \quad (12)$$

解 (12) 式, 可得

$$\Delta U_1 = 0.298 U_0, \quad \Delta U_2 = 0.252 U_0, \quad \Delta U_3 = 0.228 U_0. \quad (13)$$

由 (10) ~ (12) 式可得

$$\Delta U_4 = U_3 = 0.222 U_0 . \quad (14)$$

以上结果表明, 各个绝缘子承受的电压不是均匀的; 最靠近输电线的绝缘子承受的电压最大, 此绝缘子最容易被击穿. 当最靠近输电线的绝缘子承受的电压有效值

$$\Delta U_1 = U_e \quad (15)$$

时, 此绝缘子被击穿, 整个绝缘子串损坏. 由 (8), (13) 和 (15) 三式可知, 绝缘子串承受的最大电压

$$U_{0\max} = \frac{U_e}{0.298} = 369 \text{ kV} . \quad (16)$$

五、

1. 如图 1 所示, 位于坐标 y 处的带电粒子 P 受到库仑力 F_E 为斥力, 其 y 分量为

$$F_{Ey} = k \frac{Qq}{r^2} \sin\theta = k \frac{Qqy}{(d^2 + y^2)^{3/2}} , \quad (1)$$

式中 r 为 P 到 A 的距离, θ 为 r 与 x 轴的夹角. 可以看出, F_{Ey} 与 y 有关: 当 y 较小时, (1) 式分子中的 y 起主要作用, F_{Ey} 随 y 的增大而增大; 当 y 较大时, (1) 式分母中的 y 起主要作用, F_{Ey} 随 y 的增大而减小. 可见,

F_{Ey} 在随 y 由小变大的过程中会出现一个极大值. 通过数值算法, 可求得 F_{Ey} 随 y 变化的情况. 令 $\tau = y/d$, 得

$$F_{Ey} = k \frac{Qq}{d^2} \frac{\tau}{(1 + \tau^2)^{3/2}} . \quad (2)$$

当 τ 取不同数值时, 对应的 $\tau(1 + \tau^2)^{-3/2}$ 的值不同. 经数值计算, 整理出的数据如表 1 所示.

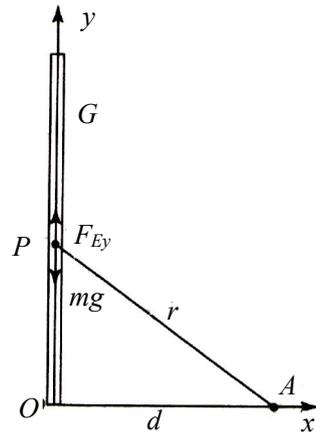
表 1

τ	0.100	0.500	0.600	0.650	0.700	0.707	0.710	0.750	0.800
$\tau(1 + \tau^2)^{-3/2}$	0.0985	0.356	0.378	0.382	0.385	0.385	0.385	0.384	0.381

由表中的数据可知, 当 $\tau = 0.707$, 即

$$y = y_0 = 0.707d \quad (3)$$

时, 库仑力的 y 分量有极大值, 此极大值为



$$F_{Ey\max} = 0.385k \frac{qQ}{d^2} . \quad (4)$$

由于带电粒子 P 在竖直方向除了受到竖直向上的 F_{Ey} 作用外, 还受到竖直向下的重力 mg 作用. 只有当重力的大小 mg 与库仑力的 y 分量相等时, P 才能平衡. 当 P 所受的重力 mg 大于 $F_{Ey\max}$ 时, P 不可能达到平衡. 故质量为 m 的粒子存在平衡位置的条件是

$$mg \leq F_{Ey\max} .$$

由 (4) 式得

$$m \leq \frac{0.385}{g} k \frac{qQ}{d^2} . \quad (5)$$

2. $y(m) > 0.707d$; $0 < y(m) \leq 0.707d$.

3. 根据题意, 当粒子 P 静止在 $y = y_1$ 处时, 处于稳定平衡位置, 故有

$$k \frac{Qqy_1}{(d^2 + y_1^2)^{\frac{3}{2}}} - m_1g = 0 . \quad (6)$$

设想给粒子 P 沿 y 轴的一小扰动 Δy , 则 P 在 y 方向所受的合力为

$$F_y = F_{Ey} - m_1g = k \frac{Qq(y_1 + \Delta y)}{[d^2 + (y_1 + \Delta y)^2]^{3/2}} - m_1g . \quad (7)$$

