第 33 届物理奥林匹克竞赛决赛理论题解

叶邦角整理

第一题解答:

（1）火车和煤从大同到秦皇岛（去程）总的重力势能的改变的一部分用于火车在去程中克服阻力所做的功，另一部分驱动火车发电机发电。因而火车发电机的输入能量是

$$E_1=(m_c+m_t)g(h_c-0)-\mu(m_c+m_t)gl \quad ①$$

发电机发出的电能为

$$E_2=\eta_1 E_1 \quad ②$$

设空车返程后剩余电能为E，按题意，返程中给火车电动机输入的能量为(E_2-E)，电动机输出的能量为

$$E_3=\eta_2(E_2-E) \quad ③$$

E_3用于火车返程中克服阻力和重力所做的功，故

$$E_3=\mu m_t gl+m_t g(h_c-0) \quad ④$$

联立①②③④式得

$$\begin{aligned}E&=\eta_1[(m_c+m_t)gh_c-\mu(m_c+m_t)gl]-\frac{\mu m_t gl+m_t gh_c}{\eta_2}\\&=\eta_1(m_c+m_t)g(h_c-\mu l)-m_t g\frac{h_c+\mu l}{\eta_2}\end{aligned} \quad ⑤$$

（2）由$E_1\geq 0$可知阻力系数μ应满足$\mu<h_c/l$。据题意，如果火车能返回，则$E\geq 0$，可得

$$m_c\geq m_{c\min}=\left(\frac{1}{\eta_1\eta_2}\frac{h_c+\mu l}{h_c-\mu l}-1\right)m_t \quad ⑥$$

⑥式右边即为装煤的最小值$m_{c\min}$。

（3）运行时间为

$$t=\frac{l}{v} \quad ⑦$$

利用①②式，发电机输出平均功率P为

$$P=\frac{E_2}{t}=\frac{\eta_1[(m_c+m_t)gh_c-\mu(m_c+m_t)gl]}{t} \quad ⑧$$

由⑦⑧式得

$$P=\eta_1(m_c+m_t)gv\left(\frac{h_c}{l}-\mu\right) \quad ⑨$$

第二题解答：

（1）D 点与质心 C 距离为 $x-l_2/2$。设在冲量作用后的瞬间，质心平动速度大小为 v_C。B、C 点以同一角速度绕 O 点转动，B 点的速度大小 v_B 应满足

$$v_B=\omega_0 l_1 \quad ①$$

$$v_B=v_C-\omega_0\frac{l_2}{2} \quad ②$$

由冲量定理得

$$I=mv_C \quad ③$$

由于冲量作用点不在质心，冲量 I 的冲量矩还引起杆绕质心的转动。由刚体转动定理得

$$\left(\frac{1}{12}ml_2^2\right)\omega_0=I\left(x-\frac{l_2}{2}\right) \quad ④$$

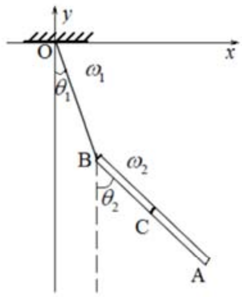
[或

$$\left[\frac{1}{12}ml_2^2+m\left(l_1+\frac{l_2}{2}\right)^2\right]\omega_0=I(l_1+x) \quad ④ \;]$$

联立①②③④式得

$$x=\left[\frac{1}{2}+\frac{l_2}{6(2l_1+l_2)}\right]l_2 \quad ⑤$$

$$\omega_0=\frac{2I}{m(2l_1+l_2)} \quad ⑥$$



（2）解法一：水平竖直方向坐标系如图，在 O、B、A 三点所在竖直平面内，以 O 为原点、水平向右的射线为 x 轴、竖直向上的射线为 y 轴，建立平面坐标系。

杆的质心 C 的加速度 (a_{Cx},a_{Cy}) 满足质心运动定理

$$ma_{Cx}=-T\sin\theta_1,\quad ma_{Cy}=-mg+T\cos\theta_1 \quad ⑦$$

式中，T 是绳的张力的大小。同时，杆在绳张力 T 相对于杆的质心的力矩作用下绕质心转动，由转动定理得

$$\frac{1}{12}ml_2^2\alpha_2=-T\frac{1}{2}l_2\sin(\theta_2-\theta_1) \quad ⑧$$

由几何关系得

$$x_B(t)=x_C(t)-\frac{1}{2}l_2\sin\theta_2(t),\quad y_B(t)=y_C(t)+\frac{1}{2}l_2\cos\theta_2(t) \quad ⑨$$

将上式两边对时间 t 微商得，B 点的速度满足条件

$$v_{Bx}(t)=v_{Cx}(t)-\frac{1}{2}\omega_2(t)l_2\cos\theta_2(t)，\quad v_{By}(t)=v_{Cy}(t)-\frac{1}{2}\omega_2(t)l_2\sin\theta_2(t) \qquad ⑩$$

将上式两边对时间 t 微商得，B 点的加速度满足条件

$$a_{Bx}=a_{Cx}-\frac{1}{2}\alpha_2 l_2\cos\theta_2+\frac{1}{2}\omega_2^2 l_2\sin\theta_2，\quad a_{By}=a_{Cy}-\frac{1}{2}\alpha_2 l_2\sin\theta_2-\frac{1}{2}\omega_2^2 l_2\cos\theta_2 \qquad ⑪$$

同时 B 点随不可伸长的绳绕 O 点做定轴转动，应有

$$x_B(t)=l_1\sin\theta_1(t)，\quad y_B(t)=-l_1\cos\theta_1(t) \qquad ⑫$$

将上式两边对时间 t 微商得，B 点的速度还满足条件

$$v_{Bx}(t)=\omega_1(t)l_1\cos\theta_1(t)，\quad v_{By}(t)=\omega_1(t)l_1\sin\theta_1(t) \qquad ⑬$$

将上式两边对时间 t 微商得，B 点的加速度还满足条件

$$a_{Bx}=\alpha_1 l_1\cos\theta_1-\omega_1^2 l_1\sin\theta_1，\quad a_{By}=\alpha_1 l_1\sin\theta_1+\omega_1^2 l_1\cos\theta_1 \qquad ⑭$$

【或避开 B 点，直接得 C 点的位置坐标

$$x_C(t)=l_1\sin\theta_1(t)+\frac{1}{2}l_2\sin\theta_2(t)，\quad y_C(t)=-l_1\cos\theta_1(t)-\frac{1}{2}l_2\cos\theta_2(t) \qquad ⑨⑫$$

$$\dot{x}_C(t)=l_1\dot{\theta}_1(t)\cos\theta_1(t)+\frac{1}{2}l_2\dot{\theta}_2(t)\cos\theta_2(t)，\quad \dot{y}_C(t)=l_1\dot{\theta}_1(t)\sin\theta_1(t)+\frac{1}{2}l_2\dot{\theta}_2(t)\sin\theta_2(t) \qquad ⑩⑬$$

$$a_{Cx}(t)=-l_1\left(\alpha_1\cos\theta_1-\omega_1^2\sin\theta_1\right)-\frac{1}{2}l_2\left(\alpha_2\cos\theta_2-\omega_2^2\sin\theta_2\right),$$

$$a_{Cy}(t)=l_1\left(\sin\theta_1\,\alpha_1+\cos\theta_1\,\omega_1^2\right)+\frac{l_2}{2}\left(\sin\theta_2\,\alpha_2+\cos\theta_2\,\omega_2^2\right) \qquad ⑪⑭$$

】

联立⑦⑧⑪⑭式，可解得绳绕悬点和杆绕质心的角加速度分别为

$$\alpha_1=-\frac{2g[\sin\theta_1+3\cos\theta_2\sin(\theta_1-\theta_2)]+3l_1\omega_1^2\sin[2(\theta_1-\theta_2)]+4l_2\omega_2^2\sin(\theta_1-\theta_2)}{2l_1\left[1+3\sin^2(\theta_1-\theta_2)\right]},$$

$$\alpha_2=\frac{12g\cos\theta_1\sin(\theta_1-\theta_2)+12l_1\omega_1^2\sin(\theta_1-\theta_2)+3l_2\omega_2^2\sin[2(\theta_1-\theta_2)]}{2l_2\left[1+3\sin^2(\theta_1-\theta_2)\right]} \qquad ⑮$$

