

中国科学技术大学物理学院叶邦角整理

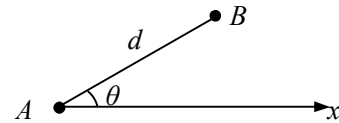
第 25 届全国中学生物理竞赛决赛试题

2008 年 10 月 北京

★ 理论部分

一、

足球比赛，一攻方队员在图中所示的 A 处沿 Ax 方向传球，球在草地上以速度 v 匀速滚动，守方有一队员在图中 B 处，以 d 表示 A, B 间的距离，以 θ 表示 AB 与 Ax 之间的夹角，已知 $\theta < 90^\circ$ 。设在球离开 A 处的同时，位于 B 处的守方队员开始沿一直线在匀速运动中去抢球，以 v_p 表示他的速率。在不考虑场地边界限制的条件下，求解以下问题（要求用题中给出的有关参量间的关系式表示所求得的结果）：



1. 求出守方队员可以抢到球的必要条件.

2. 如果攻方有一接球队员处在 Ax 线上等球，以 l_r 表示他到 A 点的距离，求出球不被原在 B 处的守方队员抢断的条件.

3. 如果攻方有一接球队员处在 Ax 线上，以 L 表示他离开 A 点的距离。在球离开 A 处的同时，他开始匀速跑去接球，以 v_r 表示其速率，求在这种情况下球不被原在 B 处的守方队员抢断的条件.

二、

卫星的运动可由地面观测来确定；而知道了卫星的运动，又可以用它来确定空间飞行体或地面上物体的运动。这都涉及时间和空间坐标的测定。为简化分析和计算，不考虑地球的自转和公转，把它当做惯性系。

1. 先来考虑卫星运动的测定。设不考虑相对论效应。在卫星上装有发射电波的装置和高精度的原子钟。假设从卫星上每次发出的电波信号，都包含该信号发出的时刻这一信息。

(I) 地面观测系统（包含若干个观测站）可利用从电波中接收到的这一信息，并根据自己所处的已知位置和自己的时钟来确定卫星每一时刻的位置，从而测定卫星的运动。这种

测量系统至少需要包含几个地面观测站？列出可以确定卫星位置的方程。

(II) 设有两个观测站 D_1 , D_2 , 分别位于同一经线上北纬 θ 和南纬 θ (单位: $(^\circ)$) 处. 若它们同时收到时间 τ 之前卫星发出的电波信号. (i) 试求出发出电波时刻卫星距地面的最大高度 H ; (ii) 当 D_1 , D_2 处观测站位置的纬度有很小的误差 $\Delta\theta$ 时, 试求 H 的误差; (iii) 如果上述的时间 τ 有很小的误差 $\Delta\tau$, 试求 H 的误差.

2. 在第 1 (II) 小题中, 若 $\theta = 45^\circ$, $\tau = 0.10 \text{ s}$. (i) 试问卫星发出电波时刻卫星距地面最大高度 H 是多少千米? (ii) 若 $\Delta\theta = \pm 1.0''$, 定出的 H 有多大误差? (iii) 若 $\Delta\tau = \pm 0.010 \mu\text{s}$, 定出的 H 有多大误差? 假设地球为半径 $R = 6.38 \times 10^3 \text{ km}$ 的球体, 光速 $c = 2.998 \times 10^8 \text{ m/s}$, 地面处的重力加速度 $g = 9.81 \text{ m/s}^2$.

3. 再来考虑根据参照卫星的运动来测定一个物体的运动. 设不考虑相对论效应. 假设从卫星持续发出的电波信号包含卫星运动状态的信息, 即每个信号发出的时刻及该时刻卫星所处的位置. 再假设被观测物体上有一台卫星信号接收器 (设其上没有时钟), 从而可获知这些信息. 为了利用这种信息来确定物体的运动状态, 即物体接收到卫星信号时物体当时所处的位置以及当时的时刻, 一般来说物体至少需要同时接收到几个不同卫星发来的信号电波? 列出确定当时物体的位置和该时刻的方程.

4. 根据狭义相对论, 运动的钟比静止的钟慢. 根据广义相对论, 钟在引力场中变慢. 现在来考虑在上述测量中相对论的这两种效应. 已知天上卫星的钟与地面观测站的钟零点已经对准. 假设卫星在离地面 $h = 2.00 \times 10^4 \text{ km}$ 的圆形轨道上运行, 地球半径 R 、光速 c 和地面重力加速度 g 取第 2 小题中给的值.

(I) 根据狭义相对论, 试估算地上的钟经过 24 h 后它的示数与卫星上的钟的示数差多少? 设在处理这一问题时, 可以把匀速直线运动中时钟走慢的公式用于匀速圆周运动.

(II) 根据广义相对论, 钟在引力场中变慢的因子是 $(1 - 2\phi/c^2)^{1/2}$, ϕ 是钟所在位置的引力势 (即引力势能与受引力作用的物体质量之比; 取无限远处引力势为零) 的大小. 试问地上的钟 24 h 后, 卫星上的钟的示数与地上的钟的示数差多少?

三、

致冷机是通过外界对机器做功, 把从低温处吸取的热量连同外界对机器做功所得到的能量一起送到高温处的机器; 它能使低温处的温度降低, 高温处的温度升高. 已知当致冷机工作在绝对温度为 T_1 的高温处和绝对温度为 T_2 的低温处之间时, 若致冷机从低温处吸取的

热量为 Q ，外界对致冷机做的功为 W ，则有

$$\frac{Q}{W} \leq \frac{T_2}{T_1 - T_2},$$

式中“=”对应于理论上的理想情况。某致冷机在冬天作为热泵使用（即取暖空调机），在室外温度为 -5.00°C 的情况下，使某房间内的温度保持在 20.00°C 。由于室内温度高于室外，故将有热量从室内传递到室外。本题只考虑传导方式的传热，它服从以下的规律：设一块导热层，其厚度为 l ，面积为 S ，两侧温度差的大小为 T ，则单位时间内通过导热层由高温处传导到低温处的热量为

$$H = k \frac{\Delta T}{l} S,$$

其中 k 称为热导率，取决于导热层材料的性质。

1. 假设该房间向外散热是由面向室外的面积 $S = 5.00 \text{ m}^2$ 、厚度 $l = 2.00 \text{ mm}$ 的玻璃板引起的。已知该玻璃的热导率 $k = 0.75 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ ，电费为每度 0.50 元。试求在理想情况下该热泵工作 12 h 需要多少电费？

2. 若将上述玻璃板换为“双层玻璃板”，两层玻璃的厚度均为 2.00 mm ，玻璃板之间夹有厚度 $l_0 = 0.50 \text{ mm}$ 的空气层，假设空气的热导率 $k_0 = 0.025 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ ，电费仍为每度 0.50 元。若该热泵仍然工作 12 h，问这时的电费比上一问单层玻璃情形节省多少？

