第 31 届全国中学生物理竞赛预赛试卷

本卷共 16 题，满分 200 分，

．一、选择题．本题共 5 小题，每小题 6 分．在每小题给出的 4 个项中，有的小题只有一项符合题意，有的小题有多项符合题意．把符合题意的选项前面的英文字母写在每小题后面的方括号内．全部选对的得 6 分，选对但不全的得 3 分，有选错或不答的得 0 分．

1．（6 分）一线膨胀系数为α的正立方体物块，当膨胀量较小时，其体膨胀系数等于

A．α　　B．$α^{1/3}$　　C．$α^3$　　D．3α

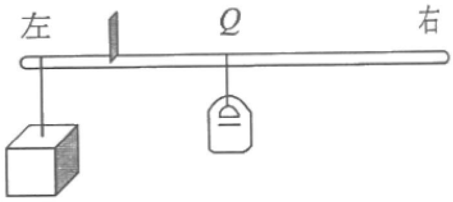
2．（6 分）按如下原理制作一杆可直接测量液体密度的秤，称为密度秤，其外形和普通的杆秤差不多，装秤钩的地方吊着一体积为 1 cm3 的较重的合金块，杆上有表示液体密度数值的刻度，当秤砣放在 Q 点处时秤杆恰好平衡，如图所示．当合金块完全浸没在待测密度的液体中时，移动秤砣的悬挂点，直至秤杆恰好重新平衡，便可直接在杆秤上读出液体的密度，下列说法中错误的是

A．密度秤的零点刻度在 Q 点

B．秤杆上密度读数较大的刻度在较小的刻度的左边

C．密度秤的刻度都在 Q 点的右侧

D．密度秤的刻度都在 Q 点的左侧



3．（6 分）一列简谐横波在均匀的介质中沿 x 轴正向传播，两质点 P_1 和 p_2 的平衡位置在 x 轴上，它们相距 60cm，当 P_1 质点在平衡位置处向上运动时，P_2 质点处在波谷位置，若波的传播速度为 24m/s，则该波的频率可能为

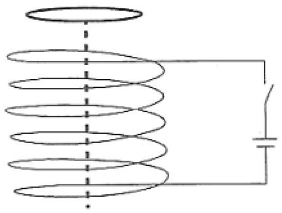
A．50Hz

B．60Hz

C．400Hz

D．410Hz

4．（6 分）电磁驱动是与炮弹发射、航空母舰上飞机弹射起飞有关的一种新型驱动方式．电磁驱动的原理如图所示，当直流电流突然加到一固定线圈上，可以将置于线圈上的环弹射出去．现在同一个固定线圈上，先后置有分别用铜、铝和硅制成的形状、大小和横截面积均相同的三种环,当电流突然接通时，它们所受到的推力分别为 F_1、F_2 和 F_3。若环的重力可忽略，



下列说法正确的是

A. $F_1 > F_2 > F_3$

B. $F_2 > F_3 > F_1$

C. $F_3 > F_2 > F_1$

D. $F_1 = F_2 = F_3$

5．（6 分）质量为 m_A 的 A 球，以某一速度沿光滑水平面向静止的 B 球运动，并与 B 球发生弹性正碰，假设 B 球的质量 m_B 可选取为不同的值，则

A．当 $m_B=m_A$ 时，碰后 B 球的速度最大

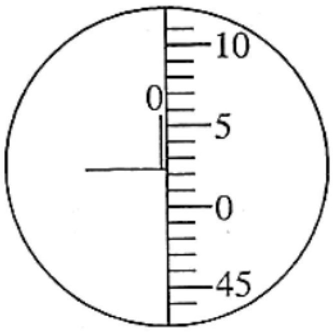
B．当 $m_B=m_A$ 时，碰后 B 球的动能最大

C．在保持 $m_B>m_A$ 的条件下，m_B 越小，碰后 B 球的速度越大

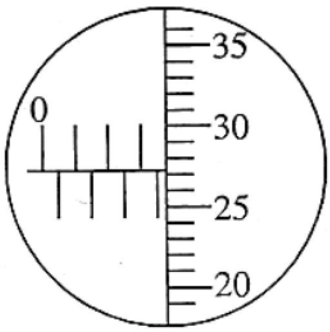
D．在保持 $m_B<m_A$ 的条件下，m_B 越大，碰后 B 球的动量越大

二、填空题．把答案填在题中的横线上．只要给出结果，不需写出求得结果的过程．

6．（10 分）用国家标准一级螺旋测微器（直标度尺最小分度为 0. 5mm，丝杆螺距为 0.5mm，套管上分为 50 格刻度）测量小球直径．测微器的初读数如图(a)所示，其值为______mm，测量时如图(b)所示，其值为_______mm，测得小球直径 d=____________________mm.