解法二：沿杆坐标系 。
在 O、B、A 三点所在竖直平面内，以质心 C 为原点、沿杆斜向上的射线为 y 轴、竖直于杆斜向右的射线为 x 轴，建立平面坐标系。
杆的质心 C 的加速度(a_{Cx},a_{Cy})满足质心运动定理

$$ma_{Cx}=-mg\sin\theta_2+T\sin(\theta_2-\theta_1),\quad ma_{Cy}=-mg\cos\theta_2+T\cos(\theta_2-\theta_1) \quad ⑦$$

式中，T 是绳的张力的大小。同时，杆在绳张力T 相对于杆的质心的力矩作用下绕质心转动，由转动定理得

$$\frac{1}{12}ml_2^2\alpha_2=-T\frac{1}{2}l_2\sin(\theta_2-\theta_1) \quad ⑧$$

由几何关系得 B 点的加速度为

$$a_{Bx}=l_1\alpha_1\cos(\theta_2-\theta_1)+l_1\omega_1^2\sin(\theta_2-\theta_1),\quad a_{By}=-l_1\alpha_1\sin(\theta_2-\theta_1)+l_1\omega_1^2\cos(\theta_2-\theta_1) \quad ⑭$$

由几何关系还可得 B 点的加速度满足条件

$$a_{Bx}=a_{Cx}-\frac{1}{2}l_2\alpha_2,\quad a_{By}=a_{Cy}-\frac{1}{2}l_2\omega_2^2 \quad ⑪$$

【或由几何关系得 C 点的加速度

$$a_{Cx}=a_{Bx}+\frac{1}{2}l_2\alpha_2,\quad a_{Cy}=a_{By}+\frac{1}{2}l_2\omega_2^2 \quad ⑪$$

】

解法三：沿绳坐标系。
在 O、B、A 三点所在竖直平面内，以 O 为原点、沿绳斜向上的射线为 y 轴、竖直于绳斜向右的射线为 x 轴，建立平面坐标系。
杆的质心 C 的加速度(a_{Cx},a_{Cy})满足质心运动定理

$$ma_{Cx}=-mg\sin\theta_1,\quad ma_{Cy}=-mg\cos\theta_1+T \quad ⑦$$

式中，T 是绳的张力的大小。同时，杆在绳张力T 相对于杆的质心的力矩作用下绕质心转动，由转动定理得

$$\frac{1}{12}ml_2^2\alpha_2=-T\frac{1}{2}l_2\sin(\theta_2-\theta_1) \quad ⑧$$

由几何关系得 B 点的加速度为

$$a_{Bx}=l_1\alpha_1,\quad a_{By}=l_1\omega_1^2 \quad ⑭$$

由几何关系还可得 B 点的加速度满足条件

$$a_{Cx}=a_{Bx}+\frac{1}{2}l_2\alpha_2\cos(\theta_2-\theta_1)-\frac{1}{2}l_2\omega_2^2\sin(\theta_2-\theta_1),$$

$$a_{Cy}=a_{By}+\frac{1}{2}l_2\alpha_2\sin(\theta_2-\theta_1)+\frac{1}{2}l_2\omega_2^2\cos(\theta_2-\theta_1) \quad ⑪$$

【或由几何关系得 C 点的加速度

$$a_{Cx}=a_{Bx}+\frac{1}{2}l_2\alpha_2\cos(\theta_2-\theta_1)-\frac{1}{2}l_2\omega_2^2\sin(\theta_2-\theta_1),$$

$$a_{Cy}=a_{By}+\frac{1}{2}l_2\alpha_2\sin(\theta_2-\theta_1)+\frac{1}{2}l_2\omega_2^2\cos(\theta_2-\theta_1) \quad ⑪$$

】

【对于此坐标系，还可写做：

$$\frac{1}{12}ml_2^2\alpha_2=-T\frac{1}{2}l_2\sin(\theta_2-\theta_1) \quad ⑧$$

$$-mg\cos\theta_1+T=l_1\omega_1^2+\frac{1}{2}l_2\alpha_2\sin(\theta_2-\theta_1)+\frac{1}{2}l_2\omega_2^2\cos(\theta_2-\theta_1) \quad (a1)$$

$$-mg\sin\theta_1=l_1\alpha_1+\frac{1}{2}l_2\alpha_2\cos(\theta_2-\theta_1)-\frac{1}{2}l_2\omega_2^2\sin(\theta_2-\theta_1) \quad (a2)$$

由⑧(a1)式可消去T，解得α_2，带入(a2)可解得α_1。这是最为简便的方法。

】

解法四：非惯性参考系。
在 O、B、A 三点所在竖直平面内，以 O 为原点、沿绳斜向上的射线为 y 轴、竖直于绳斜向右的射线为 x 轴，建立平面坐标系。取以 O 点为参考点的惯性参考系，记为 O 系；取以 B 点为参考点的非惯性参考系，记为 B 系。
在惯性系 O 系中杆的质心 C 的加速度(a_{Cx},a_{Cy})满足质心运动定理

$$ma_{Cx}=-mg\sin\theta_1,\quad ma_{Cy}=-mg\cos\theta_1+T \quad ⑦$$

式中，T 是绳的张力的大小。同时，杆在绳张力T 相对于杆的质心的力矩作用下绕质心转动，由转动定理得

$$\frac{1}{12}ml_2^2\alpha_2=-T\frac{1}{2}l_2\sin(\theta_2-\theta_1) \quad ⑧$$

由几何关系知，非惯性系 B 系相对于惯性系 O 系的加速度为

$$a_{Bx}=l_1\alpha_1,\quad a_{By}=l_1\omega_1^2 \quad ⑭$$

杆质心 C 在非惯性系 B 系中的加速度为

$$a_{Cx}'=\frac{1}{2}l_2\alpha_2\cos(\theta_2-\theta_1)-\frac{1}{2}l_2\omega_2^2\sin(\theta_2-\theta_1),$$

$$a_{Cy}'=\frac{1}{2}l_2\alpha_2\sin(\theta_2-\theta_1)+\frac{1}{2}l_2\omega_2^2\cos(\theta_2-\theta_1) \quad ⑪\text{-}1$$

从而惯性系 O 系中质心 C 的加速度可表示为

$$a_{Cx}=a_{Bx}+a_{Cx}'\,,\quad a_{Cy}=a_{By}+a_{Cy}' \tag*{⑪-2}$$

【或者考虑非惯性力，在非惯性系 B 系中运用牛顿第二定律得到：

$$-mg\cos\theta_1+T-l_1\omega_1^2=\frac{1}{2}l_2\alpha_2\sin(\theta_2-\theta_1)+\frac{1}{2}l_2\omega_2^2\cos(\theta_2-\theta_1) \tag*{(a1)}$$

$$-mg\sin\theta_1-l_1\alpha_1=\frac{1}{2}l_2\alpha_2\cos(\theta_2-\theta_1)-\frac{1}{2}l_2\omega_2^2\sin(\theta_2-\theta_1) \tag*{(a2)}$$

与解法三类似，由⑧(a1)式可消去T，解得α_2，带入(a2)可解得α_1。

】

第三题解答：

(1) 在火星某高度h处的大气中划出一水平放置的薄盒子区域。该区域体积为V，其内部大气质量为M，压强为$P(h)$，温度为$T(h)$ 。由于盒子很薄，可认为气体的密度、压强、温度都是常量。由理想气体状态方程有

$$P(h)V=nRT(h) \tag*{①}$$

盒子内部火星大气的体积为

$$V=\frac{M}{\rho(h)} \tag*{②}$$

盒子内部火星大气的摩尔数为

$$n=\frac{M}{\mu} \tag*{③}$$

由①②③式得

$$T(h)=\frac{P(h)\mu}{\rho(h)R} \tag*{④}$$

现计算$P(h)$：

【解法 1】考虑高度为x到$x+dx$，所占立体角为$\Delta\Omega$的球冠状薄大气壳层；取$\Delta\Omega$很小，以至于球冠薄大气壳层的侧面上的径向直线可视为相互平行。由受力分析知

$$(P(x)+\mathrm{d}P)\cdot\Delta\Omega(R_{\rm m}+x)^2+\rho(x)g(x)\cdot\Delta\Omega(R_{\rm m}+x)^2\mathrm{d}x=P(x)\cdot\Delta\Omega(R_{\rm m}+x)^2 \tag*{⑤}$$

