

# 第五章 波色系统：波色-爱因斯坦凝聚

## 5.1 理想波色气体中的波色-爱因斯坦凝聚

回忆我们在前面获得的理想波色气体的物态方程：

$$\frac{P}{k_B T} = \frac{1}{\lambda^3} g_{5/2}(z) - \frac{1}{V} \ln(1-z), \quad \frac{1}{v} = \frac{1}{\lambda^3} g_{3/2}(z) + \frac{1}{V} \frac{z}{1-z},$$

这里比容  $v=V/N$ , 平均热波长  $\lambda = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T}}$  逸度  $z$  的定义为  $z = e^{\beta\mu}$ , 其中  $\mu$  为化学势。对波色气体, 我们有:  $0 \leq z \leq 1$ ,  $0 \leq z$  由定义知显然成立;  $z \leq 1$  可由动量为 0 的态的平均占据数  $\langle n_0 \rangle = z/(1-z) \geq 0$  确定。函数  $g_n(z)$  一般地由下式确定：

$$g_n(z) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{z^l}{l^n}$$

当  $z$  取 0 至 1 的值时,  $g_n(z)$  是  $z$  的正的单调递增有界函数（注意在费米系统里  $z$  可取任意大于 0 的值）。对于  $n > 1$  有

$$g_n(1) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^n} = \zeta(n) \quad (n > 1)$$

这是黎曼 Zeta 函数。当  $n \leq 1$ ,  $g_n(1)$  发散。

• 产生凝聚的条件：

把比容的方程改写为： $\lambda^3 \frac{\langle n_0 \rangle}{V} = \frac{\lambda^3}{v} - g_{3/2}(z)$ . 凝聚要求  $\frac{\langle n_0 \rangle}{V} > 0$ , 当  $\frac{\lambda^3}{v} > g_{3/2}(1)$  时, 这必然成立（因  $g_n(z)$  是增函数）。

这样系统可看作两个热力学“相”的混合, 一个相由动量为零的粒子组成, 另一个由动量不为零的粒子组成。

分割面方程由  $\frac{\lambda^3}{v} = g_{3/2}(z) \leq g_{3/2}(1)$  确定，由此可得临界温度  $T_c$  和临界比容  $v_c$  (固定温度  $T$  时):

$$k_B T_c = \frac{2\pi\hbar^2}{m[v g_{3/2}(1)]^{2/3}}, \quad v_c = \frac{\lambda^3}{g_{3/2}(1)}$$

当  $T < T_c$  ( $v$  一定) 或  $v < v_c$  ( $T$  一定) 时，将产生波色-爱因斯坦凝聚。即低温和高密度是产生波色-爱因斯坦凝聚的条件，有凝聚时粒子的平均热波长与粒子平均间距有相同的数量级。

• 大  $V$  极限下的易逸度  $z$ :

对宏观系统来说我们更关心体积  $V$  趋于无穷大的极限情形。

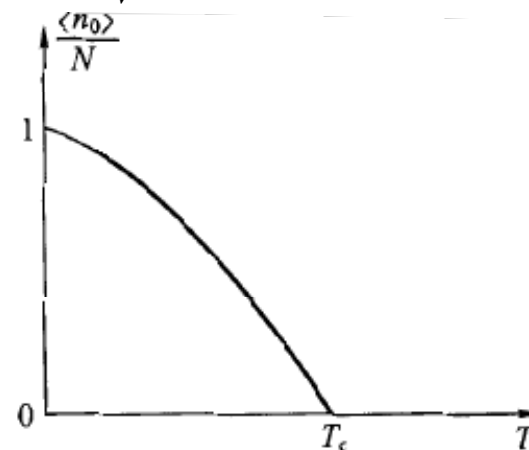
由  $\langle n_0 \rangle = z/(1-z)$  我们可反解出  $z$ :  $z = \langle n_0 \rangle / (\langle n_0 \rangle + 1)$ 。因此在大  $V$  极限下我们有:

$$z = \begin{cases} 1, & \frac{\lambda^3}{v} \geq g_{3/2}(1); \\ \text{方程 } \frac{\lambda^3}{v} = g_{3/2}(z) \text{ 的根}, & \frac{\lambda^3}{v} \leq g_{3/2}(1). \end{cases}$$