四、

如图 1 所示，器件由相互紧密接触的金属层(M)、薄绝缘层(I)和金属层(M)构成。按照经典物理的观点，在 I 层绝缘性能理想的情况下，电子不可能从一个金属层穿过绝缘层到达另一个金属层。但是，按照量子物理的原理，在一定的条件下，

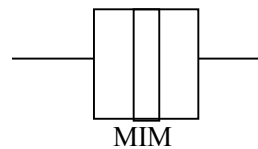


图 1

这种渡越是可能的，习惯上将这一过程称为隧穿，它是电子具有波动性的结果。隧穿是单个电子的过程，是分立的事件，通过绝缘层转移的电荷量只能是电子电荷量 $-e$ ($e = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$) 的整数倍，因此也称为单电子隧穿，MIM 器件亦称为隧穿结或单电子隧穿结。本题涉及对单电子隧穿过程控制的库仑阻塞原理，由于据此可望制成尺寸很小的单电子器件，这是目前研究得很多、有应用前景的领域。

1. 显示库仑阻塞原理的最简单的做法是将图 1 的器件看成一个电容为 C 的电容器，如图 2 所示。电容器极板上的电荷来源于金属极板上导电电子云相对于正电荷背景的很小位移，可以连续变化。如前所述，以隧穿方式通过绝缘层的只能

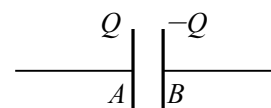


图 2

是分立的单电子电荷。如果隧穿过程会导致体系静电能量上升，则此过程不能发生，这种现象称为库仑阻塞。试求出发生库仑阻塞的条件即电容器极板间的电势差 $V_{AB} = V_A - V_B$ 在什么范围内单电子隧穿过程被禁止。

2. 假定 $V_{AB} = 0.10 \text{ mV}$ 是刚能发生隧穿的电压。试估算电容 C 的大小。

3. 将图 1 的器件与电压为 V 的恒压源相接时，通常采用图 2 所示的双结构器件来观察单电子隧穿，避免杂散电容的影响。中间的金属块层称为单电子岛。作为电极的左、右金属块层分别记为 S ， D 。若已知岛中有净电荷量 $-ne$ ，其中净电子数 n 可为正、负整数或零， e 为电子电荷量的大小，两个 MIM 结的电容分别为 C_S 和 C_D 。试证明双结构器件的静电能中与岛上净电荷量相关的静电能（简称单电子岛的静电能）为

$$U_n = \frac{(-ne)^2}{2(C_S + C_D)}.$$

4. 在图 3 给出的具有源(S)、漏(D)电极双结结构的基础上，通过和岛连接的电容 C_G 添加门电极(G)构成如图 4 给出的单电子三极管结构，门电极和岛间没有单电子隧穿事件发

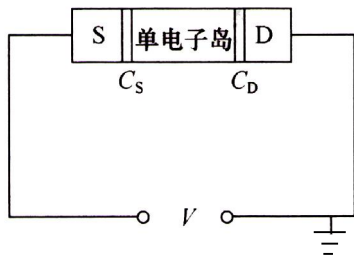


图 3

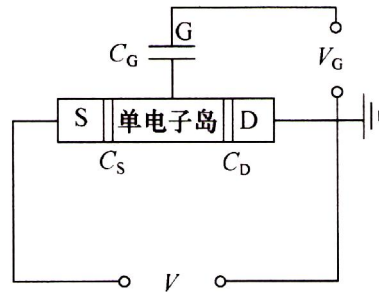


图 4

生。在 V 较小且固定的情况下，通过门电压 V_G 可控制岛中的净电子数 n 。对于 V_G 如何控制 n ，简单的模型是将 V_G 的作用视为岛中附加了等效电荷 $q_0 = C_G V_G$ 。这时，单电子岛的静电能可近似为 $U_n = (-ne + q_0)^2 / 2C_\Sigma$ ，式中 $C_\Sigma = C_S + C_D + C_G$ 。利用方格图（图

5），考虑库仑阻塞效应，用粗线画出岛中净电子数从 $n = 0$ 开始， $C_G V_G / e$ 由 0 增大到 3 的过程中，单电子岛的静电能 U_n 随 $C_G V_G$ 变化的图线（纵坐标表示 U_n ，取 U_n 的单位为

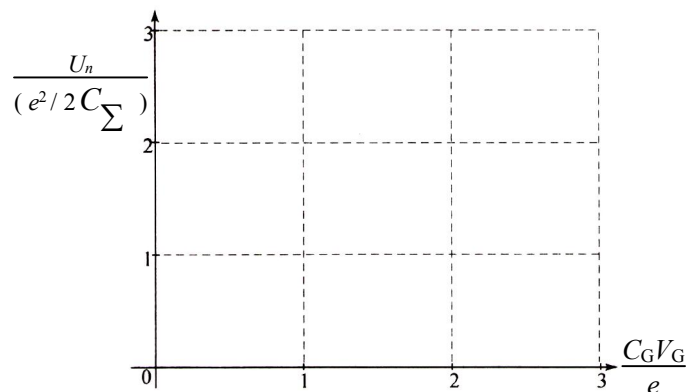


图 5

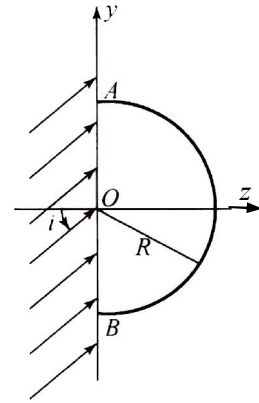
$e^2/2C_{\Sigma}$ ；横坐标表示 $C_G V_G$ ，取 $C_G V_G$ 的单位为 e 。要求标出关键点的坐标，并把 $n = 0, 1, 2, 3$ 时 $C_G V_G / e$ 的变化范围填在表格中。（此小题只按作图及所填表格（表 1）评分）。

表 1

n	0	1	2	3
$C_G V_G / e$ 变化范围				

五、

折射率 $n = 1.50$ 、半径为 R 的透明半圆柱体放在空气中，其垂直于柱体轴线的横截面如图所示，图中 O 点为横截面与轴线的交点。光仅允许从半圆柱体的平面 AB 进入，一束足够宽的平行单色光沿垂直于圆柱轴的方向以入射角 i 射至 AB 整个平面上，其中有一部分入射光束能通过半圆柱体从圆柱面射出。这部分光束在入射到 AB 面上时沿 y 轴方向的长度用 d 表示。本题不考虑光线在透明圆柱体内经一次或多次反射后再射出柱体的复杂情形。