在⑤式中只保留到dx的一阶项，有

$$\mathrm{d}P=-\rho(x)g(x)\mathrm{d}x \tag*{⑥}$$

在火星高度h处，重力加速度大小为

$$g(h)=\frac{GM_{\rm m}}{(R_{\rm m}+h)^2} \tag*{⑦}$$

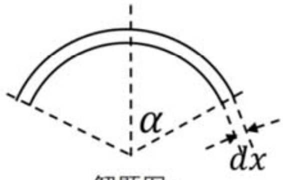
代入⑥式并积分得

$$P(h)=GM_{\mathrm{m}}\int_{h}^{\infty}\frac{\rho(x)}{(R_{\mathrm{m}}+x)^2}\mathrm{d}x \qquad ⑧$$

【解法 2】考虑高度为 x 到 $x+dx$，与火星中心张角为 α 的球冠状壳层，如解题图 a 所示。分析其在球冠中心轴方向的受力。设作用在上层球冠上的大气压力竖直向下的分力的大小为 $F_{1.1}$，壳层大气的重力的大小为 $F_{1.2}$，则

$$F_{1.1}=\int_0^{\alpha}2\pi(R_{\mathrm{m}}+x+\mathrm{d}x)^2\sin\theta[P(x)+\mathrm{d}P]\cos\theta\mathrm{d}\theta,$$

$$F_{1.2}=\int_0^{\alpha}\frac{GM_{\mathrm{m}}}{(R_{\mathrm{m}}+x)^2}2\pi(R_{\mathrm{m}}+x)^2\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}x\rho(x)\mathrm{d}\theta.$$



解题图a

式中，$P(x)$ 为 x 高度处的压强，$P(x)+\mathrm{d}P$ 为高度 $x+dx$ 处的压强。
设作用在下层球冠上的大气压力竖直向上的分力的大小为 $F_{2.1}$，
作用在边缘锥带上的大气压力竖直向上的分力的大小为 $F_{2.2}$，则

$$F_{2.1}=\int_0^{\alpha}2\pi(R_{\mathrm{m}}+x)^2\sin\theta P(x)\cos\theta\mathrm{d}\theta,$$

$$F_{2.2}=(R_{\mathrm{m}}+x)\sin\alpha\cdot 2\pi\mathrm{d}xP(x)\sin\alpha.$$

由竖直方向上受力平衡，得

$$F_{1.1}+F_{1.2}=F_{2.1}+F_{2.2} \qquad ⑤'$$

保留到 $\mathrm{d}x^1$ 项，得

$$\mathrm{d}P=-\rho(x)g(x)\mathrm{d}x \qquad ⑥'$$

因此有

$$P(h)=GM_{\mathrm{m}}\int_{h}^{\infty}\frac{\rho(x)}{(R_{\mathrm{m}}+x)^2}\mathrm{d}x \qquad ⑦'$$

将⑦式代入④式并利用题给大气密度表达式，积分得

$$T(h)=\frac{\mu GM_{\mathrm{m}}}{nR(R_{\mathrm{m}}+h)} \qquad ⑨$$

（2）以初始释放时刻为计时零点，设在时刻 t 着陆器高度为 $h(t)$，着陆器的速度和加速度大小分别为 $v(t)$ 和 $\dot{v}(t)$。设其受到的大气阻力为向上，大小为 F_a，

$$F_a=k\rho(h(t))v(t)^2 \qquad ⑩$$

忽略大气对着陆器的引力，着陆器受到的火星引力 F 为

$$F=\frac{GM_{\mathrm{m}}m_t}{(R_{\mathrm{m}}+h(t))^2} \qquad ⑪$$

由题意，可不考虑大气的浮力。根据牛顿第二定律有

$$F_a-F=m_t\dot{v}(t) \qquad ⑫$$

由⑨⑩⑪⑫式得

$$m_t\dot{v}(t)=k\rho_0(h(t))v^2(t)-\frac{GM_{\mathrm{m}}m_t}{(R_{\mathrm{m}}+h(t))^2} \qquad ⑬$$

由题意，密度和重力加速度可近似为火星表面的值，故⑬式可近似为

$$\dot{v}(t)=\frac{k\rho_0}{m_t}v(t)^2-\frac{GM_m}{R_m^{\ 2}} \qquad ⑭$$

积分得

$$v(t)=-\sqrt{\frac{GM_m m_t}{k\rho_0 R_m^{\ 2}}}\tanh\left[\sqrt{\frac{k\rho_0 GM_m}{R_m^{\ 2}m_t}}(t+C)\right] \qquad ⑮$$

其中 C 为待定常数。由初始条件 $v(t=0)=0$ 可知，$C=0$。由此得，着陆器落到火星表面时相对于火星的速度为

$$v(t_l)=-\sqrt{\frac{GM_m m_t}{k\rho_0 R_m^{\ 2}}}\tanh\left[\sqrt{\frac{k\rho_0 GM_m}{R_m^{\ 2}m_t}}t_l\right] \qquad ⑯$$

第四题解答：

（1）该束激光的频率

$$\nu=\frac{c}{\lambda}=3.61\times10^{14}\,\text{Hz} \qquad ①$$

入射激光的强度

$$I=\frac{P}{\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2}=1.77\times10^{10}\ \text{W/m}^2 \qquad ②$$

（2）金纳米球颗粒的质量

$$m=\frac{4}{3}\pi R^3\rho=8.09\times10^{-17}\,\text{kg} \qquad ③$$

该颗粒绕其过球心的转轴的转动惯量

$$J=\frac{2mR^2}{5}=3.24\times10^{-31}\,\text{kg}\cdot\text{m}^2 \qquad ④$$

（3）金纳米球颗粒在 $\mathrm{d}t$ 时间内吸收的光的能量

$$\mathrm{d}E_{\text{abs}}=I\sigma_{\text{abs}}\mathrm{d}t \qquad ⑤$$

一个光子的能量为 $h\nu$，因此金颗粒在 $\mathrm{d}t$ 时间内吸收的光子数

$$\mathrm{d}N=\frac{\mathrm{d}E_{\text{abs}}}{h\nu}=\frac{I\sigma_{\text{abs}}\mathrm{d}t}{h\nu} \qquad ⑥$$

根据角动量守恒定律，一个光子被颗粒吸收后，将角动量 $\hbar$ 转移到颗粒上。在 $\mathrm{d}t$ 时间内，金颗粒总角动量的改变量

$$\mathrm{d}L=\hbar\mathrm{d}N=\frac{I\sigma_{\text{abs}}\mathrm{d}t}{2\pi\nu} \qquad ⑦$$

根据角动量定理，由光产生的扭转力矩大小为

$$M=\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=\frac{I\sigma_{\text{abs}}}{2\pi\nu}=3.02\times10^{-20}\,\text{N}\cdot\text{m} \qquad ⑧$$

（4）金纳米球颗粒的旋转达到稳定状态的条件是：作用在金纳米球颗粒上的合力矩为零，即光施加在颗粒上的力矩大小 M 与水施加在颗粒上的粘滞摩擦力矩大小 M_f 相等

$$M-M_f=0 \qquad ⑨$$

由已知的摩擦力矩表达式与⑧⑨式得金纳米球颗粒达到稳定旋转时的转速

$$f=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{I\sigma_{\text{abs}}}{32\pi^3\eta R^3\nu}=2.39\times10^2\,\text{s}^{-1} \qquad ⑩$$

（5）根据刚体的定轴转动定理有

$$J\frac{d\omega}{dt}=M-M_{\mathrm{f}} \tag{11}$$

由⑧式得

$$J\frac{d\omega}{dt}=\frac{I\sigma_{\mathrm{abs}}}{2\pi\nu}-8\pi\eta R^3\omega \tag{12}$$