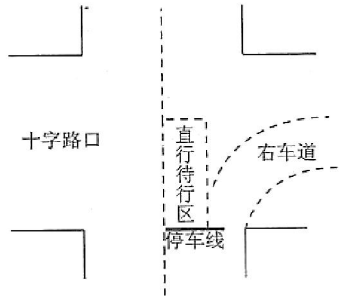
图(a)



图(b)

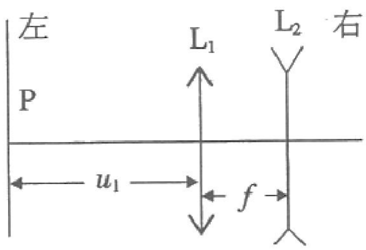
中国科学技术大学物理学院叶邦角整理

7.（10 分）为了缓解城市交通拥堵问题，杭州交通部门在禁止行人步行的十字路口增设“直行待行区”（行人可从天桥或地下过道过马路），如图所示，当其他车道的车辆右拐时，直行道上的车辆可以提前进入“直行待行区”；当直行绿灯亮起时，可从“直行待行区”直行通过十字路口．假设某十字路口限速 50km/h，“直行待行区”的长度为 12m，从提示进入“直行待行区”到直行绿灯亮起的时间为 4s.如果某汽车司机看到上述提示时立即从停车线由静止开始匀加速直线运动，运动到“直行待行区”的前端虚线处正好直行绿灯亮起，汽车总质量为 1. 5t，汽车运动中受到的阻力恒为车重的 0.1 倍，则该汽车的行驶加速度为________；在这 4s 内汽车发动机所做的功为___________。



（重力加速度大小取 $10m/s^2$）

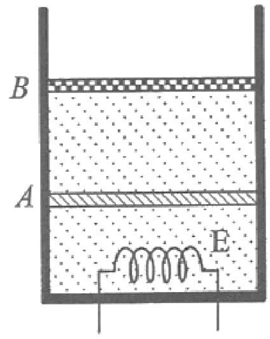
8.（10 分）如图所示，两个薄透镜 L_1 和 L_2 共轴放置．已知 L1 的焦距 f_1=f，L_2 的焦距 f_2=-f，两透镜间的距离也是 f，小物体位于物面 P 上，物距 u_1=3f



(1)小物体经过这两个透镜成的像在 L_2 的__________边，到 L_2 的距离为______________，是__________像（填“实”或“虚”）、____________像（填“正”或“倒”），放大率为_____.

(2)现把两个透镜位置调换，若还要使给定的原物体在原像处成像，两透镜作为整体应沿光轴向_____________边移动距离______________这个新的像是____________像（填“实”或“虚”）、____________像（填“正”或“倒”），放大率为______________________

9.（10 分）图中所示的气缸壁是绝热的．缸内隔板 A 是导热的，它固定在缸壁上．活塞 B 是绝热的，它与缸壁的接触是光滑的，但不漏气.B 的上方为大气.A 与 B 之间以及 A 与缸底之间都盛有 n mol 的同种理想气体．系统在开始时处于平衡状态，现通过电炉丝 E 对气体缓慢加热．在加热过程中，A、B 之间的气体经历_________过程，A 以下气体经历________过程；气体温度每上升 1K，A、B 之间的气体吸收的热量与 A 以下气体净吸收的热量之差等于_____________．已知普适气体常量为 R.

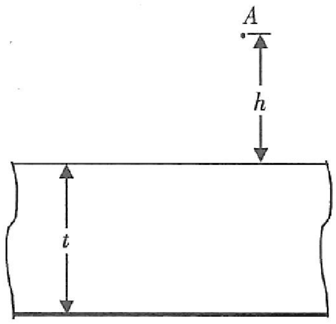


中国科学技术大学物理学院叶邦角整理

10.（10 分）宇宙空间某区域有一磁感应强度大小为 $B=1.0\times10^{-9}$T 的均匀磁场，现有一电子绕磁力线做螺旋运动．该电子绕磁力线旋转一圈所需的时间间隔为______________s；若该电子沿磁场方向的运动速度为 $1.0\times10^{-2}c$（c 为真空中光速的大小），则它在沿磁场方向前进 1.0×10^{-3} 光年的过程中，绕磁力线转了_________圈．已知电子电荷量为 1.60×10^{-19}C．电子质量为 9.11×10^{-31}kg.