1. 当平行入射光的入射角 i 在 $0^\circ \sim 90^\circ$ 变化时，试求 d 的最小值 d_{\min} 和最大值 d_{\max} 。

2. 在如图所示的平面内，求出射光束与柱面相交的圆弧对 O 点的张角与入射角 i 的关系。并求在掠入射时上述圆弧的位置。

六、

根据广义相对论，光线在星体的引力场中会发生弯曲，在包含引力中心的平面内是一条在引力中心附近微弯的曲线。它距离引力中心最近的点称为光线的近星点。通过近星点与引力中心的直线是光线的对称轴。若在光线所在平面内选择引力中心为平面极坐标 (r, φ) 的原点，选取光线的对称轴为坐标极轴，则光线方程（光子的轨迹方程）为

$$r = \frac{GM/c^2}{a \cos \varphi + a^2 (1 + \sin^2 \varphi)},$$

G 是万有引力恒量， M 是星体质量， c 是光速， a 是绝对值远小于 1 的参数。现在假设离地球 80.0 光年处有一星体，在它和地球连线的中点处有一白矮星。如果经过该白矮星两侧的星光对地球上的观测者所张的视角是 $1.80 \times 10^{-7} \text{rad}$ ，试问此白矮星的质量是多少千克？

已知 $G = 6.673 \times 10^{-11} \text{ m}^3 / (\text{kg} \cdot \text{s}^2)$

七、

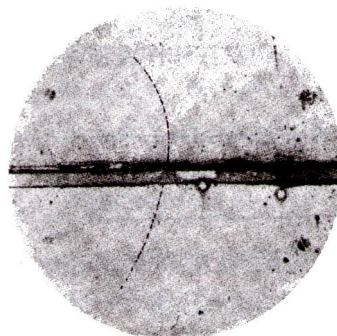
1. 假设对氦原子基态采用玻尔模型，认为每个电子都在以氦核为中心的圆周上运动，半径相同，角动量均为 \hbar ： $\hbar = h / 2\pi$ ，其中 h 是普朗克常量。

(I) 如果忽略电子间的相互作用，氦原子的一级电离能是多少电子伏？一级电离能是指把其中一个电子移到无限远所需要的能量。

(II) 实验测得的氦原子一级电离能是 24.6 eV。若在上述玻尔模型的基础上来考虑电子之间的相互作用，进一步假设两个电子总处于通过氦核的一条直径的两端。试用此模型和假设，求出电子运动轨道的半径 r_0 、基态能量 E_0 以及一级电离能 E^+ ，并与实验测得的氦原子一级电离能相比较。

已知电子质量 $m = 0.511 \text{ MeV} / c^2$ ， c 是光速，组合常量 $\hbar c = 197.3 \text{ MeV} \cdot \text{fm} = 197.3 \text{ eV} \cdot \text{nm}$ ， $ke^2 = 1.44 \text{ MeV} \cdot \text{fm} = 1.44 \text{ eV} \cdot \text{nm}$ ， k 是静电力常量， e 是基本电荷量。

2. 右图是某种粒子穿过云室留下的径迹的照片。径迹在纸面内，图的中间是一块与纸面垂直的铅板，外加恒定匀强磁场的方向垂直纸面向里。假设粒子电荷的大小是一个基本电荷量 e ： $e = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$ ，铅板下部径迹的曲率半径 $r_d = 210 \text{ mm}$ ，铅板上部径迹的曲率半径 $r_u = 76.0 \text{ mm}$ ，铅板内的径迹与铅板法线成 $\theta = 15.0^\circ$ ，铅板厚度 $d = 6.00 \text{ mm}$ ，磁感应强度 $B = 1.00 \text{ T}$ ，粒子质量 $m = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg} = 0.511 \text{ MeV} / c^2$ 。不考虑云室中气体对粒子的阻力。



(I) 写出粒子运动的方向和电荷的正负。

(II) 试问铅板在粒子穿过期间所受的力平均为多少牛？

(III) 假设射向铅板的不是一个粒子，而是从加速器引出的流量为 $j = 5.00 \times 10^{18} / \text{s}$ 的脉冲粒子束，一个脉冲持续时间为 $\tau = 2.50 \text{ ns}$ 。试问铅板在此脉冲粒子束穿过期间所受的力平均为多少牛？铅板在此期间吸收的热量又是多少焦？

第 25 届全国中学生物理竞赛决赛参考解答

一、

1. 解法一：设守方队员经过时间 t 在 Ax 上的 C 点抢到球，用 l 表示 A 与 C 之间的距离， l_p 表示 B 与 C 之间的距离（如图 1 所示），则有

$$l = vt, \quad l_p = v_p t \quad (1)$$

和
$$l_p^2 = d^2 + l^2 - 2dl \cos \theta. \quad (2)$$

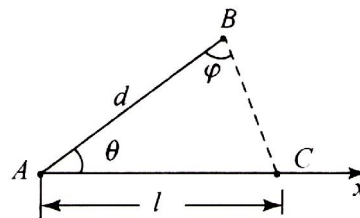


图 1

解式 (1), (2) 可得

$$l = \frac{d}{1 - (v_p/v)^2} \{ \cos \theta \pm [(\frac{v_p}{v})^2 - \sin^2 \theta]^{1/2} \}. \quad (3)$$

由式 (3) 可知，球被抢到的必要条件是该式有实数解，即

$$v_p \geq v \sin \theta. \quad (4)$$

解法二：设 BA 与 BC 的夹角为 φ （如图 1）。按正弦定理有

$$\frac{l_p}{\sin \theta} = \frac{l}{\sin \varphi}.$$

利用式 (1) 有

$$\frac{v_p}{v} = \frac{\sin \theta}{\sin \varphi}.$$

从 $\sin \varphi \leq 1$ 可得必要条件 (4)。

2. 用 l_{\min} 表示守方队员能抢断球的地方与 A 点间的最小距离。由式 (3) 知

$$l_{\min} = \frac{d}{1 - (v_p/v)^2} \{ \cos \theta \pm [(\frac{v_p}{v})^2 - \sin^2 \theta]^{1/2} \}. \quad (5)$$

若攻方接球队员到 A 点的距离小于 l_{\min} ，则他将先控制球而不被守方队员抢断。故球不被抢断的条件是

$$l_r < l_{\min}. \quad (6)$$

由 (5), (6) 两式得

$$l_r < \frac{d}{1 - (v_p/v)^2} \{ \cos \theta \pm [(\frac{v_p}{v})^2 - \sin^2 \theta]^{1/2} \} \quad (7)$$

由式 (7) 可知，若位于 Ax 轴上等球的攻方球员到 A 点的距离 l_r 满足该式，则球不被原位于 B 处的守方球员抢断。

3. 解法一：如果在位于 B 处的守方球员到达 Ax 上距离 A 点 l_{\min} 的 C_1 点之前，

攻方接球队员能够到达距 A 点小于 l_{\min} 处, 球就不会被原位于 B 处的守方队员抢断(如图 2 所示). 若 $L \leq l_{\min}$ 就相当于第 2 小题. 若 $L >$

l_{\min} , 设攻方接球员位于 Ax 方向上某点 E 处, 则他跑到 C_1 点所需时间

$$t_{\text{rm}} = (L - l_{\min}) / v_r ; \quad (8)$$

守方队员到达 C_1 处所需时间 $t_{\text{pm}} = (d^2 + l_{\min}^2 - 2dl_{\min} \cos\theta)^{1/2} / v_p$.