将④式代入⑫式，可得当金颗粒的旋转速率为ω时，其转动角速度的变化率满足

$$\frac{d\omega}{dt}=A\omega+B \tag{13}$$

其中

$$A=-\frac{20\pi\eta R}{m}，\quad B=\frac{5\sigma_{\mathrm{abs}}}{4\pi mR^2\nu}I$$

⑬式可写为

$$\frac{d\omega}{A\omega+B}=dt$$

将上式两边从$t=0$到t积分得

$$\int_{t=0}^{t}\frac{d\omega}{A\omega+B}=\int_0^t dt' \tag{14}$$

此即

$$\ln\frac{A\omega+B}{B}=At$$

这里已经利用到初始条件$t=0$时$\omega=0$。上式可写为

$$\omega=\frac{B}{A}e^{At}-\frac{B}{A}$$

此即

$$f(t)=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{I\sigma_{\mathrm{abs}}}{32\pi^3\eta R^3\nu}(1-e^{-\frac{20\pi\eta Rt}{m}}) \tag{15}$$

（6）对⑬式两边从t_1到t_2积分得

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{d\omega}{A\omega+B}=\int_{t_1}^{t_2}dt'$$

解为

$$\omega(t_2)=\omega(t_1)e^{A(t_2-t_1)}-\frac{B}{A}[1-e^{A(t_2-t_1)}]$$

式中，A是常量，B与I成正比（见前述表达式）。由此得

$$\omega(nT+T_1)=\omega(nT)e^{AT_1}-\frac{B}{A}(1-e^{AT_1}) \tag{16}$$

$$\omega[(n+1)T]=\omega(nT+T_1)e^{AT_2} \tag{17}$$

式中$T=T_1+T_2$。在方波脉冲激光照射下，颗粒在一个脉冲周期T中先做T_1时间的加速转动，在接下来T_2时间内做减速转动。于是

$$\omega[(n+1)T]=\omega(nT)e^{AT}-\frac{B}{A}e^{AT_2}(1-e^{AT_1}) \tag{18}$$

式中$\omega_n\equiv\omega(nT)$。类似地有

$$\omega_n=\omega_{n-1}e^{A(T_1+T_2)}-\frac{B}{A}e^{AT_2}\left(1-e^{AT_1}\right)$$

$$\omega_{n-1}e^{A(T_1+T_2)}=\omega_{n-2}e^{2A(T_1+T_2)}-\frac{B}{A}e^{AT_2}\left(1-e^{AT_1}\right)e^{A(T_1+T_2)}$$

$$\omega_{n-2}e^{2A(T_1+T_2)}=\omega_{n-3}e^{3A(T_1+T_2)}-\frac{B}{A}e^{AT_2}\left(1-e^{AT_1}\right)e^{2A(T_1+T_2)}$$

$$\vdots$$

$$\omega_1 e^{(n-1)A(T_1+T_2)}=\omega_0 e^{nA(T_1+T_2)}-\frac{B}{A}e^{AT_2}\left(1-e^{AT_1}\right)e^{(n-1)A(T_1+T_2)}$$

其中 ω_0 表示第 1 个脉冲之前时刻颗粒的转速，即 $\omega_0=0$。将上列所有等式两边分别相加得

$$f_n=\frac{\omega_n}{2\pi}=-\frac{B}{2\pi A}\frac{1-e^{AT_1}}{e^{-AT_2}-e^{AT_1}}\left(1-e^{nA(T_1+T_2)}\right) \tag{19}$$

【解法 2】由第⑱式递推公式推出通项公式也可归纳写出

$$\begin{aligned}\omega_n&=-\frac{B}{A}e^{AT_2}(1-e^{AT_1})+\omega_{n-1}e^{AT}\\&=-\frac{B}{A}e^{AT_2}(1-e^{AT_1})+\left[-\frac{B}{A}e^{AT_2}(1-e^{AT_1})+\omega_{n-2}e^{AT}\right]e^{AT}\\&=-\frac{B}{A}e^{AT_2}(1-e^{AT_1})(1+e^{AT})+\omega_{n-2}e^{2AT}=\cdots\\&=-\frac{B}{A}e^{AT_2}(1-e^{AT_1})(1+e^{AT}+\cdots+e^{(n-1)AT})+\omega_0e^{nAT}\\&=-\frac{B}{A}e^{AT_2}(1-e^{AT_1})\frac{1-e^{nAT}}{1-e^{AT}}=-\frac{B}{A}\frac{1-e^{AT_1}}{e^{-AT_2}-e^{AT_1}}\left(1-e^{nA(T_1+T_2)}\right)\end{aligned}$$

【解法 3】将第⑱式写成 $\omega_{n+1}=C\omega_n+D$，其中 $C=e^{AT}$，$D=-\frac{B}{A}e^{AT_2}(1-e^{AT_1})$，此即 $\omega_{n+1}+\frac{D}{C-1}=C(\omega_n+\frac{D}{C-1})$。可见 $\left\{\omega_n+\frac{D}{C-1}\right\}$ 是公比为 C 的等比数列，所以通项公式为

$$\begin{aligned}\omega_n&=(\omega_0+\frac{D}{C-1})C^{n-1}-\frac{D}{C-1}\\&=\frac{D}{C-1}(C^{n-1}-1)\\&=-\frac{B}{A}e^{AT_2}(1-e^{AT_1})\frac{e^{nAT}-1}{e^{AT}-1}=-\frac{B}{A}\frac{1-e^{AT_1}}{e^{-AT_2}-e^{AT_1}}(1-e^{nAT})\end{aligned}$$

由此可见

$$f_{n+1}>f_n$$

当 $n\to\infty$ 时，f_n 的极限为

$$f_{n\to\infty}=-\frac{B}{2\pi A}\frac{1-e^{AT_1}}{e^{-AT_2}-e^{AT_1}}=\frac{I\sigma_{\text{abs}}}{32\pi^3\eta R^3\nu}\frac{1-e^{-\frac{20\pi\eta R}{m}T_1}}{e^{\frac{20\pi\eta R}{m}T_2}-e^{-\frac{20\pi\eta R}{m}T_1}} \tag{20}$$

第五题解答

（1）设在竖直方向上，车受到地面向上的支持力为 N。此方向上力的平衡给出

$$mg=N+c_B v^2 \tag{1}$$

赛车在水平直道上行驶，应有

$$N\geq 0$$

因而

$$v \le v_1 = \sqrt{\frac{mg}{c_B}} \qquad ②$$

记 F_p 为发动机产生的牵引力（通过赛车与地面之间的静摩擦力实现）大小，赛车匀速行驶的速度大小为 v 时，发动机功率 P 为

$$P = F_p v \qquad ③$$

由于赛车匀速行驶，在水平方向上牵引力与滚动摩擦力和空气阻力平衡

$$F_p = \mu_R N + c_A v^2 \qquad ④$$

赛车的拉力是通过地面静摩擦实现，因此应小于最大静摩擦力

$$F_p \le \mu_S N \qquad ⑤$$

由①④⑤式得，

$$v \le v_5 = \sqrt{\frac{(\mu_S - \mu_R)mg}{(\mu_S - \mu_R)c_B + c_A}} \qquad ⑥$$

比较②和⑥知，由于 $\mu_S > \mu_R$，$c_B > 0$，$c_A > 0$，可知⑥是比②更强的约束，v 只需符合⑥即可。

由①③④式得，功率 P 可表示为 v 的下述函数

$$\begin{aligned} P &= \mu_R(mg - c_B v^2)v + c_A v^3 \\ &= (c_A - \mu_R c_B)v^3 + \mu_R mgv \end{aligned} \qquad ⑦$$

为从⑦式求出赛车速度大小满足条件②下功率 P 的最大值 $P_{\max}$，兹作如下讨论：

（A）如果 $c_A \ge \mu_R c_B$，则 P 是 v 的单调递增函数。当 v 取⑥式最大值 v_5 时，功率也取最大值

$$P_{\max} = c_A \mu_S \sqrt{(\mu_S - \mu_R)}\left(\frac{mg}{c_B(\mu_S - \mu_R) + c_A}\right)^{3/2} \qquad ⑧$$