三、计算题．计算题的解答应写出必要的文字说明、方程式和重要的演算步骤，只写出最后结果的不能得分．有数值计算的，答案中必须明确写出数值和单位．

11.（15 分）如图所示，一水平放置的厚度为 t 折射率为 n 的平行玻璃砖，下表面镀银（成反射镜）．一物点 A 位于玻璃砖的上方距玻璃砖的上表面为 h 处．观察者在 A 点附近看到了 A 点的像，A 点的像到 A 点的距离等于多少？不考虑光经玻璃砖上表面的反射．



中国科学技术大学物理学院叶邦角整理

12.（20 分）通常电容器两极板间有多层电介质，并有漏电现象．为了探究其规律性，采用如图所示的简单模型．电容器的两极板面积均为 A，其间充有两层电介质 1 和 2，第 1 层电介质的介电常数、电导率（即电阻率的倒数）和厚度分别为 $\varepsilon_1\sigma_1$ 和 d_1，第 2 层电介质的则为 $\varepsilon_2\sigma_2$ 和 d_2.现在两极板加一直流电压 U，电容器处于稳定状态．

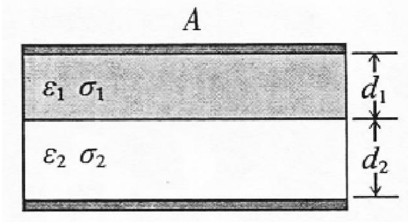
(1)画出等效电路图；

(2)计算两层电介质所损耗的功率；

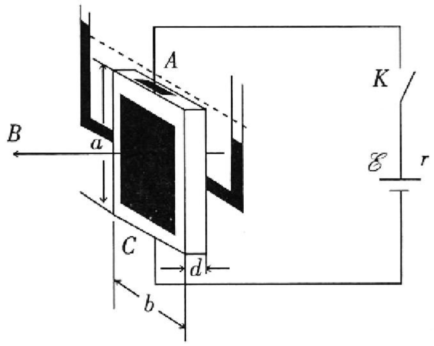
(3)计算两介质交界面处的净电荷量；

提示：充满漏电电介质的电容器可视为一不漏电电介质的理

想电容和一纯电阻的并联电路．



13.（20 分）如图所示，一绝缘容器内部为立方体空腔，其长和宽分别为 a 和 b，厚度为 d，其两侧等高处装有两根与大气相通的玻璃管（可用来测量液体两侧的压强差）．容器内装满密度为 ρ 的导电液体，容器上下两端装有铂电极 A 和 C，这样就构成了一个液体电阻．该液体电阻置于一方向与容器的厚度方向平行的均匀恒定的磁感应强度为 B 的磁场中，并通过开关 K 接在一电动势为 ε 内阻为 r 的电池的两端．闭合开关．若稳定时两侧玻璃管中液面的高度差为 h，求导电液体的电导率 σ 重力加速度大小为 g.



中国科学技术大学物理学院叶邦角整理

14.（20 分）1 mol 的理想气体经历一循环过程 1 -2 -3 -1，如 p-T 图示所示，过程 1-2 是等压过程，过程 3 -1 是通过 p-T 图原点的直线上的一段，描述过程 2-3 的方程为

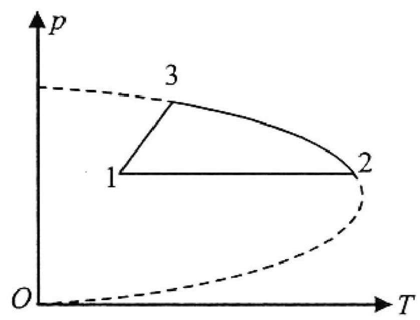
$$c_1p^2+c_2p=T$$

式中 c_1 和 c_2 都是待定的常量，p 和 T 分别是气体的压强和绝对温度．已知，气体在状态 1 的压强、绝对温度分别为 P_1 和 T_1，气体在状态 2 的绝对温度以及在状态 3 的压强和绝对温度分别为 T_2 以及 p_3 和 T_3．气体常量 R 也是已知的．