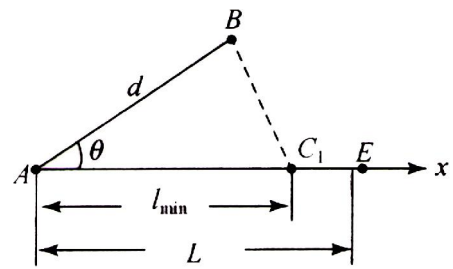


图 2

球不被守方抢断的条件是

$$t_{\text{rm}} < t_{\text{pm}} . \quad (9)$$

即
$$L < \frac{v_r}{v_p} (d^2 + l_{\min}^2 - 2dl_{\min} \cos\theta)^{1/2} + l_{\min} , \quad (10)$$

式中 l_{\min} 由式 (5) 给出.

解法二: 守方队员到达 C_1 点的时间和球到达该点的时间相同, 因此有

$$t_{\text{pm}} = l_{\min} / v .$$

从球不被守方队员抢断的条件 (9) 以及式 (8) 可得到

$$L < (1 + v_r / v) l_{\min} \quad (11)$$

式中 l_{\min} 也由式 (5) 给出. 易证明式 (11) 与 (10) 相同.

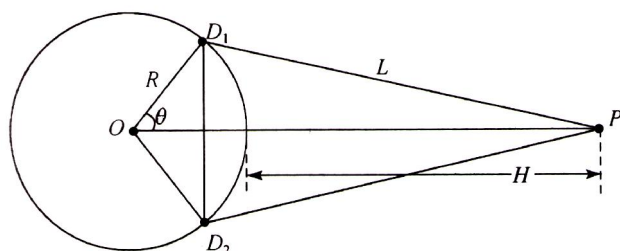
二、

1. (I) 选择一个坐标系来测定卫星的运动, 就是测定每一时刻卫星的位置坐标 x, y, z . 设卫星在 t 时刻发出的信号电波到达第 i 个地面站的时刻为 t_i . 因为卫星信号电波以光速 c 传播, 于是可以写出

$$(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 = c^2 (t - t_i)^2 \quad (i = 1, 2, 3), \quad (1)$$

式中 x_i, y_i, z_i 是第 i 个地面站的位置坐标, 可以预先测定, 是已知的; t_i 也可以由地面站的时钟来测定; t 由卫星信号电波给出, 也是已知的. 所以, 方程 (1) 中有三个未知数 x, y, z , 要有三个互相独立的方程, 也就是说, 至少需要包含三个地面站, 三个方程对应于式 (1) 中 $i = 1, 2, 3$ 的情况.

(II)(i) 如图所示, 以地心 O 和两个观测站 D_1, D_2 的位置为顶点所构成的三角形是等腰三角形, 腰长为 R . 根据题意, 可知



卫星发出信号电波时距离两个观测站的距离相等，都是

$$L = c\tau . \quad (2)$$

当卫星 P 处于上述三角形所在的平面内时，距离地面的高度最大，即 H . 以 θ 表示 D_1 , D_2 所处的纬度，由余弦定理可知

$$L^2 = R^2 + (H + R)^2 - 2R(H + R)\cos\theta . \quad (3)$$

由 (2), (3) 两式得

$$H = \sqrt{(c\tau)^2 - (R\sin\theta)^2} - R(1 - \cos\theta) . \quad (4)$$

式 (4) 也可据图直接写出.

(ii) 按题意，如果纬度有很小的误差 $\Delta\theta$, 则由式 (3) 可知，将引起 H 发生误差 ΔH . 这时有

$$L^2 = R^2 + (H + \Delta H + R)^2 - 2R(H + \Delta H + R)\cos(\theta + \Delta\theta) . \quad (5)$$

将式 (5) 展开，因 $\Delta\theta$ 很小，从而 ΔH 也很小，可略去高次项，再与式 (3) 相减，得

$$\Delta H = \frac{R(R + H)\sin\theta\Delta\theta}{H + (1 - \cos\theta)R} , \quad (6)$$

其中 H 由 (4) 式给出.

(iii) 如果时间 τ 有 $\Delta\tau$ 的误差，则 L 有误差

$$\Delta L = c\Delta\tau . \quad (7)$$

由式 (3) 可知，这将引起 H 产生误差 ΔH . 这时有

$$(L + \Delta L)^2 = R^2 + (H + \Delta H + R)^2 - 2R(H + \Delta H + R)\cos\theta . \quad (8)$$

由式 (7), (8) 和 (3), 略去高次项，可得

$$\Delta H = \frac{c^2\tau\Delta\tau}{H + R(1 - \cos\theta)} , \quad (9)$$

其中 H 由式 (4) 给出.

2. (i) 在式 (4) 中代入数据，算得 $H = 2.8 \times 10^4$ km . (ii) 在式 (6) 中代入数据，算得 $\Delta H = \mp 25$ m . (iii) 在式 (9) 中代入数据，算得 $\Delta H = \pm 3.0$ m .

3. 选择一个坐标系，设被测物体待定位置的坐标为 x , y , z , 待定时刻为 t , 第 i 个卫星在 t_i 时刻的坐标为 x_i , y_i , z_i . 卫星信号电波以光速传播，可以写出

$$(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 = c^2(t - t_i)^2 \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad (10)$$

由于方程 (1) 有四个未知数 t , x , y , z , 需要四个独立方程才有确定的解，故需同时接收至少四个不同卫星的信号. 确定当时物体的位置和该时刻所需要的是式 (10) 中 i

= 1, 2, 3, 4 所对应的四个独立方程.

4. (I) 由于卫星上钟的变慢因子为 $[1 - (v/c)^2]^{1/2}$, 地上的钟的示数 T 与卫星上的钟的示数 t 之差为

$$T - t = T - \sqrt{1 - (v/c)^2} T = [1 - \sqrt{1 - (v/c)^2}] T, \quad (11)$$

这里 v 是卫星相对地面的速度, 可由下列方程定出:

$$\frac{v^2}{r} = \frac{GM}{r^2}, \quad (12)$$

其中 G 是万有引力常量, M 是地球质量, r 是轨道半径. 式 (11) 给出

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{g}{r} R} = \sqrt{\frac{g}{R+h} R},$$

其中 R 是地球半径, h 是卫星离地面的高度, $g = GM/R^2$ 是地面重力加速度; 代入数值有 $v = 3.89 \text{ km/s}$. 于是 $(v/c)^2 \approx 1.68 \times 10^{-10}$, 这是很小的数. 所以

$$[1 - (v/c)^2]^{1/2} \approx 1 - \frac{1}{2} (v/c)^2.$$

最后, 可以算出 24 h 的时差

$$T - t \approx \frac{1}{2} (v/c)^2 T = \frac{1}{2} \frac{gR^2}{c^2 (R+h)} T = 7.3 \mu\text{s}. \quad (13)$$

(II) 卫星上的钟的示数 t 与无限远惯性系中的钟的示数 T_0 之差

$$t - T_0 = \sqrt{1 - 2\frac{\phi}{c^2}} T_0 - T_0 = (\sqrt{1 - 2\frac{\phi}{c^2}} - 1) T_0. \quad (14)$$