由于 Δy 为一小量, 可进行近似处理, 忽略高阶小量, 有

$$\begin{aligned} F_y &= k \frac{Qq(y_1 + \Delta y)}{[d^2 + y_1^2 + 2y_1\Delta y]^{3/2}} - m_1g \\ &= k \frac{Qq(y_1 + \Delta y)}{(d^2 + y_1^2)^{3/2}} \left(1 - \frac{3y_1\Delta y}{d^2 + y_1^2}\right) - m_1g \\ &= k \frac{Qqy_1}{(d^2 + y_1^2)^{3/2}} + k \frac{Qq\Delta y}{(d^2 + y_1^2)^{3/2}} - k \frac{3qQy_1^2\Delta y}{(d^2 + y_1^2)^{5/2}} - m_1g . \end{aligned}$$

注意到 (6) 式, 得

$$F_y = - \frac{m_1g(2y_1^2 - d^2)}{(d^2 + y_1^2)y_1} \Delta y . \quad (8)$$

因 $y = y_1$ 是粒子 P 的稳定平衡位置, 故 $y_1 > 0.707d$, $2y_1^2 - d^2 > 0$. 由 (8) 式可知, 粒子 P 在 y 方向受到合力具有恢复力的性质, 故在其稳定平衡位置附近的微小振动是简谐运动; 其圆频率为

$$\omega = \sqrt{\frac{(2y_1^2 - d^2)}{(d^2 + y_1^2)y_1} g} , \quad (9)$$

周期为

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{(d^2 + y_1^2) y_1}{(2y_1^2 - d^2) g}} . \quad (10)$$

4. 粒子 P 处在重力场中，具有重力势能；它又处在点电荷 A 的静电场中，具有静电势能。当 P 的坐标为 y 时，其重力势能

$$W_g = m_2 g y ,$$

式中取坐标原点 O 处的重力势能为零；静电势能

$$W_E = k \frac{qQ}{\sqrt{d^2 + y^2}} .$$

粒子的总势能

$$W = W_g + W_E = m_2 g y + k \frac{qQ}{\sqrt{d^2 + y^2}} . \quad (11)$$

势能也与 P 的 y 坐标有关：当 y 较小时，静电势能起主要作用，当 y 较大时，重力势能起主要作用。在 P 的稳定平衡位置处，势能具有极小值；在 P 的不稳定平衡位置处，势能具有极大值。根据题意， $y = y_2$ 处是质量为 m_2 的粒子的不稳定平衡位置，故 $y = y_2$ 处，势能具有极大值，即

$$W(y_2) = W_{\max} = m_2 g y_2 + k \frac{qQ}{\sqrt{d^2 + y_2^2}} . \quad (12)$$

当粒子 P 的坐标为 y_3 时，粒子的势能为

$$W(y_3) = m_2 g y_3 + k \frac{qQ}{\sqrt{d^2 + y_3^2}} .$$

当 $y_3 < y_2$ 时，不论 y_3 取何值，粒子从静止释放都能到达管底。若 $y_3 > y_2$ ，粒子从静止释放能够到达管底，则有

$$W(y_3) > W(y_2) .$$

所以， y_3 满足的关系式为

$$y_3 < y_2 ; \quad (13)$$

或者

$$y_3 > y_2 \quad \text{且} \quad m_2 g y_3 + k \frac{qQ}{\sqrt{d^2 + y_3^2}} > m_2 g y_2 + k \frac{qQ}{\sqrt{d^2 + y_2^2}} . \quad (14)$$

附：(1) 式可表示为

$$F_{Ey} = k \frac{Qq}{r^2} \sin\theta = k \frac{Qq}{d^2} \cos^2\theta \sin\theta ,$$

式中 θ 为 P, A 之间的连线和 x 轴的夹角. 由上式可知, 带电粒子 P 在 $\theta=0, \pi/2$ 时, $F_{Ey} = 0$. 在 $0 \leq \theta \leq \pi/2$ 区间, 随着 θ 的增大, $\sin\theta$ 是递增函数, $\cos^2\theta$ 是递减函数. 在此区间内, F_{Ey} 必存在一个极大值 $F_{Ey\max}$; 用数值法求解, 可求得极大值所对应得角度 θ_0 . 经数个计算整理出的数据如表 2 所示.