（B）如果 $c_A < \mu_R c_B$，则 P 随着 v 先增大后减小。在暂不考虑条件⑥的情形下，将 P 的最大值所对应的速度记为 v_2。将⑦式对 v 求导并令其为零可求得 v_2，即

$$\left.\frac{dP}{dv}\right|_{v=v_2} = \mu_R mg - 3(\mu_R c_B - c_A)v_2^2 = 0$$

由上式得

$$v_2 = \sqrt{\frac{\mu_R mg}{3(\mu_R c_B - c_A)}} \qquad ⑨$$

现比较⑥⑨式，化简知可有如下两种情况：

（B1）如果 $\mu_R c_B > c_A \ge \frac{2\mu_R c_B}{3}\left[1 - \frac{\mu_R}{(3\mu_S - 2\mu_R)}\right]$，则 $v_5 < v_2$，则此时功率最大值仍在 v_5 处取

值，最大功率 $P_{\max}=P(v_5)$ 仍由⑧式给出。　　　　　　　　　　　　（*）

（B2）如果 $c_A<\frac{2\mu_R c_B}{3}\left[1-\frac{\mu_R}{(3\mu_S-2\mu_R)}\right]$，则 $v_5>v_2$，则此时功率最大值在 v_2 处取值，最大功率 $P_{\max}$ 为

$$P_{\max}=P(v_2)=\frac{2\sqrt{3}(mg\mu_R)^{3/2}}{9\sqrt{(\mu_R c_B-c_A)}}\qquad ⑩$$

（2）设赛车做匀速圆周运动时的切向速度大小为 v，地面提供的竖直向上的支持力为 N'。在竖直方向上受力平衡给出

$$mg+\varepsilon c_B v^2=N'\qquad ⑪$$

其中当导流板后翘时 $\varepsilon=1$，前翘时 $\varepsilon=-1$。由 $N'\geq 0$ 知，当 $\varepsilon=-1$ 时，应有

$$v\leq\sqrt{\frac{mg}{c_B}}\qquad ⑫$$

设车在运动方向上受到发动机前向拉力为 $F_{\parallel}$，它通过车与地面的静摩擦实现，而且大小与迎面空气阻力平衡，得

$$F'_{\parallel}=c_A v^2$$

车在水平面上做匀速圆周运动，地面静摩擦力沿径向的分量 $F'_{\perp}$ 提供向心力

$$F'_{\perp}=\frac{mv^2}{r}\qquad ⑬$$

地面为赛车提供的总摩擦力不应大于最大静摩擦力 $\mu_S N'$，因而

$$F_{\parallel}'^2+F_{\perp}'^2\leq(\mu_S N')^2\qquad (**)$$

将⑪⑬式代入上式得

$$av^4+bv^2+c\geq 0\qquad ⑭$$

其中

$$a=c_B{}^2\mu_S^2-\frac{m^2}{r^2}-c_A^2,\ b=2\varepsilon mgc_B\mu_S^2,\ c=m^2g^2\mu_S^2>0$$

不等式⑭左边是 v^2 的一次或二次函数。下面分情况讨论满足⑭式的速度取值范围：

情况（A）：当 $a=0$ 时，可知

情况（A.1）：如果 $\varepsilon=1$，为使⑭式成立，显然任何速率 v 均适合，即

$$v_{\max}=\infty\qquad ⑮$$

情况（A.2）：如果 $\varepsilon=-1$，则应有

$$v\leq\sqrt{\frac{mg}{2c_B}}\qquad ⑯$$

情况（B）：当 $a\neq 0$ 时，记⑭式取等号时的两个根为 v_1^2 和 v_2^2，有

$$v_1^2=-\frac{mg\mu_S}{\varepsilon c_B\mu_S+\sqrt{m^2/r^2+c_A^2}},\ v_2^2=-\frac{mg\mu_S}{\varepsilon c_B\mu_S-\sqrt{m^2/r^2+c_A^2}}. \qquad ⑰$$

为进一步求出有关速度的范围，需再分情况讨论：

情况（B1）：如果 $a>0$，即 $c_B\mu_S>\sqrt{m^2/r^2+c_A^2}$，则⑭式左边为开口向上的 v^2 的二次函数，且 $v_1^2\cdot v_2^2=c/a>0$

情况（B1.1）：如果 $\varepsilon=1$，则

$v_2^2<v_1^2<0$，

即二次函数与横轴的交点都小于零。为使⑭式成立，显然任何速率 v 均适合，即

$$v_{\max}=\infty \qquad ⑱$$

情况（B1.2）：如果 $\varepsilon=-1$，则

$0<v_2^2<v_1^2$，

即二次函数与横轴的交点都大于零。为使⑭式成立，显然速率 v 应满足

$$v\geq\sqrt{v_1^2}\quad 或 \quad 0\leq v\leq v_{\max}=\sqrt{v_2^2}$$

前者不满足⑫式，后者满足要求，故

$$0\leq v\leq v_{\max}=\sqrt{v_2^2}=\sqrt{\frac{mg\mu_S}{c_B\mu_S+\sqrt{m^2/r^2+c_A^2}}} \qquad ⑲$$

情况（B2）：如果 $a<0$，则对 $\varepsilon=\pm1$，都有

$v_1^2<0<v_2^2$

且⑭式左边为开口向下的 v^2 的二次函数，其与横轴的交点一个大于零，另一个小于零。为使⑭式成立，要求 $0\leq v^2\leq v_2^2$，即

$$0\leq v\leq v_{\max}=\sqrt{v_2^2}=\sqrt{\frac{mg\mu_S}{-\varepsilon c_B\mu_S+\sqrt{m^2/r^2+c_A^2}}} \qquad ⑳$$

总结各情况可知：

当导流板后翘时，如果 $a<0$，满足要求的速率范围由⑳式取 $\varepsilon=1$ 给出；其他情况时，满足要求的速率范围可以合并由⑱式给出。

当导流板前翘时，⑯⑲⑳各情况下对速度的要求可以合并为一个表达式，即满足要求的速率范围由⑲式给出。

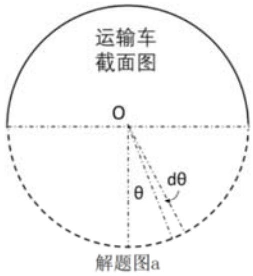
因此，比较以上几种情况可知，无论在何种条件下，

导流板后翘都要比前翘所允许的最大速度更大 (***)

第六题解答

（1）对于每个喷气细孔，已知内、外压强分别为P、P_{low}，细孔内部气体流速为零，内外高度差可忽略。设细孔外部稳定流速设为v，对细孔内外对应流管应用伯努利方程可得

$$P=P_{\text{low}}+\frac{1}{2}\rho v^2 \qquad ①$$



解题图a

对于单个细孔，由喷射气体造成的垂直于细孔横截面（即沿径向）的有效推力大小为

$$f=-\frac{dm}{dt}v=\rho s v^2=2(P-P_{\text{low}})s \qquad ②$$

对运输车，细孔提供的净有效压强为

$$P_{\text{eff}}=\frac{f}{s}=2(P-P_{\text{low}})$$

运输车在竖直方向上受重力和净有效压力作用。以横截面中心为原点，竖直向下为极轴方向建立极坐标，记极角为θ（见解题图 a）。因细孔面积很小，故可采用分离变量连续化的方法。此外，按题设，除细孔外其他车厢表面均受环境压强P_{low}，则极角为θ到$\theta+\mathrm{d}\theta$之间的运输车窄条提供的竖直向上的力为

$$\mathrm{d}N=P_{\text{eff}}nslR\mathrm{d}\theta\cos\theta$$

从 $\theta=-\frac{\pi}{2}$ 到 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 之间细孔提供的总的向上的力为

$$N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}P_{\text{eff}}nslRd\theta\cos\theta=2nslRP_{\text{eff}}=4nslR\left(P-P_{\text{low}}\right) \qquad ③$$