卫星上的钟所处的重力势能的大小为

$$\phi = \frac{GM}{R+h} = \frac{R^2}{R+h} g. \quad (15)$$

所以 $\frac{\phi}{c^2} = \frac{gR^2}{c^2 (R+h)}$;

代入数值有 $\phi/c^2 = 1.68 \times 10^{-10}$, 这是很小的数. 式 (14) 近似为

$$t - T_0 \approx -\frac{\phi}{c^2} T_0. \quad (16)$$

类似地, 地面上的钟的示数 T 与无限远惯性系的钟的示数之差

$$T - T_0 = \sqrt{1 - 2\frac{\phi_E}{c^2}} T_0 - T_0 = (\sqrt{1 - 2\frac{\phi_E}{c^2}} - 1) T_0. \quad (17)$$

地面上的钟所处的重力势能的大小为

$$\phi_E = \frac{GM}{R} = gR. \quad (18)$$

所以 $\frac{\phi_E}{c^2} = \frac{gR}{c^2}$;

代入数值有 $\phi_E/c^2 = 6.96 \times 10^{-10}$, 这是很小的数. 与上面的情形类似, 式 (17) 近似为

$$T - T_0 \approx - \frac{\phi_E}{c^2} T_0 . \quad (19)$$

(16), (19) 两式相减, 即得卫星上的钟的示数与地面上的钟的示数之差

$$t - T \approx - \frac{\phi - \phi_E}{c^2} T_0 . \quad (20)$$

从式 (19) 中解出 T_0 , 并代入式 (20) 得

$$t - T \approx - \frac{\phi - \phi_E}{c^2} / (1 - \frac{\phi_E}{c^2}) T \approx - \frac{\phi - \phi_E}{c^2} T = \frac{gR}{c^2} \frac{h}{R+h} T . \quad (21)$$

注意, 题目中的 24 h 是指地面的钟走过的时间 T . 最后, 算出 24 h 卫星上的钟的示数与地面上的钟的示数之差

$$t - T = 46 \mu s . \quad (22)$$

三、

1. 依题意, 为使室内温度保持不变, 热泵向室内放热的功率应与房间向室外散热的功率相等. 设热泵在室内放热的功率为 q , 需要消耗的电功率为 P , 则它从室外 (低温处) 吸收热量的功率为 $q - P$. 根据题意有

$$\frac{q - P}{P} \leq \frac{T_2}{T_1 - T_2} , \quad (1)$$

式中 T_1 为室内 (高温处) 的绝对温度, T_2 为室外的绝对温度. 由 (1) 式得

$$P \geq \frac{T_1 - T_2}{T_1} q . \quad (2)$$

显然, 为使电费最少, P 应取最小值; 即式 (2) 中的 “ \geq ” 号应取等号, 对应于理想情况下 P 最小. 故最小电功率

$$P_{\min} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} q . \quad (3)$$

又依题意, 房间由玻璃板通过热传导方式向外散热, 散热的功率

$$H = k \frac{T_1 - T_2}{l} S . \quad (4)$$

要保持室内温度恒定, 应有

$$q = H . \quad (5)$$

由 (3) ~ (5) 三式得

$$P_{\min} = k \frac{S(T_1 - T_2)^2}{lT_1} . \quad (6)$$

设热泵工作时间为 t ，每度电的电费为 c ，则热泵工作需花费的最少电费

$$C_{\min} = P_{\min} tc . \quad (7)$$

注意到 $T_1 = 20.00 \text{ K} + 273.15 \text{ K} = 293.15 \text{ K}$ ， $T_2 = -5.00 \text{ K} + 273.15 \text{ K} = 268.15 \text{ K}$ ，1 度电 = $1 \text{ kW} \cdot \text{h}$ 。由 (6)，(7) 两式，并代入有关数据得

$$C_{\min} = \frac{(T_1 - T_2)^2}{T_1 l} Sktc = 23.99 \text{ 元} . \quad (8)$$

所以，在理想情况下，该热泵工作 12 h 需约 24 元电费。

2. 设中间空气层内表面的温度为 T_i ，外表面的温度为 T_0 ，则单位时间内通过内层玻璃、中间空气层和外层玻璃传导的热量分别为

$$H_1 = k \frac{T_1 - T_i}{l} S , \quad (9)$$

$$H_2 = k_0 \frac{T_i - T_0}{l_0} S , \quad (10)$$

$$H_3 = k \frac{T_0 - T_2}{l} S . \quad (11)$$

在稳定传热的情况下，有

$$H_1 = H_2 = H_3 . \quad (12)$$

由 (9) ~ (12) 四式得

$$k \frac{T_1 - T_i}{l} = k_0 \frac{T_i - T_0}{l_0} \quad \text{和} \quad T_1 - T_i = T_0 - T_2 . \quad (13)$$

解式 (13) 得

$$T_i = \frac{l_0 k + l k_0}{l_0 k + 2l k_0} T_1 + \frac{l k_0}{l_0 k + 2l k_0} T_2 . \quad (14)$$

将 (14) 式代入 (9) 式得

$$H_1 = \frac{k k_0}{l_0 k + 2l k_0} (T_1 - T_2) S . \quad (15)$$

要保持室内温度恒定，应有 $q = H_1$ 。由式 (3) 知，在双层玻璃情况下热泵消耗的最小电功率

$$P'_{\min} = \frac{k k_0}{l_0 k + 2l k_0} \frac{(T_1 - T_2)^2}{T_1} S . \quad (16)$$

在理想情况下，热泵工作时间 t 需要的电费

$$C'_{\min} = P'_{\min} tc ; \quad (17)$$

代入有关数据得

$$C'_{\min} = 2.52 \text{ 元} . \quad (18)$$

所以，改用所选的双层玻璃板后，该热泵工作 12 h 可以节约的电费

$$\Delta C_{\min} = C_{\min} - C'_{\min} = 21.47 \text{ 元} . \quad (19)$$

四、

1. 先假设由于隧穿效应，单电子能从电容器的极板 A 隧穿到极板 B . 以 Q 表示单电子隧穿前极板 A 所带的电荷量， V_{AB} 表示两极板间的电压（如题目中图 3 所示），则有

$$V_{AB} = Q / C . \quad (1)$$

这时电容器储能

$$U = \frac{1}{2} C V_{AB}^2 . \quad (2)$$

当单电子隧穿到极板 B 后，极板 A 所带的电荷量为

$$Q' = Q + e , \quad (3)$$

式中 e 为电子电荷量的大小. 这时，电容器两极板间的电压和电容器分别储能为

$$V'_{AB} = \frac{Q+e}{C} , \quad U' = \frac{1}{2} C V'^2_{AB} . \quad (4)$$

若发生库仑阻塞，即隧穿过程被禁止，则要求

$$U' - U > 0 . \quad (5)$$

由 (1) ~ (5) 五式得

$$V_{AB} > -\frac{1}{2} \frac{e}{C} . \quad (6)$$

再假设单电子能从电容器的极板 B 隧穿到极板 A . 仍以 Q 表示单电子隧穿前极板 A 所带的电荷量， V_{AB} 表示两极板间的电压. 当单电子从极板 B 隧穿到极板 A 时，极板 A 所带的电荷量为 $Q' = Q - e$. 经过类似的计算，可得单电子从极板 B 到极板 A 的隧穿不能发生的条件是