表 2

θ / rad	0.010	0.464	0.540	0.576	0.611	0.615	0.617	0.644	0.675
$\cos^2\theta \sin\theta$	0.029	0.367	0.378	0.383	0.385	0.385	0.385	0.384	0.381

由表中数值可知, 当 $\theta = \theta_0 \approx 0.615 \text{ rad}$ (即 35.26°) 时, F_{Ey} 取极大值

$$F_{Ey\max} = k \frac{Qq}{d^2} \cos^2\theta_0 \sin\theta_0 = 0.385 k \frac{Qq}{d^2} .$$

带电粒子 P 在竖直方向上还受到重力 G 的作用, 其方向与 F_{Ey} 相反. 故带电粒子 P 受到的合力

$$F = F_{Ey} - G = k \frac{Qq}{d^2} \cos^2\theta \sin\theta - mg .$$

当 $F=0$, 即 $F_{Ey}=G$ 时, P 处于平衡状态. 由此可见, 当带电粒子的质量

$$m \leq \frac{F_{Ey\max}}{g} = \frac{k (qQ / d^2) \cos^2\theta_0 \sin\theta_0}{g}$$

时, 可以在 y 轴上找到平衡点.

六、

1. 单球面折射成像公式可写成

$$\frac{n'}{s'} + \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{r} , \quad (1)$$

式中 s 为物距, s' 为像距, r 为球面半径, n 和 n' 分别为入射光和折射光所在介质的折射率.

在本题中, 物点 P 经反射器的成像过程是: 先经过左球面折射成像 (第一次成像); 再经右球面反射成像 (第二次成像); 最后再经左球面折射成像 (第三次成像).

(1) 第一次成像. 令 s_1 和 s'_1 分别表示物距和像距. 因 $s_1 = s$, $n = n_0 = 1$, $n' = n_g$, $r = R$, 有

$$\frac{n_g}{s'_1} + \frac{1}{s_1} = \frac{n_g - 1}{R} , \quad (2)$$

即

$$s'_1 = \frac{n_g R s}{(n_g - 1)s - R} . \quad (3)$$

(2) 第二次成像. 用 s_2 表示物距, s'_2 表示像距, 有

$$\frac{1}{s'_2} + \frac{1}{s_2} = \frac{2}{r} . \quad (4)$$

因 $s_2 = 2R - s'_1$, $r = R$, 由 (3), (4) 两式得

$$s'_2 = \frac{(2s + 2R - n_g s)R}{3R + 3s - n_g s} . \quad (5)$$

(3) 第三次成像. 用 s_3 表示物距, s'_3 表示像距, 有

$$\frac{n_0}{s'_3} + \frac{n_g}{s_3} = \frac{n_0 - n_g}{r} . \quad (6)$$

因 $s_3 = 2R - s'_2$, $n_0 = 1$, $r = -R$, 由 (5), (6) 两式得

$$s'_3 = \frac{(4s - n_g s + 4R)R}{2n_g s - 4s + n_g R - 4R} . \quad (7)$$

2. 以 v' 表示像的速度, 则

$$\begin{aligned} v' &= \frac{\Delta s'_3}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \left\{ \frac{[4(s + \Delta s) - n_g(s + \Delta s) + 4R]R}{2n_g(s + \Delta s) - 4(s + \Delta s) + n_g R - 4R} - \frac{(4s - n_g s + 4R)R}{2n_g s - 4s + n_g R - 4R} \right\} \\ &= \frac{-n_g^2 R^2 \Delta s / \Delta t}{(2n_g s - 4s + n_g R - 4R)^2 + \Delta s(2n_g - 4)(2n_g s - 4s + n_g R - 4R)} . \end{aligned} \quad (8)$$

由于 Δs 很小, 分母中含有 Δs 的项可以略去, 因而有

$$v' = \frac{-n_g^2 R^2}{(2n_g s - 4s + n_g R - 4R)^2} \frac{\Delta s}{\Delta t} . \quad (9)$$

根据题意, P 从左向右运动, 速度大小为 v , 则有

$$v = -\frac{\Delta s}{\Delta t} . \quad (10)$$

由此可得, 像的速度

$$v' = \frac{n_g^2 R^2 v}{(2n_g s - 4s + n_g R - 4R)^2} . \quad (11)$$

可见, 像的速度与 s 有关, 一般不做匀速直线运动, 而做变速直线运动. 当

$$n = 2 \quad (12)$$

时, (11) 式分母括号中的头两项相消, v' 将与 s 无关. 这表明像也将做匀速直线运动;

而且 (11) 式变为 $v' = v$, 即像的速度和 P 的速度大小相等.