(1)求常量 c_1 和 c_2 的值；

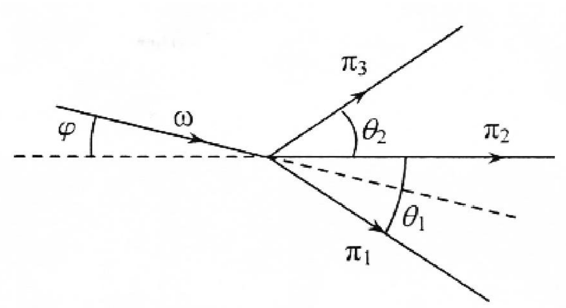
(2)将过程 1-2 -3 -1 在 p-v 图示上表示出来；

(3)求该气体在一次循环过程中对外做的总功．



中国科学技术大学物理学院叶邦角整理

15.（20 分）一个 ω 介子飞行时衰变成静止质量均为 m 的三个 π 介子，这三个 π 介子的动量共面，已知：衰变前后介子运动的速度都远小于光在真空中的速度 c；衰变后的三个 π 介子的动能分别为 T_1、T_2 和 T_3，且第一、二个 π 介子飞行方向之间的夹角为 θ_1，第二、三个 π 介子飞行方向之间的夹角为 θ_2（如图所示）；介子的动能等于介子的能量与其静止时的能量（即其静止质量与 c^2 的乘积）之差，求 ω 介子在衰变前的瞬间的飞行方向（用其飞行方向与衰变后的第二个介子的飞行方向的夹角即图中的φ角表示）及其静止质量.



中国科学技术大学物理学院叶邦角整理

16.（25 分）一圆盘沿顺时针方向绕过圆盘中心 O 并与盘面垂直的固定水平转轴以匀角速度 $\omega=4.43\mathrm{rad/s}$ 转动．圆盘半径 $r=1.00\mathrm{m}$，圆盘正上方有一水平天花板．设圆盘边缘各处始终有水滴被甩出，现发现天花板上只有一点处有水．取重力加速度大小 $g=9.80\mathrm{m/s^2}$.求

(1)天花板相对于圆盘中心轴 O 点的高度；

(2)天花板上有水的那一点的位置坐标．

中国科学技术大学物理学院叶邦角整理

第31届全国中学生物理竞赛预赛试卷

参考解答与评分标准

一、选择题.

本题共5小题，每小题6分. 在每小题给出的4个选项中，有的小题只有一项符合题意，有的小题有多项符合题意. 把符合题意的选项前面的英文字母写在每小题后面的方括号内. 全部选对的得6分，选对但不全的得3分，有选错或不答的得0分.

1.[D]；　2.[C]；　3.[AD]；　4.[A]；　5.[BCD]

二、填空题. 把答案填在题中的横线上. 只要给出结果，不需写出求得结果的过程.

6.(10分)

答案：0.022～0.024mm，3分

3.772～3.774mm，3分

3.748～3.752mm，4分(若有效位数错，不给这4分)

7.(10分)

答案：$1.5\,\mathrm{m/s^2}$，5分；$4.5\times10^4\,\mathrm{J}$，5分

8.(10分)

答案：(1) 右，f，实，倒，1. 每空1分；

(2) 左，$2f$，实，倒，1. 每空1分.

9.(10分)

答案：等压，2分；　等容，2分；　nR，6分

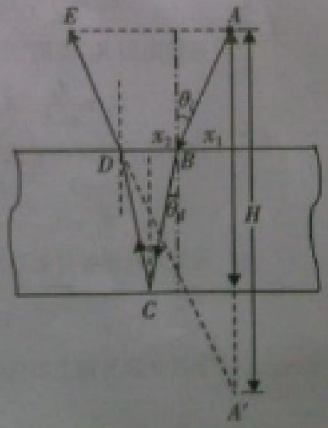
10.(10分)

答案：3.6×10^{-2}，5分；　8.8×10^{7}，5分.

三、计算题.

计算题的解答应写出必要的文字说明、方程式和重要的演算步骤，只写出最后结果的不能得分. 有数值计算的，答案中必须明确写出数值和单位.

11.(15分)



解法一：

由折射定律得

$$\sin\theta_i = n\sin\theta_d \quad ①$$

由几何关系得

$$x_1 = h\tan\theta_i \quad ②$$

$$x_2 = t\tan\theta_d \quad ③$$

$$H = 2(x_1 + x_2)\tan(90° - \theta_i) \quad ④$$

式中，H为物A到像A'的距离.