$$V_{AB} < \frac{1}{2} \frac{e}{C} . \quad (7)$$

由 (6), (7) 两式知，当电压 V_{AB} 在 $-e/2C \sim e/2C$ 之间时，单电子隧穿受到库仑阻塞，即库仑阻塞的条件为

$$-\frac{1}{2} \frac{e}{C} < V_{AB} < \frac{1}{2} \frac{e}{C} . \quad (8)$$

2. 依题意和式 (8) 可知，恰好能发生隧穿时有

$$V_{AB} = \frac{1}{2} \frac{e}{C} = 0.10 \text{ mV} . \quad (9)$$

由式 (9)，并代入有关数据得

$$C = 8.0 \times 10^{-16} \text{ F} . \quad (10)$$

3. 设题目中图 3 中左边的 MIM 结的电容为 C_S ，右边的 MIM 结的电容为 C_D 。双结结构体系如图 a 所示，以 Q_1 ， Q_2 分别表示电容 C_S ， C_D 所带的电荷量。根据题意，中间单电子岛上的电荷量为

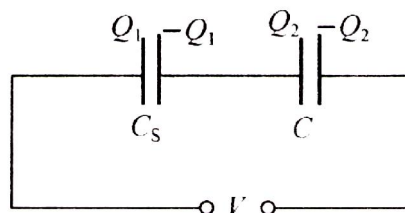


图 a

$$-ne = Q_2 - Q_1. \quad (11)$$

体系的静电能为 C_S 和 C_D 中静电能的总和，即

$$U = \frac{Q_1^2}{2C_S} + \frac{Q_2^2}{2C_D}; \quad (12)$$

电压

$$V = \frac{Q_1}{C_S} + \frac{Q_2}{C_D}. \quad (13)$$

由 (11) ~ (13) 三式解得

$$U = \frac{1}{2}CV^2 + \frac{(Q_2 - Q_1)^2}{2(C_S + C_D)}. \quad (14)$$

由于 V 为恒量，从式 (13) 可知体系的静电能中与岛上净电荷相关的静电能 $U_n = (-ne)^2 / 2(C_S + C_D)$ 。

4. U_n 随 $C_G V_G$ 变化的图线如图 b； $C_G V_G / e$ 的变化范围如表 2。

表 2

n	0	1	2	3
$C_G V_G / e$ 的变化范围	0~0.5	0.5~1.5	1.5~2.5	2.5~3.0

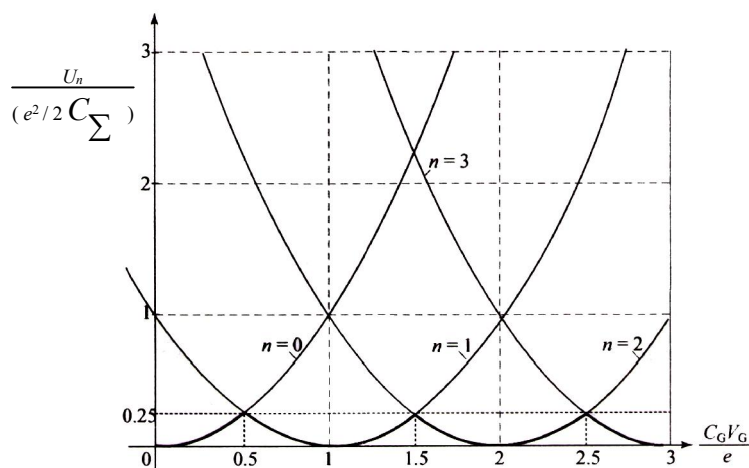


图 b

五、

1. 在图 1 中, z 轴垂直于 AB 面. 考察平行光束中两条光线分别在 AB 面上 C 与 C' 点以入射角 i 射入透明圆柱时的情况, r 为折射角, 在圆柱体中两折射光线分别射达圆柱面的 D 和 D' , 对圆柱面其入射角分别为 i_2 与 i'_2 . 在 $\triangle OCD$ 中, O 点与入射点 C 的距离 y_c 由正弦定理得

$$\frac{y_c}{\sin i_2} = \frac{R}{\sin(90^\circ + r)}, \text{ 即 } y_c = \frac{\sin i_2}{\cos r} R. \quad (1)$$

同理在 $\triangle OC'D'$ 中, O 点与入射点 C' 的距离有

$$\frac{y_{c'}}{\sin i'_2} = \frac{R}{\sin(90^\circ - r)}, \text{ 即 } y_{c'} = \frac{\sin i'_2}{\cos r} R. \quad (2)$$

当改变入射角 i 时, 折射角 r 与柱面上的入射角 i_2 与 i'_2 亦随之变化. 在柱面上的入射角满足临界角

$$i_{20} = \arcsin(1/n) \approx 41.8^\circ \quad (3)$$

时, 发生全反射. 将 $i_2 = i'_2 = i_{20}$ 分别代入式 (1), (2) 得

$$y_{oc} = y_{oc'} = \frac{\sin i_{20}}{\cos r} R, \quad (4)$$

$$\text{即 } d = 2y_{oc} = 2 \frac{\sin i_{20}}{\cos r} R. \quad (5)$$

当 $y_c > y_{oc}$ 和 $y_{c'} > y_{oc'}$ 时, 入射光线进入柱体, 经过折射后射达柱面时的入射角大于临界角 i_{20} , 由于发生全反射不能射出柱体. 因折射角 r 随入射角 i 增大而增大. 由式 (4) 知, 当 $r = 0$, 即 $i = 0$ (垂直入射) 时, d 取最小值

$$d_{\min} = 2R \sin i_{20} = 1.33 R. \quad (6)$$

当 $i \rightarrow 90^\circ$ (掠入射) 时, $r \rightarrow 41.8^\circ$. 将 $r = 41.8^\circ$ 代入式 (4) 得 $d_{\max} = 1.79 R$. (7)

2. 由图 2 可见, φ 是 Oz 轴与线段 OD 的夹角, φ' 是 Oz 轴与线段 OD' 的夹角. 发生全反射时, 有

$$\varphi = i_{20} + r, \quad (8)$$

$$\varphi' = i_{20} - r, \quad (9)$$

$$\text{和 } \theta = \varphi + \varphi' = 2i_{20} \approx 83.6^\circ. \quad (10)$$