• 填布数  $\langle n_0 \rangle$  与温度和比容的关系 (大  $V$  极限下): 利用  $\frac{N}{V} = \frac{1}{\lambda^3} g_{3/2}(z) + \frac{\langle n_0 \rangle}{V}$  和上面的结果可得:

$$\frac{\langle n_0 \rangle}{N} = \begin{cases} 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^{3/2} = 1 - \frac{v}{v_c}, & \frac{\lambda^3}{v} \geq g_{3/2}(1); \\ 0, & \frac{\lambda^3}{v} \leq g_{3/2}(1). \end{cases}$$

粒子在 **动量空间** 里凝聚。  $T=0$  时所有粒子都占据  $p=0$  态。



- 物态方程：压强方程中的第二项可忽略，因  $-\frac{1}{V} \ln(1-z) = -\frac{1}{V} \ln \frac{1}{\langle n_0 \rangle + 1}$ ，它最多是  $N^{-1} \ln N$  的量级，对大系统可忽略。因此物态方程为

$$\frac{P}{k_B T} = \begin{cases} \frac{1}{\lambda^3} g_{5/2}(z), & v > v_c; \\ \frac{1}{\lambda^3} g_{5/2}(1), & v \leq v_c. \end{cases}$$

物态方程在  $v = v_c$  连续，但其导数不连续，因此相变为一级相变。

- 其它热力学量：应分为两段讨论，如内能：

$$\frac{U}{N} = \frac{3}{2} P v = \begin{cases} \frac{3}{2} \frac{k_B T v}{\lambda^3} g_{5/2}(z), & v > v_c; \\ \frac{3}{2} \frac{k_B T v}{\lambda^3} g_{5/2}(1), & v \leq v_c. \end{cases}$$

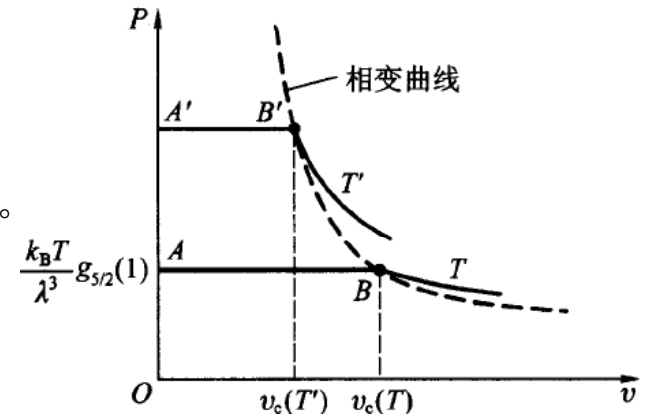
熵：

$$\frac{S}{N k_B} = \begin{cases} \frac{5}{2} \frac{v}{\lambda^3} g_{5/2}(z) - \ln z, & v > v_c; \\ \frac{5}{2} \frac{v}{\lambda^3} g_{5/2}(1), & v \leq v_c. \end{cases}$$

定容比热：

$$\frac{C_V}{N k_B} = \begin{cases} \frac{15}{4} \frac{v}{\lambda^3} g_{5/2}(z) - \frac{9}{4} \frac{g_{3/2}(z)}{g_{1/2}(z)}, & v > v_c; \\ \frac{15}{4} \frac{v}{\lambda^3} g_{5/2}(1), & v \leq v_c. \end{cases}$$

在  $T=0$  附近我们有  $C_V \sim T^{3/2}$ ，这与光子和声子的行为不同，原因是它们的能谱不同。而在  $T_c$  处比热是连续的（因  $g_{1/2}(1)$  发散），比热的导数不连续。



## 5.2 非理想波色气体中的波色-爱因斯坦凝聚

考虑N个无自旋波色粒子组成的稀薄气体系统，体积为V，系统处于低温且相互作用为二体碰撞。在一级近似下，系统哈密顿量为：

$$\hat{H} = -\sum_i \frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 + \frac{4\pi a \hbar^2}{m} \sum_{i < j} \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j).$$

这里我们把势能项看作微扰。

设无微扰波函数（自由粒子系统波函数）为  $\Phi_n = \{\dots, n_p, \dots\}$ ，其中  $n_p$  为单粒子态中粒子的填布数。在一级近似下，系统能量为：

$$\begin{aligned} E_n = (\Phi_n, \hat{H} \Phi_n) &= \sum_p \frac{p^2}{2m} n_p + \frac{4\pi a \hbar^2}{m} \left( \Phi_n, \sum_{i < j} \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \Phi_n \right) \\ &= \sum_p \frac{p^2}{2m} n_p + \frac{4\pi a \hbar^2}{mV} \left( N^2 - \frac{1}{2} \sum_p n_p^2 \right) \end{aligned}$$