在小角度近似下有

$$\tan\theta_i \approx \sin\theta_i,$$

$$\tan\theta_d \approx \sin\theta_d,$$

中国科学技术大学物理学院叶邦角整理

$$\tan(90^\circ-\theta_t)\approx\frac{1}{\sin\theta_t}$$ ⑤

联立以上各式得

$$H=2\left(h+\frac{t}{n}\right)$$ ⑥

解法二：

由折射定律得

$$\sin\theta_t=n\sin\theta_d$$ ①

由几何关系有

$$x_1=h\tan\theta_t$$ ②

$$x_2=t\tan\theta_d$$ ③

$$H-h=(x_1+2x_2)\tan(90^\circ-\theta_t)$$ ④

式中，H 为物 A 到像 A' 的距离．

利用小角度近似关系

$$\tan\theta_t\approx\sin\theta_t,\ \tan\theta_d\approx\sin\theta_d,\ \tan(90^\circ-\theta_t)\approx1/\sin\theta_t$$ ⑤

得

$$h+\frac{2t}{n}=H-h$$

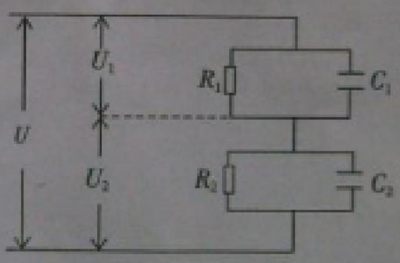
像 A' 与 A 点的距离为

$$H=2\left(h+\frac{t}{n}\right)$$ ⑥

评分标准：①式 3 分，②③④式各 2 分，⑤⑥式各 3 分．

12.（20 分）

（1）等效电路如图所示．



等效电路

（2）等效电容 C_1 和 C_2 为

$$C_1=\frac{\varepsilon_1 A}{d_1},\quad C_2=\frac{\varepsilon_2 A}{d_2}$$ ①

等效电阻 R_1 和 R_2 为

$$R_1=\frac{d_1}{\sigma_1 A},\quad R_2=\frac{d_2}{\sigma_2 A}$$ ②

两层电介质所损耗的功率为

$$P=\frac{U^2}{R_1+R_2}=\frac{U^2A\sigma_1\sigma_2}{d_1\sigma_2+d_2\sigma_1}$$ ③

（3）设两层介质各自上下界面之间的电压分别为 U_1 和 U_2．上层介质界面上的电荷为

$$Q_1=C_1U_1=\frac{\varepsilon_1 A}{d_1}\cdot\frac{R_1U}{R_1+R_2}=\frac{\varepsilon_1\sigma_2 AU}{d_1\sigma_2+d_2\sigma_1}$$ ④

下层介质界面上的电荷为

$$Q_2=C_2U_2=\frac{\varepsilon_2\sigma_1 AU}{d_1\sigma_2+d_2\sigma_1}$$ ⑤

中国科学技术大学物理学院叶邦角整理

两层介质交界面处的净电荷量为

$$Q_1 - Q_2 = \frac{AU}{d_1\sigma_2 + d_2\sigma_1}(\varepsilon_1\sigma_2 - \varepsilon_2\sigma_1) \quad ⑥$$

评分标准：第（1）问4分，等效电路图正确（没标注相应字母和箭头的，也算正确），4分；第（2）问9分，①②③式各3分；第（3）问7分，④⑤式各2分，⑥式3分．

13．（20分）

沿着电流强度 I 的方向液柱长度为 a，该液柱受到的安培力大小为：

$$F_m = BIa \quad ①$$

液柱两侧面受到的由压强差产生的压力大小为

$$F_p = \rho ghad \quad ②$$

由水平方向上力的平衡条件有

$$F_m = F_p \quad ③$$

由欧姆定律得

$$\mathscr{E} = I(R + r) \quad ④$$

式中

$$R = \frac{a}{\sigma bd} \quad ⑤$$

由以上各式解得

$$\sigma = \frac{\rho gha}{b(B\mathscr{E} - r\rho ghd)} \quad ⑥$$

评分标准：①式4分，②③④⑤式各3分，⑥式4分．

14．（20分）

（1）设气体在状态 i（$i=1$、2和3）下的压强、体积和绝对温度分别为 p_i、V_i 和 T_i，由题设条件有

$$c_1p_2^2 + c_2p_2 = T_2 \quad ①$$

$$c_1p_3^2 + c_2p_3 = T_3 \quad ②$$

由此解得

$$c_1 = \frac{T_2p_3 - T_3p_2}{p_2^2p_3 - p_3^2p_2} = \frac{T_1p_3 - T_3p_1}{p_1^2p_3 - p_3^2p_1} \quad ③$$

$$c_2 = \frac{T_2p_3^2 - T_3p_2^2}{p_2p_3^2 - p_2^2p_3} = \frac{T_1p_3^2 - T_3p_1^2}{p_1p_3^2 - p_1^2p_3} \quad ④$$