为将运输车刚好托离管壁，在竖直方向上力的平衡给出

$$4nslR\left(P-P_{\text{low}}\right)=Mg \qquad ④$$

由此得

$$P=\frac{Mg}{4nslR}+P_{\text{low}} \qquad ⑤$$

(2) 设长度为D的导轨的电阻为R_1，运输车上每根导线电阻为$R_2=2R_1$，则有

$$R_1=\rho_d\frac{D}{\pi r_d^2} \qquad ⑥$$

以导线 1（见题图 d）进入磁场的时刻为计时零点。设在导线 2 未进入磁场的某时刻t，导线速度为$v(t)$，切割磁力线产生的感应电动势为E为

$$E=B\cdot 2D\cdot v(t) \qquad ⑦$$

设 I 是通过的导线 1、2 和导轨构成的回路中的电流，由欧姆定律有

$$E = I(2R_2 + 2R_1) \tag{⑧}$$

导线 1 中的电流在磁场中受力应与回路运动方向相反。由牛顿定律有

$$-M\dot{v}(t) = I \cdot 2D \cdot B \tag{⑨}$$

联立⑥⑦⑧⑨式求解，并利用初始条件 $v(t=0)=v_0$ 得

$$v(t) = v_0 \exp\left(-\frac{2B^2D^2}{3MR_1}t\right) \tag{⑩}$$

设导线 2 到达磁场边界的时刻为 t_1，应有

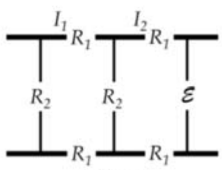
$$\int_0^{t_1} v(t)\mathrm{d}t = \int_0^{t_1} v_0 \exp\left(-\frac{2B^2D^2}{3MR_1}t\right)\mathrm{d}t = D \tag{⑪}$$

由⑪式可得 t_1，由⑩式可求得对应的速度 v_1，此即导线 2 进入磁场后的滑行速度

$$t_1 = -\frac{3MR_1}{2B^2D^2}\ln\left(1-\frac{2B^2D^3}{3MR_1v_0}\right),\quad v_1 = v(t=t_1) = v_0 - \frac{2\pi B^2D^2r_d^2}{3M\rho_d} \tag{⑫}$$

【若把电流近似为恰好通过导轨轴线，则⑦到⑩以及⑫式中 D 应写为 $D+r_d$。】

（3）将滑轨上的电流（如等效电路图解题图 b 所示）记为 I_1 和 I_2。由导线左右两侧的对称性可知两侧对应导轨段上的电流大小相同。对电源、导轨和导线 1 构成的回路，以及电源、导轨与导线 2 构成的回路根据欧姆定律有



解题图b

$$\begin{cases}(I_2 - I_1)R_2 + I_2(2R_1) = \mathcal{E},\\ I_1(R_2 + 2R_1) + I_2(2R_1) = \mathcal{E}.\end{cases} \tag{⑬}$$

联立⑥、⑬式解得

$$I_1 = \frac{1}{10}\frac{\mathcal{E}}{R_1},\quad I_2 = \frac{3}{10}\frac{\mathcal{E}}{R_1}。 \tag{⑭}$$

当导轨和电源线上通有电流时，就会在导线位置产生垂直于导轨-导线平面的磁场，而通电导线在这个磁场中会受到安培力的作用。为求安培力的大小，我们首先计算导轨和电源线在导线位置产生的磁场。由题给出

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}(\cos\theta_1 + \cos\theta_2)$$

由几何关系，一段导轨和紧邻、次紧邻的一段导线之间夹角分别满足

紧邻： $\theta_1 = \dfrac{\pi}{2}$， $|\cos\theta_2| = \dfrac{D}{\sqrt{r_0^2 + D^2}}$

次紧邻： $|\cos\theta_1|=\dfrac{D}{\sqrt{r_0^2+D^2}}$， $|\cos\theta_2|=\dfrac{2D}{\sqrt{r_0^2+4D^2}}$ （*）

因此，一段导轨在紧邻和次紧邻导线位置产生的磁感应强度大小分别为

紧邻： $|B_n|=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I}{r_0}\dfrac{D}{\sqrt{r_0^2+D^2}}$

次紧邻： $|B_{nn}|=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I}{r_0}\left(\dfrac{2D}{\sqrt{r_0^2+4D^2}}-\dfrac{D}{\sqrt{r_0^2+D^2}}\right)$ ⑮

由安培力公式，紧邻、次紧邻的导轨产生的磁场对电流为 I_c 的导线的安培力为沿导轨方向，大小为

紧邻： $F=\int_{r_d}^{2D+r_d}|B_n|I_c dr_0=\int_{r_d}^{2D+r_d}\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I\cdot I_c}{r_0}\dfrac{D}{\sqrt{r_0^2+D^2}}dr_0=\dfrac{\mu_0 I\cdot I_c}{4\pi}\Pi_n$，

次紧邻： $F=\int_{r_d}^{2D+r_d}|B_{nn}|I_c dr_0=\int_{r_d}^{2D+r_d}\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I\cdot I_c}{r_0}\left(\dfrac{2D}{\sqrt{r_0^2+4D^2}}-\dfrac{D}{\sqrt{r_0^2+D^2}}\right)dr_0=\dfrac{\mu_0 I\cdot I_c}{4\pi}(\Pi_{nn}-\Pi_n)$， ⑯

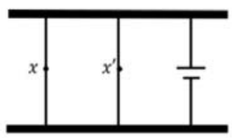
其中在积分中使用了题给公式有

$$\Pi_n=\ln\left(\frac{2D+r_d}{r_d}\frac{D+\sqrt{D^2+r_d^2}}{D+\sqrt{D^2+(2D+r_d)^2}}\right),\ \Pi_{nn}=\ln\left(\frac{2D+r_d}{r_d}\frac{2D+\sqrt{4D^2+r_d^2}}{2D+\sqrt{4D^2+(2D+r_d)^2}}\right)$$

对导线 1，其上电流为 I_1，同侧与之紧邻的一段导轨上的电流为 I_1，与之次紧邻的一段导轨上的电流为 I_2；对导线 2，其上电流为 I_2-I_1，同侧与之紧邻的两段导轨上的电流为 I_1 和 I_2。由题意知，电动势 ε 上端为正，两侧导轨对导线 1 和 2 所施加的安培力均为向左。可得导线 1 和 2 受到导轨的总安培力 F_{1G} 和 F_{2G} 大小分别为：

$$|F_{1G}|=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi}[I_1\Pi_n+I_2(\Pi_{nn}-\Pi_n)],$$
$$|F_{2G}|=\frac{\mu_0(I_2-I_1)}{2\pi}(I_2+I_1)\Pi_n.$$ ⑰

其次，电源所接导线在导线 1 上 x 点和导线 2 上 x' 点（见解题图 c）产生的垂直于导线的磁感应强度 B_1 和 B_2 大小为



解题图c

$$|B_1|=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_2}{2D}\left(\frac{2D-x}{\sqrt{(2D-x)^2+(2D)^2}}+\frac{x}{\sqrt{x^2+(2D)^2}}\right),$$
$$|B_2|=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_2}{D}\left(\frac{2D-x'}{\sqrt{(2D-x)^2+D^2}}+\frac{x'}{\sqrt{x^2+D^2}}\right).$$ ⑱

由左手定则可知，电源所接导线对固定在运输车上的导线 1 和导线 2 的安培力 $F_{1\varepsilon}$ 和 $F_{2\varepsilon}$ 方向向左；由安培力公式得，$F_{1\varepsilon}$ 和 $F_{2\varepsilon}$ 的大小为

$$|F_{1\mathcal{E}}|=\int_0^{2D} I_1\cdot|B_1(x)|\,dx=\frac{1}{2\pi}\mu_0 I_1 I_2(\sqrt{2}-1),$$
$$|F_{2\mathcal{E}}|=\int_0^{2D}(I_2-I_1)\cdot|B_2(x)|\,dx=\frac{1}{2\pi}\mu_0(I_2-I_1)I_2(\sqrt{5}-1).\qquad ⑲$$

导线产生的磁场对彼此之间的力属于系统内力，不会引起整体加速度，可不予考虑。

由⑰⑲式可求得导线 1 和 2 所受总安培力 F_{total}

$$F_{\text{total}}=|F_{1G}|+|F_{2G}|+|F_{1\mathcal{E}}|+|F_{2\mathcal{E}}|$$
$$=\frac{3\mu_0\mathcal{E}^2}{200\pi R_1^2 D}\left(2\Pi_n+\Pi_{nn}+\sqrt{2}+2\sqrt{5}-3\right)$$