由此可见, θ 与 i 无关, 即 θ 独立于 i . 在掠入射

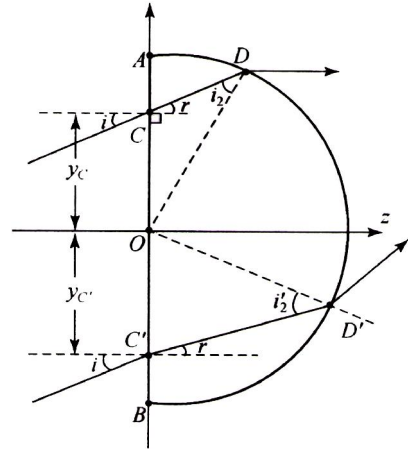


图 1

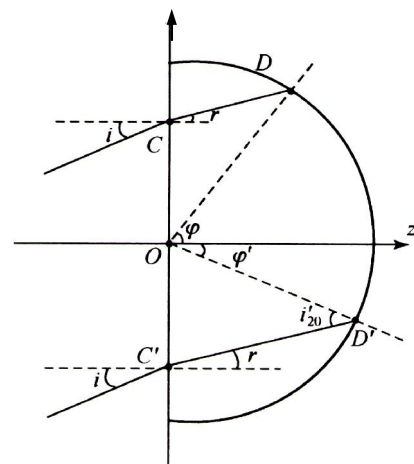


图 2

时, $i \approx 90^\circ$, $r = 41.8^\circ$, 由式 (8), (9) 两式得

$$\varphi = 83.6^\circ, \quad \varphi' = 0^\circ. \quad (11)$$

六、

由于方程

$$r = \frac{GM/c^2}{a \cos\varphi + a^2(1 + \sin^2\varphi)} \quad (1)$$

是 φ 的偶函数, 光线关于极轴对称. 光线在坐标原点左侧的情形对应于 $a < 0$; 光线在坐标原点右侧的情形对应 $a > 0$. 右图是 $a < 0$ 的情形, 图中极轴为 Ox , 白矮星在原点 O 处. 在式 (1) 中代入近星点坐标 $r = r_m$, $\varphi = \pi$, 并注意 $a^2 \ll |a|$, 有

$$a \approx -GM/c^2 r_m. \quad (2)$$

经过白矮星两侧的星光对观测者所张的视角 θ_s 可以有不同的表达方式, 相应的问题有不同的解法.

解法一: 若从白矮星到地球的距离为 d , 则可近似地写出

$$\theta_s \approx 2r_m/d. \quad (3)$$

在式 (1) 中代入观测者的坐标 $r = d$, $\varphi = -\pi/2$, 有

$$a^2 \approx GM/2c^2 d. \quad (4)$$

由 (2) 与 (4) 两式消去 a , 可以解出

$$r_m = \sqrt{2GMd/c^2}. \quad (5)$$

把式 (5) 代入式 (3) 得

$$\theta_s \approx \sqrt{8GM/c^2 d}; \quad (6)$$

即
$$M \approx \theta_s^2 c^2 d / 8G, \quad (7)$$

其中 $d = 3.787 \times 10^{17} \text{ m}$; 代入数值就可算出

$$M \approx 2.07 \times 10^{30} \text{ kg}. \quad (8)$$

解法二: 光线射向无限远处的坐标可以写成

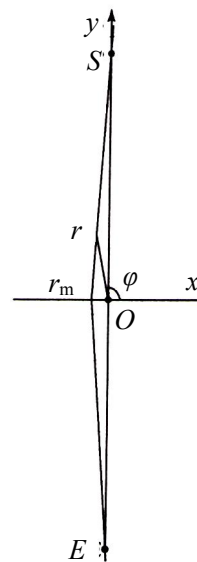
$$r \rightarrow \infty, \quad \varphi = -\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}. \quad (9)$$

近似地取 $\theta_s \approx \theta$, 把式 (9) 代入式 (1), 要求式 (1) 分母为零, 并注意 $\theta \ll 1$, 有

$$a\theta/2 + 2a^2 = 0.$$

所以
$$\theta_s \approx \theta = -4a = \sqrt{8GM/c^2 d}, \quad (10)$$

其中用到式 (4), 并注意 $a < 0$. 式 (10) 与式 (6) 相同, 从而也有式 (8).



解法三：星光对观测者所张的视角 θ_s 应等于两条光线在观测者处切线的夹角，有

$$\sin \frac{\theta_s}{2} = \frac{\Delta(r \cos \varphi)}{\Delta r} = \cos \varphi - r \sin \varphi \frac{\Delta \varphi}{\Delta r} . \quad (11)$$

由光线方程 (1) 算出 $\Delta \varphi / \Delta r$ ，有

$$\sin \frac{\theta_s}{2} = \cos \varphi - r \sin \varphi \frac{GM/c^2}{r^2 a \sin \varphi} = \cos \varphi - \frac{GM}{c^2 r a} ;$$

代入观测者的坐标 $r = d$ ， $\varphi = -\pi/2$ 以及 a 的表达式 (4)，并注意到 θ_s 很小，就有

$$\theta_s \approx \frac{2GM}{c^2 d} \sqrt{\frac{2c^2 d}{GM}} = \sqrt{\frac{8GM}{c^2 d}} ,$$

与式 (6) 相同。所以，也得到了式 (8)。

解法四：用式 (2) 把方程 (1) 改写成

$$-r_m = r \cos \varphi - \frac{GM}{c^2 r_m r} [(r \cos \varphi)^2 + 2(r \sin \varphi)^2] ,$$

即
$$x = -r_m + \frac{GM}{c^2 r_m r} (x^2 + 2y^2) . \quad (12)$$

当 $y \rightarrow -\infty$ 时，式 (12) 的渐近式为

$$x = -r_m - \frac{2GM}{c^2 r_m} y .$$

这是直线方程，它在 x 轴上的截距为 $-r_m$ ，斜率为

$$\frac{1}{-2GM/c^2 r_m} \approx \frac{1}{-\tan(\theta_s/2)} \approx -\frac{1}{\theta_s/2} .$$

于是有 $\theta_s \approx 4GM/c^2 r_m$ 。 r_m 用式 (5) 代入后，得到式 (6)，从而也有式 (8)。

七、

1. (I) 氦原子中有两个电子，一级电离能 E^+ 是把其中一个电子移到无限远处所需要的能量满足 $\text{He} + E^+ \rightarrow \text{He}^+ + e^-$ 。为了得到氦原子的一级电离能 E^+ ，需要求出一个电子电离以后氦离子体系的能量 E^* 。这是一个电子围绕氦核运动的体系，下面给出两种解法。

解法一：在力学方程

$$\frac{2ke^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

中， r 是轨道半径， v 是电子速度。对基态，用玻尔量子化条件（角动量为 \hbar ）可以解出

$$r_0 = \hbar^2 / 2ke^2 m . \quad (1)$$

于是氦离子能量

$$E^* = \frac{p_0^2}{2m} - \frac{2ke^2}{r_0} = -\frac{2k^2 e^4 m}{\hbar^2} , \quad (2)$$

其中 p_0 为基态电子动量的大小；代入数值得

$$E^* = - \frac{2(ke^2)^2 mc^2}{(\hbar c)^2} \approx -54.4 \text{ eV} . \quad (3)$$