（2）利用气体状态方程 $pV = RT$，以及

$$V_1 = R\frac{T_1}{p_1},\ V_2 = R\frac{T_2}{p_2},\ V_3 = R\frac{T_3}{p_3} \quad ⑤$$

可将过程2－3的方程改写为

$$\frac{V_2 - V_3}{p_2 - p_3}p = V + \frac{V_2p_3 - V_3p_2}{p_2 - p_3} \quad ⑥$$

可见，在 $p-V$ 图示上过程2－3是以（p_2，V_2）和（p_3，V_3）为状态端点的

中国科学技术大学物理学院叶邦角整理

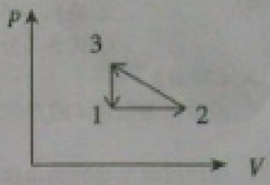
直线段．在 $p-T$ 图示中，过程 3－1 是通过原点的直线上的一段，因而描述其过程的方程为

$$\frac{p}{T}=c_3 \quad ⑦$$

式中，c_3 是一常量．利用气体状态方程 $pV=RT$，可将过程 3－1 的方程改写为

$$V=\frac{R}{c_3}=V_3=V_1 \quad ⑧$$

这是以（p_3，V_1）和（p_1，V_1）为状态端点的等容降压过程．



综上所述，过程 1－2－3－1 在 $p-V$ 图示上是一直角三角形，如图所示．

（3）气体在一次循环过程中对外做的总功为

$$W=-\frac{1}{2}(p_3-p_1)(V_2-V_1) \quad ⑨$$

利用气体状态方程 $pV=RT$ 和⑤式，上式即

$$W=-\frac{1}{2}R(T_2-T_1)\left(\frac{p_3}{p_1}-1\right) \quad ⑩$$

评分标准：第（1）问 8 分，①②③④式各 2 分；第（2）问 10 分，⑤⑥式各 2 分，过程 1－2－3－1 在 $p-V$ 图示正确，给 6 分；第（3）问 2 分，⑩式 2 分．

15.（20 分）

以第二个 π 介子的飞行方向为 x 轴，以事件平面为 $x-y$ 平面．设衰变前 ω 介子和衰变后三个 π 介子的动量大小分别为 p_ω、p_1、p_2 和 p_3．衰变前后粒子在 x 和 y 方向的总动量分别守恒

$$p_\omega\cos\varphi=p_1\cos\theta_1+p_2+p_3\cos\theta_2 \quad ①$$

$$-p_\omega\sin\varphi=-p_1\sin\theta_1+p_3\sin\theta_2 \quad ②$$

衰变前后粒子总能量守恒

$$m_\omega c^2+T_\omega=(mc^2+T_1)+(mc^2+T_2)+(mc^2+T_3) \quad ③$$

式中左端和右端三个圆括弧所示的量分别是衰变前 ω 介子和衰变后三个 π 介子的总能（静能与动能之和）．衰变前 ω 介子和衰变后三个 π 介子的总能可由分别其动量和静质量表示出来

$$T_\omega=\frac{p_\omega^2}{2m_\omega} \quad ④$$

$$T_1=\frac{p_1^2}{2m} \quad ⑤$$

$$T_2=\frac{p_2^2}{2m} \quad ⑥$$

$$T_3=\frac{p_3^2}{2m} \quad ⑦$$

分别由⑤⑥⑦式得

$$p_1=\sqrt{2mT_1} \tag{8}$$

$$p_2=\sqrt{2mT_2} \tag{9}$$

$$p_3=\sqrt{2mT_3} \tag{10}$$

联立①②⑧⑨⑩式得

$$\varphi=\arctan\frac{\sqrt{T_1}\sin\theta_1-\sqrt{T_3}\sin\theta_2}{\sqrt{T_1}\cos\theta_1+\sqrt{T_2}+\sqrt{T_3}\cos\theta_2} \tag{11}$$

$$p_w^2=2m(T_1+T_2+T_3)+4m\left[\sqrt{T_1T_3}\cos(\theta_1+\theta_2)+\sqrt{T_1T_2}\cos\theta_1+\sqrt{T_2T_3}\cos\theta_2\right] \tag{12}$$