由牛顿第二定律得，总安培力 F_{total} 为运输车提供的加速度大小为

$$a=\frac{F_{\text{total}}}{M}$$
$$=\frac{3\pi\mu_0 r_d^4\mathcal{E}^2}{200(\rho_d D)^2 M}\left[\sqrt{2}+2\sqrt{5}-3+\ln\left(\frac{(2D+r_d)^3}{r_d^3}\frac{\left(D+\sqrt{D^2+r_d^2}\right)^2}{\left(D+\sqrt{D^2+(2D+r_d)^2}\right)^2}\frac{2D+\sqrt{4D^2+r_d^2}}{2D+\sqrt{4D^2+(2D+r_d)^2}}\right)\right].\qquad ⑳$$

第七题解答

（1）（i）当引力波穿过时，在原点附近，x-y 平面上两临近点 (x,y) 和 $(x+dx,y+dy)$ 之间的距离 dr 满足

$$dr=\sqrt{(1+A\sin\omega t)(dx)^2+(1-A\sin\omega t)(dy)^2}\qquad ①$$

在没有引力波的情形下，(x,y) 可用极坐标 (ρ,θ) 表示

$$x=\rho\cos\theta,\ \ y=\rho\sin\theta\qquad ②$$

于是当引力波穿过时，对固定的 θ 方向，有

$$dr=\sqrt{(1+A\sin\omega t)\cos^2\theta+(1-A\sin\omega t)\sin^2\theta}\,d\rho$$
$$=\sqrt{1+A\sin\omega t(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}\,d\rho\qquad ③$$
$$=\sqrt{1+A\sin\omega t\cos2\theta}\,d\rho$$

在与 x 轴夹角为 θ 方向上，两个微探测器之间的距离为

$$D=R\sqrt{1+A\sin\omega t\cos2\theta}\qquad ④$$

由引力波的振幅 $A<<1$ 得

$$D=R(1+\frac{1}{2}A\cos2\theta\sin\omega t)\qquad ⑤$$

两个微探测器之间的距离相对于 R 的偏离为（计算 $\dfrac{D-R}{R}$ 也视为正确）

$$D-R=R\left(\frac{1}{2}A\cos 2\theta\right)\sin\omega t \quad ⑥$$

这是在 R 附近的振幅为 $\frac{1}{2}RA\cos 2\theta$ 、角频率为 ω 的简谐振动。

（ii）无引力波穿过时，微探测器阵列分布在 x-y 平面上以 R 为半径、原点为圆心的圆周上

$$x^2+y^2=R^2 \quad ⑦$$

引力波穿过原点时，系数 f_1 和 f_2 产生了变化；为了使时空形式上成为平直的，可定义

$$X=\sqrt{1+A\sin\omega t}\,x,\ Y=\sqrt{1-A\sin\omega t}\,y \quad ⑧$$

由⑦⑧式得

$$\frac{X^2}{[R\sqrt{1+A\sin\omega t}]^2}+\frac{Y^2}{[R\sqrt{1-A\sin\omega t}]^2}=1 \quad ⑨$$

得到以下方程也视为正确

$$\frac{X^2}{[R(1+\frac{1}{2}A\sin\omega t)]^2}+\frac{Y^2}{[R(1-\frac{1}{2}A\sin\omega t)]^2}=1$$

因此，对于给定的时刻 t，微探测器阵列分布在如⑨式所示的椭圆上；该椭圆的长轴和短轴的长度是随时间而变的。

（iii）在 $z=0$ 处两列波发生干涉，合成结果为

$$A_{\text{tot}}\sin(\omega_{\text{tot}}t+\Phi)=A\sin\omega t+A\sin(\omega t+\phi) \quad ⑩$$

它相当于振幅为 A_{tot} 、频率为 ω_{tot} 的一列引力波在 $z=0$ 处产生的扰动，而 Φ 与时间 t 无关。由三角函数和差化积公式，⑩式右端可写为

$$2A\cos\frac{\phi}{2}\sin(\omega t+\frac{\phi}{2}) \quad ⑪$$

此时，由第（1）（i）问结果可知，两个微探测器距离的扰动为

$$\Delta r=D-R=\left(AR\cos\frac{\phi}{2}\cos 2\theta\right)\sin(\omega t+\frac{\phi}{2}) \quad ⑫$$

两微探测器距离的扰动幅度最小为

$$AR\cos\frac{\phi}{2}\cos 2\theta=0$$

解为

$$\theta=\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}，\ \phi\text{任意；或}\theta\text{任意，}\ \phi=\pi\,. \quad ⑬$$

（注：答 $\theta=\frac{(2k+1)\pi}{4}$，$\phi$ 任意；或 θ 任意，$\phi=(2k+1)\pi$ 也正确）

两微探测器距离的扰动幅度最大为

$$\left|AR\cos\frac{\phi}{2}\cos 2\theta\right|=AR$$

解为

$$\theta=0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2}，\ 且\ \phi=0 \qquad ⑭$$

（注：答 $\theta=\dfrac{k\pi}{2}$ 且 $\phi=2k\pi$ 也正确）

（2）双星系统质量相等，因此系统质心与两星体距离相等，即为 $\dfrac{L}{2}$。假设在 $t=0$ 时刻，两星体在其质心系中的坐标可近似为

$$x_1'(0)=\frac{L}{2},y_1'(0)=0;\ x_2'(0)=-\frac{L}{2},y_2'(0)=0$$

在任意时刻 t，两组坐标值可表示为

$$\begin{aligned}&x_1'(t)=\frac{L}{2}\cos\Omega t,\quad y_1'(t)=\frac{L}{2}\sin\Omega t;\\&x_2'(t)=-\frac{L}{2}\cos\Omega t,\quad y_2'(t)=-\frac{L}{2}\sin\Omega t.\end{aligned} \qquad ⑯$$

代入题给 I_1、I_2 的表达式得

$$I_1(t)=\frac{8\pi G}{c^4}\frac{2}{l}\frac{d^2}{dt^2}M\left[x_1'^2(t)+x_2'^2(t)\right]=-\frac{16\pi G}{c^4}\frac{\Omega^2ML^2}{l}\cos 2\Omega t$$

$$I_2(t)=\frac{8\pi G}{c^4}\frac{2}{l}\frac{d^2}{dt^2}\left[x_1'(t)y_2'(t)\right]=\frac{8\pi G}{c^4}\frac{\Omega^2ML^2}{l}\sin 2\Omega t$$

于是得到引力波在到双星系统质心的距离为 l 处的表达式为

$$\begin{aligned}&f_1=-\frac{16\pi G}{c^4}\frac{\Omega^2ML^2}{l}\cos 2\Omega(t-\frac{l}{c}),\\&f_2=\frac{8\pi G}{c^4}\frac{\Omega^2ML^2}{l}\sin 2\Omega(t-\frac{l}{c}).\end{aligned} \qquad ⑰$$

由⑰式可知，f_1, f_2 的振幅分别为 $\dfrac{16\pi G}{c^4}\dfrac{\Omega^2ML^2}{l}$，$\dfrac{8\pi G}{c^4}\dfrac{\Omega^2ML^2}{l}$；双星系统的角频率 Ω 是引力波频率 ω 的一半即 $\Omega=\dfrac{\omega}{2}$。应用牛顿万有引力定律和牛顿第二定律有

$$G\frac{M^2}{L^2}=M\Omega^2\frac{L}{2}=M\left(\frac{\omega}{2}\right)^2\frac{L}{2} \qquad ⑱$$

由⑱式得，两星体之间的距离为

$$L=2\left(\frac{GM}{\omega^2}\right)^{1/3} \qquad ⑲$$

将上式代入引力波的振幅表达式$\dfrac{16\pi G}{c^4}\dfrac{\Omega^2 ML^2}{l}$，$\dfrac{8\pi G}{c^4}\dfrac{\Omega^2 ML^2}{l}$，可得引力波$f_1, f_2$的振幅为

$$\frac{16\pi}{lc^4}\omega^{2/3}(GM)^{5/3}, \frac{8\pi}{lc^4}\omega^{2/3}(GM)^{5/3} \qquad ⑳$$