七、

解法一. 根据已知条件, 射向钠原子的激光的频率

$$\nu = \frac{c}{\lambda} . \quad (1)$$

对运动方向与 z 轴正方向的夹角为 θ 、速率为 u 的钠原子, 由于多普勒效应, 它接收的激光频率

$$\nu' = \nu \left(1 + \frac{u}{c} \cos\theta \right); \quad (2)$$

改用波长表示, 有

$$\lambda' = \frac{\lambda}{1 + \frac{u}{c} \cos\theta} . \quad (3)$$

发生共振吸收时, 应有 $\lambda' = \lambda_0$, 即

$$\frac{\lambda}{1 + \frac{u}{c} \cos\theta} = \lambda_0 . \quad (4)$$

解 (4) 式, 得

$$u \cos\theta = c \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} ; \quad (5)$$

代入有关数据, 得

$$u \cos\theta = 5.85 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} . \quad (6)$$

由 (6) 式, 对 $\theta=30^\circ$ 的钠原子, 其速率

$$u_1 = 6.76 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} ;$$

对 $\theta=45^\circ$ 的钠原子, 其速率

$$u_2 = 8.28 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} .$$

运动方向与 z 轴的夹角在 $30^\circ \sim 45^\circ$ 区域内的原子中, 能发生共振吸收的钠原子的速率范围为

$$6.76 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} < u < 8.28 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} . \quad (7)$$

共振吸收前后, 动量守恒. 设钠原子的反冲速率为 V , 则有

$$Mu - \frac{h}{\lambda} e_z = MV . \quad (8)$$

其中 e_z 为 z 轴方向的单位矢量. 由 (8) 式得

$$u - V = \frac{h}{M\lambda} e_z . \quad (9)$$

钠原子速度（矢量）变化的大小为

$$|u - V| = \frac{h}{M\lambda} ; \quad (10)$$

代入数据，得

$$|u - V| = 2.9 \times 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} . \quad (11)$$

解法二. 根据已知条件，钠原子从激发态 $P_{3/2}$ 跃迁到基态 $S_{1/2}$ 发出的光谱线的频率

$$\nu_0 = \frac{c}{\lambda_0} ; \quad (1)$$

入射激光的频率

$$\nu = \frac{c}{\lambda} . \quad (2)$$

考查运动方向与 z 轴的正方向成 θ 角的某个钠原子. 它在共振吸收过程中动量守恒，能量守恒. 以 u 表示该钠原子在共振吸收前的速度， V 表示该钠原子共振吸收后的速度，则有

$$Mu - \frac{h\nu}{c}e_z = MV , \quad (3)$$

$$\frac{1}{2}Mu^2 + h\nu = \frac{1}{2}MV^2 + h\nu_0 . \quad (4)$$

把 (3) 式写成分量形式，并注意到共振吸收前后钠原子在垂直于 z 轴方向的动量不变，有

$$Mu\sin\theta = MV\sin\theta' , \quad (5)$$

$$Mucos\theta - \frac{h\nu}{c} = MV\cos\theta' , \quad (6)$$

式中 θ' 为激发态钠原子速度方向与 z 轴正方向的夹角. 从 (5), (6) 两式中消去 θ' ，得

$$M^2u^2 - M^2V^2 = -\left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 + 2Mu\frac{h\nu}{c}\cos\theta . \quad (7)$$

由 (4), (7) 两式可得

$$2h\nu_0 - 2h\nu = -\frac{1}{M}\left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 + 2h\nu\frac{u}{c}\cos\theta . \quad (8)$$

注意到 $(h\nu/c)^2 \ll M$ ，得

$$\nu_0 = \nu\left(1 + \frac{u}{c}\cos\theta\right); \quad (9)$$

改用波长表示，有

$$\lambda_0 = \frac{\lambda}{1 + \frac{u}{c}\cos\theta} . \quad (10)$$

解 (10) 式，得

$$u \cos \theta = c \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} ; \quad (11)$$

代入有关数据, 得

$$u \cos \theta = 5.85 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} . \quad (12)$$

由 (12) 式, 对 $\theta = 30^\circ$ 的钠原子, 其速率

$$u_1 = 6.76 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} ;$$

对 $\theta = 45^\circ$ 的钠原子, 其速率

$$u_2 = 8.28 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} .$$

运动方向与 z 轴的夹角在 $30^\circ \sim 45^\circ$ 区域内的原子中, 能发生共振吸收的钠原子的速率范围为

$$6.76 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} < u < 8.28 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} . \quad (13)$$

由 (3) 式可知, 钠原子共振吸收前后速度 (矢量) 的变化为

$$u - V = \frac{h}{M\lambda} e_z , \quad (14)$$

速度 (矢量) 大小的变化为

$$|u - V| = \frac{h}{M\lambda} ; \quad (15)$$

代入数据, 得

$$|u - V| = 2.9 \times 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} . \quad (16)$$