由③④⑫式得

$$\begin{aligned}&2c^2m_w^2-2(3mc^2+T_1+T_2+T_3)m_w+2m(T_1+T_2+T_3)\\&+4m\left[\sqrt{T_1T_3}\cos(\theta_1+\theta_2)+\sqrt{T_1T_2}\cos\theta_1+\sqrt{T_2T_3}\cos\theta_2\right]=0\end{aligned} \tag{13}$$

其解为

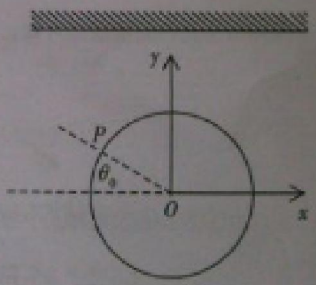
$$m_w=\frac{3}{2}m+\frac{1}{2c^2}(T_1+T_2+T_3)+\sqrt{\left[\frac{3}{2}m+\frac{1}{2c^2}(T_1+T_2+T_3)\right]^2-\frac{p_w^2}{2c^2}} \tag{14}$$

式中，p_w^2由⑫式给出．另一解$m_w\sim\frac{p_w}{c}$，与非相对论近似条件$m_wc^2\ll p_wc$矛盾，舍去．

评分标准：本题20分．①②③④⑤⑥⑦式各2分，⑪⑫⑬式各2分．（采用相对论的能量－动量公式得出正确结果的，同样给分）

16.（25分）

解法一



（1）在圆盘所在平面内建立平面直角坐标系，使盘心O为原点，x轴水平向右，y轴竖直向上．按题意，天花板上有水的地方仅仅是一点，该点必定是所有水滴运动轨迹的最高点；只有第二象限的圆盘边缘甩出的水滴才能到达这一最高点．水滴甩出时的初速度大小是恒定的

$$v_0=r\omega \tag{1}$$

以P点位于$(-r,0)$处时为计时零点，则P点在时刻t_0处时，O、P连线与右图中x轴负方向的夹角为

$$\theta_0=\omega t_0 \tag{2}$$

这时经过P点的水滴的位置(x_0,y_0)和速度(v_{0x},v_{0y})分别为

$$x_0=-r\cos\theta_0,\ y_0=r\sin\theta_0 \tag{3}$$

$$v_{0x}=v_0\sin\theta_0,\ v_{0y}=v_0\cos\theta_0 \tag{4}$$

中国科学技术大学物理学院叶邦角整理

在时刻 t_0 被甩出的水滴做抛体运动．设不存在天花板，该水滴在时刻 t_1 达到最高处．由抛体运动公式，可得

$$0 = r\omega\cos\theta_0 - g(t_1 - t_0) \qquad ⑤$$

$$x_1 = x_0 + v_{0x}(t_1 - t_0),$$
$$y_1 = y_0 + v_{0y}(t_1 - t_0) - \frac{1}{2}g(t_1 - t_0)^2 \qquad ⑥$$

由①②③④⑤式和⑥中第二式，得

$$y_1 = r\sin(\omega t_0) + \frac{(r\omega)^2}{2g}[1 - \sin^2(\omega t_0)] \qquad ⑦$$

对变元 $\sin(\omega t_0)$ 配方后得

$$y_1 = \frac{(r\omega)^2}{2g} + \frac{g}{2\omega^2} - \frac{(r\omega)^2}{2g}\left[\sin(\omega t_0) - \frac{g}{r\omega^2}\right]^2 \qquad ⑧$$

于是在

$$\sin(\omega t_0)_{y_1 = y_{1\max}} - \frac{g}{r\omega^2} = 0 \qquad ⑨$$

时有

$$y_{1\max} = \frac{(r\omega)^2}{2g} + \frac{g}{2\omega^2} \qquad ⑩$$

依题意，上式即天花板相对于圆盘中心轴 O 点的高度．代入题给数据得

$$y_{\max} = 1.25\ m \qquad ⑪$$

（2）由⑨式和题给数据可知，

$$\sin(\omega t_0)_{y_1 = y_{1\max}} = \frac{g}{r\omega^2} = 0.5 \qquad ⑫$$

故

$$(\theta_0)_{y_1 = y_{1\max}} = 30° \qquad ⑬$$

由①②③④⑤式和⑥中第一式，得

$$x_{1\,y_1 = y_{1\max}} = -r\cos30° + \frac{(r\omega)^2\sin30°\cos30°}{g} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{(r\omega)^2}{2g} - r\right)$$