第八题解答

（1）考虑氢原子的基态。设电子相对于质子的距离为r，相对于质子的速度大小为v，则在p-e$^-$体系质心系中，质子、电子各自的运动方程为

$$k\frac{e^2}{r^2} = m_i\frac{v_i^2}{r_i} = \mu_{\rm H}\frac{v^2}{r},\quad i = {\rm p}, {\rm e}^-;\quad \mu_{\rm H} = \frac{m_{\rm p}m_{\rm e}}{m_{\rm p}+m_{\rm e}} \qquad ①$$

式中$m_{\rm p}$、$m_{\rm e}$分别是质子、电子的质量，而$r_{\rm p}$、$r_{\rm e}$和$v_{\rm p}$、$v_{\rm e}$分别为质子、电子相对于质心的距离和速度大小

$$r_{\rm p} = \frac{m_{\rm e}}{m_{\rm p}+m_{\rm e}}r,\qquad r_{\rm e} = \frac{m_{\rm p}}{m_{\rm p}+m_{\rm e}}r$$
$$v_{\rm p} = \frac{m_{\rm e}}{m_{\rm p}+m_{\rm e}}v,\qquad v_{\rm e} = \frac{m_{\rm p}}{m_{\rm p}+m_{\rm e}}v$$

e是质子电荷，而$\mu_{\rm H}$被称为p-e$^-$体系的约化质量。利用考虑到质子质量有限性的氢原子量子化条件，质心系轨道总角动量为

$$L = m_1v_1r_1 + m_2v_2r_2 = \mu_{\rm H}vr = n\frac{h}{2\pi},\quad n = 1, 2, \cdots \qquad ②$$

式中n是氢原子能级量子数。氢原子的基态（$n=1$）能为

$$E_{n=1}^{\rm H} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 - \frac{ke^2}{r} = \frac{1}{2}\mu_{\rm H}v^2 - \frac{ke^2}{r} = -\mu_{\rm H}\left(\frac{2\pi}{h}\right)^2\frac{(ke^2)^2}{2} \qquad ③$$

可见，氢原子基态能正比于其约化质量$\mu_{\rm H}$。e$^+$-e$^-$体系的约化质量为$\mu_{\rm Ps} = m_{\rm e}/2$。类比③式，利用题给数据，电子偶素（Ps）原子基态（$n=1$）能量为

$$E_{n=1}^{\rm Ps} = -\mu_{\rm Ps}\left(\frac{2\pi}{h}\right)^2\frac{(ke^2)^2}{2} = \frac{\mu_{\rm Ps}}{\mu_{\rm H}}E_{n=1}^{\rm H} = \frac{m_{\rm p}+m_{\rm e}}{2m_{\rm p}}E_{n=1}^{\rm H},$$
$$= -\frac{1}{2}\times\frac{1837}{1836}\times 13.60\ {\rm eV} \approx -6.804\ {\rm eV} \qquad ④$$

（2）(i) Ps的静质量$m_{\rm Ps}$为

$$m_{\rm Ps} = 2m_{\rm e} + \frac{E_{n=1}^{\rm Ps}}{c^2} \approx 2m_{\rm e} \qquad ⑤$$

这里利用了$E_{n=1}^{\rm Ps} << m_{\rm e}c^2$（见④式）。设电子偶素（Ps）基态原子相对实验室参照系以速度v_0（$v_0 << c$）运动时发生湮没而生成两个光子γ_1和γ_2。湮没前后体系的能量和动量守恒

$$2m_{\rm e}c^2 = E_1 + E_2 \qquad ⑥$$
$$2m_{\rm e}v_0 = p_1\cos\theta_1 + p_2\cos\theta_2 \qquad ⑦$$
$$0 = p_1\sin\theta_1 + p_2\sin\theta_2 \qquad ⑧$$

式中是，p_1和p_2是两光子γ_1和γ_2动量的大小，它们分别满足

$$E_1 = p_1c,\quad E_2 = p_2c \qquad ⑨$$

由⑥⑦⑧⑨式得

$$E_1 = m_e c^2\left(1+\frac{v_0}{c}\cos\theta_1\right) \quad ⑩$$

$$E_2 = m_e c^2\left(1-\frac{v_0}{c}\cos\theta_1\right) \quad ⑪$$

$$v_0 = \frac{\Delta\theta}{2\sin\theta_1}c \quad ⑫$$

⑫式中 $\Delta\theta=\theta_2-(\theta_1+\pi)$，推导中已应用了 $\Delta\theta<<1$（若 $v_0=0$，则 $\Delta\theta=0$；故当 $v_0<<c$ 时应有 $\Delta\theta\propto\frac{v_0}{c}<<1$）。利用题给数据 $\theta_1=\frac{\pi}{3}$，$\Delta\theta=3.462\times10^{-3}$，由⑩⑪⑫式得

$$\begin{aligned}&v_0 = 2.000\times10^{-3}c = 5.996\times10^5\ \mathrm{m/s},\\ &E_1 = 0.5115\mathrm{MeV},\\ &E_2 = 0.5105\mathrm{MeV}.\end{aligned} \quad ⑬$$

(ii) 由⑤式与⑩⑪两等式（不是约等于的结果）得

$$E_{1,2}=\frac{m_{\mathrm{Ps}}c^2}{2}=m_e c^2+\frac{E_{n=1}^{\mathrm{Ps}}}{2}$$

于是由上式和④式得

$$\Delta E = E_{1,2}-m_e c^2=\frac{E_{n=1}^{\mathrm{Ps}}}{2}=-3.402\ \mathrm{eV} \quad ⑭$$

（3）基态电子偶素原子（Ps）以速度 $v_0=c/2$ 运行时发生湮没，设湮没生成的两光子 γ_1 和 γ_2 的动量大小分别为 p_1 和 p_2，光子 γ_1 的运行方向相对于基态原子Ps动量的方向的夹角为 θ_1，光子 γ_2 的运行方向相对于Ps基态的动量的方向的夹角为 θ_2。湮没前后能量和动量守恒，有

$$\frac{m_{\mathrm{Ps}}c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v_0}{c}\right)^2}}=E_1+E_2 \quad ⑮$$

$$p_{\mathrm{Ps}}=\frac{m_{\mathrm{Ps}}v_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v_0}{c}\right)^2}}=p_1\cos\theta_1+p_2\cos\theta_2 \quad ⑯$$

两光子 γ_1 和 γ_2 的的能量和动量仍满足⑧⑨式，联立⑧⑨⑮⑯式得

$$E_1=\frac{m_{\mathrm{Ps}}c^2}{2\sqrt{1-\left(\frac{v_0}{c}\right)^2}}\frac{1-\left(\frac{v_0}{c}\right)^2}{1-\frac{v_0}{c}\cos\theta_1} \quad ⑰$$

$$E_2=\frac{m_{Ps}c^2}{2\sqrt{1-\left(\frac{v_0}{c}\right)^2}}\frac{1-2\frac{v_0}{c}\cos\theta_1+\left(\frac{v_0}{c}\right)^2}{1-\frac{v_0}{c}\cos\theta_1} \tag{18}$$

$$\sin\theta_2=-\frac{1-\left(\frac{v_0}{c}\right)^2}{1-2\frac{v_0}{c}\cos\theta_1+\left(\frac{v_0}{c}\right)^2}\sin\theta_1 \quad 或 \quad \sin\theta_1=-\frac{1-2\frac{v_0}{c}\cos\theta_1+\left(\frac{v_0}{c}\right)^2}{1-\left(\frac{v_0}{c}\right)^2}\sin\theta_2 \tag{19}$$

将题给数据 $v_0=\frac{c}{2}$、$\theta_1=\frac{\pi}{3}$ 以及⑤式代入⑰⑱⑲式得

$$E_1=E_2=0.5901\ \mathrm{MeV},\ \theta_2=\frac{5\pi}{3}. \tag{20}$$

⑲式的另一解 $\theta_2=\frac{4\pi}{3}$ 与⑯式矛盾，已舍去。