由于不计电子间的相互作用，氦原子基态的能量 E_0 是该值的 2 倍，即

$$E_0 = 2E^* \approx -108.8 \text{ eV} . \quad (4)$$

氦离子能量 E^+ 与氦原子基态能量 E_0 之差就是氦原子的一级电离能

$$E^+ = E^* - E_0 = -E^* \approx 54.4 \text{ eV} . \quad (5)$$

解法二：氦离子能量

$$E^* = \frac{p^2}{2m} - \frac{2ke^2}{r} .$$

把基态的角动量关系 $rp = \hbar$ 代入，式 (3) 可以改写成

$$E^* = \frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{2ke^2}{r} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{r} - \frac{2ke^2 m}{\hbar^2} \right)^2 - \frac{2k^2 e^4 m}{\hbar^2} .$$

因基态的能量最小，式 (4) 等号右边的第一项为零，所以半径和能量

$$r_0 = \frac{\hbar^2}{2ke^2 m} , \quad E^* = - \frac{2k^2 e^4 m}{\hbar^2}$$

分别与 (1), (2) 两式相同.

(II) 下面，同样给出求氦原子基态能量 E_0 和半径 r_0 的两种解法.

解法一：利用力学方程

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{2ke^2}{r^2} - \frac{ke^2}{(2r)^2} = \frac{7ke^2}{4r^2}$$

和基态量子化条件 $rmv = \hbar$ ，可以解出半径

$$r_0 = 4 \hbar^2 / 7ke^2 m , \quad (6)$$

于是氦原子基态能量

$$E_0 = 2 \left(\frac{p_0^2}{2m} - \frac{2ke^2}{r_0} \right) + \frac{ke^2}{2r_0} = - \frac{49k^2 e^4 m}{16 \hbar^2} ; \quad (7)$$

代入数值算得

$$E_0 = - \frac{49(ke^2)^2 mc^2}{16(\hbar c)^2} \approx -83.4 \text{ eV} , \quad (8)$$

$$r_0 = \frac{4(\hbar c)^2}{7ke^2 mc^2} \approx 0.0302 \text{ nm} .$$

所以，氦原子的一级电离能

$$E^+ = E^* - E_0 \approx 29.0 \text{ eV} . \quad (9)$$

这仍比实验测得的氦原子一级电离能 24.6 eV 高出 4.4 eV .

解法二：氢原子能量

$$E = 2 \left(\frac{p^2}{2m} - \frac{2ke^2}{r} \right) + \frac{ke^2}{2r} = \frac{\hbar^2}{mr^2} - \frac{7ke^2}{2r}$$

可以化成

$$E = \frac{\hbar^2}{m} \left(\frac{1}{r} - \frac{7ke^2m}{4\hbar^2} \right)^2 - \frac{49k^2e^4m}{16\hbar^2} .$$

当上式等号右边第一项为零时，能量最小。由此可知，基态能量与半径

$$E_0 = - \frac{49k^2e^4m}{16\hbar^2} , \quad r_0 = \frac{4\hbar^2}{7ke^2m}$$

分别与 (7)，(6) 两式相同。

2. (I) 粒子从下部射向并穿过铅板向上运动，其电荷为正。

(II) 如题图所示，粒子的运动速度 v 与磁场方向垂直，洛伦兹力在纸面内；磁力不改变荷电粒子动量的大小，只改变其方向。若不考虑云室中气体对粒子的阻力，荷电粒子在恒定磁场作用下的运动轨迹就是曲率半径为一定值的圆弧；可以写出其运动方程

$$qBv = \left| \frac{\Delta p}{\Delta t} \right| = \frac{p \Delta \phi}{\Delta t} = \frac{pv}{r}, \quad (1)$$

其中 q 是粒子电荷， v 是粒子速度的大小， p 是粒子动量的大小， $\Delta \phi$ 是粒子在 Δt 时间内转过的角度， r 是轨迹曲率半径。于是有

$$p = qBr . \quad (2)$$

按题意， $q = e$ 。用 p_d 和 p_u 分别表示粒子射入铅板和自铅板射出时动量的大小，并在式 (1) 中代入有关数据，可以算得

$$p_d = 63.0 \text{ MeV} / c , \quad p_u = 22.8 \text{ MeV} / c . \quad (3)$$

注意到当 $pc \ll mc^2$ 时应使用狭义相对论，从

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} . \quad (4)$$

中可以得到

$$v = \frac{c}{\sqrt{1 + (mc/p)^2}} . \quad (5)$$

用 v_d 和 v_u 分别表示粒子进入和离开铅板时的速度大小。把式 (2) 以及 $m = 0.511 \text{ MeV} / c^2$ 代入式 (3)，可得

$$v_d \approx c , \quad v_u \approx c . \quad (6)$$

于是，粒子穿过铅板的平均速度 $\bar{v} = (1/2)(v_d + v_u) \approx c$ 。用 Δt 表示粒子穿过铅板的时间

间，则有

$$\bar{v} \cos\theta \Delta t = d . \quad (7)$$

再用 Δp_{du} 表示粒子穿过铅板动量改变量的大小，铅板所受到的平均力的大小

$$f = \frac{\Delta p_{du}}{\Delta t} = \frac{p_d - p_u}{d / (\bar{v} \cos\theta)} \approx \frac{(p_d - p_u) c \cos\theta}{d} ; \quad (8)$$

代入有关数值得

$$f \approx 1.04 \times 10^{-9} \text{ N} . \quad (9)$$

(III) 一个粒子穿过铅板的时间

$$\Delta t = \frac{d}{v \cos\theta} \approx \frac{d}{c \cos\theta} \approx 2.07 \times 10^{-11} \text{ s} = 0.0207 \text{ ns} , \quad (10)$$

比粒子束流的脉冲周期 $\tau = 2.50 \text{ ns}$ 小得多。铅板在此脉冲粒子束穿过期间所受的力的平均大小

$$F \approx (p_d - p_u) j ; \quad (11)$$

代入数据得

$$F = 0.107 \text{ N} . \quad (12)$$

运用式 (4)，可把粒子能量写成

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} , \quad (13)$$

所以粒子穿过铅板前后的能量分别为

$$E_d = \sqrt{p_d^2 c^2 + m^2 c^4} = 63.0 \text{ MeV} , \quad E_u = \sqrt{p_u^2 c^2 + m^2 c^4} = 22.8 \text{ MeV} . \quad (14)$$

于是，铅板在脉冲粒子束穿过期间所吸收的热量

$$Q = (E_d - E_u) j \tau ; \quad (15)$$

代入数据得

$$Q = 8.04 \times 10^{-2} \text{ J} . \quad (16)$$

$$r = f \cot(2\alpha) \quad (2)$$

两式联立，可求得

$$x = R \sin\left(\frac{1}{2} \arctan \frac{f}{r}\right)。 \quad (3)$$

评分标准：正确画出光路图 5 分，(3) 式 5 分。