代入题给数据得

$$x_{1\ y_1 = y_{1\max}} = 0 \qquad ⑭$$

所以，y 轴与天花板的交点为天花板上有水的那一点的位置，其坐标值为（0，1.25m）．

评分标准：第（1）问 17 分，①②③④⑤式各 1 分，⑥⑧⑨式各 2 分，⑩式 4 分，⑪式 2 分；第（2）问 8 分，⑬式 4 分，⑭式 2 分，结论正确给 2 分．

解法二

（1）在圆盘所在平面内建立平面直角坐标系，使盘心 O 为原点，x 轴水平向右，y 轴竖直向上．只有第二象限的圆盘边缘甩出的水滴才可能到达天花板上某一固定点；而不是打到天花板上某一区域（不止一个点），或者打不到天花板上．水滴甩出时的初速度大小是恒定的：

$$v_0 = r\omega \qquad ①$$

其 x 和 y 分量分别为：

$$v_{0x} = r\omega\sin\theta,\ v_{0y} = r\omega\cos\theta \qquad ②$$

取水滴从 P 点甩出时为计时零点，P 在 $t=0$ 时的初始坐标为：

$$x_0 = -r\cos\theta,\ y_0 = r\sin\theta \qquad ③$$

水滴的 x，y 坐标与 t 的关系式为：

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x}t \\ y = y_0 + v_{0y}t - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases} \qquad ④$$

现在求 θ 的各种可能取值中，y 的最大值．

对某一特定的 θ 值，x_0、y_0、v_{0x}、v_{0y} 均为固定值，先针对这个固定的 θ 值，求

$$y - y_0 = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad ⑤$$

的最大值．即求斜抛运动的“最大射高”：

$$(y-y_0)_{\max} = \left(v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2\right)_{\max} = \frac{v_{0y}^2}{2g} \qquad ⑥$$

对应的

$$\begin{aligned} y_{\max} &= y_0 + \frac{v_{0y}^2}{2g} = r\sin\theta + \frac{(r\omega\cos\theta)^2}{2g} \\ &= r\sin\theta + \frac{(r\omega)^2}{2g}(1-\sin^2\theta) \\ &= \frac{(r\omega)^2}{2g} - \left[\frac{(r\omega)^2}{2g}\sin^2\theta - r\sin\theta\right] \qquad ⑦ \\ &= \frac{(r\omega)^2}{2g} + \frac{g}{2\omega^2} - \left[\frac{r\omega\sin\theta}{\sqrt{2g}} - \sqrt{\frac{g}{2}}\frac{1}{\omega}\right]^2 \end{aligned}$$

这说明不同的 θ 值对应不同的 y 的最大值．只有含 θ 的平方项（即上式最后的 [⋯]）为 0 时，才是这些“最大射高”中的最大值．

由此得到天花板的高度为：

$$y_{\max} = \frac{(r\omega)^2}{2g} + \frac{g}{2\omega^2} = \frac{(1\times 4.43)^2}{2\times 9.80} + \frac{9.80}{2\times 4.43^2} = 1.00 + 0.25 = 1.25\text{m} \qquad ⑧$$

中国科学技术大学物理学院叶邦角整理

（2）当水滴能打到天花板时，

$$\sin\theta=\frac{g}{r\omega^2}=\frac{9.80}{1\times4.43^2}=0.50 \quad ⑨$$

即

$$\theta=30^\circ \quad ⑩$$

令⑤式为 0 得到斜抛水滴再次到达初始时的水平高度时的时间为：

$$t=\frac{2v_{0y}}{g} \quad ⑪$$

y 值取最大时所用的时间是上述值的一半，把该时间代入④的第一式得水滴在天花板上的 x 位置坐标为：

$$x=x_0+v_{0x}t=-r\cos\theta+r\omega\sin\theta\frac{r\omega\cos\theta}{g}$$

$$=-r\cos\theta+\frac{(r\omega)^2\sin2\theta}{2g}=-1\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{(1\times4.43)^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\times9.80} \quad ⑫$$

$$=0$$

所以，y 轴与天花板的交点为天花板上有水的那一点的位置，其坐标值为（0，1.25m）．

评分标准：第（1）问 17 分，①式 1 分，②③④⑤⑥式各 2 分，⑦式 4 分，⑧式 2 分；

第（2）问 8 分，⑩式 4 分，⑫式 2 分，结论正确给 2 分．

中国科学技术大学物理学院叶邦角整理