成立条件为  $a/V^{1/3} \ll 1, ka \ll 1$ ,  $\mathbf{k}$  为一对粒子的相对波矢，即粒子只能激发到动量较小的态。上面最后一个等式的推导见杨展如书93-95页。

在基态，我们让  $n_0 = N$ ，而其它所有  $n_p$  为零，基态能量为：
$$\frac{E_0}{N} = \frac{2\pi a \hbar^2}{mv} = \left( \frac{\hbar}{m} \right)^2 2\pi a \rho, \rho = \frac{Nm}{V} = \frac{m}{v}$$
而低激发态能级同时含有连续谱和分立谱。在极低温度下，只有少量粒子激发，能量表达式可进一步近似为：

$$E_n = \sum_p \frac{p^2}{2m} n_p + \frac{4\pi a \hbar^2}{mV} \left( N^2 - \frac{1}{2} n_0^2 \right).$$

下面我们要找到物态方程。我们考虑极低温的情况，即  $a/\lambda \ll 1, a\lambda^2/v \ll 1$ ，并用  $\mathbf{n}$  代表  $\{n_p\}$ ，能量的动能部分记为  $\varepsilon_n = \sum_p \frac{p^2}{2m} n_p$ ，记  $\xi \equiv n_0/N$ ，配分函数为：

$$Z_N \equiv \text{Tre}^{-\beta \hat{H}} = \sum_n e^{-\beta \varepsilon_n} e^{-N \left( \frac{a\lambda^2}{v} \right) (2-\xi^2)} = Z_N^{(0)} \langle e^{-N \left( \frac{a\lambda^2}{v} \right) (2-\xi^2)} \rangle_0$$

其中  $Z_N^{(0)}$  为理想波色气体的配分函数。 $\langle \dots \rangle_0$  是对理想波色气体的统计平均。

每个粒子的自由能为：

$$\frac{F}{N} = \frac{F^{(0)}}{N} - \frac{k_B T}{N} \ln \left\langle e^{-N \left( \frac{a\lambda^2}{v} \right) (2 - \xi^2)} \right\rangle_0 \approx \frac{F^{(0)}}{N} + k_B T \frac{a\lambda^2}{v} \langle (2 - \xi^2) \rangle_0 = \frac{F^{(0)}}{N} + \frac{4\pi a \hbar^2}{mv} \left( 1 - \frac{1}{2} \langle \xi^2 \rangle_0 \right)$$

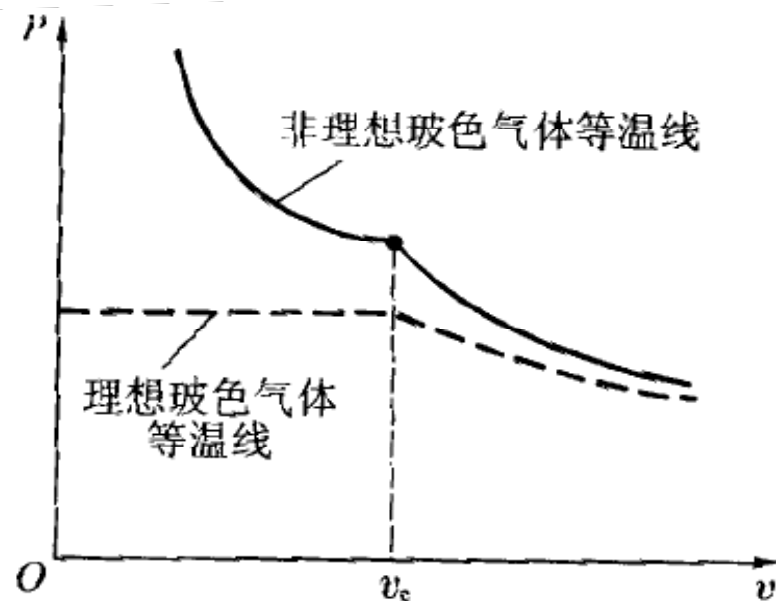
压强可由自由能得到：

$$P = - \left( \frac{\partial F}{\partial v} \right)_{T,N} = P^{(0)} + \frac{4\pi a \hbar^2}{m} \left[ \frac{1}{v^2} \left( 1 - \frac{1}{2} \langle \xi^2 \rangle_0 \right) + \frac{1}{2v} \frac{\partial \langle \xi^2 \rangle_0}{\partial v} \right]$$

作近似  $\langle \xi^2 \rangle_0 \approx (\langle \xi \rangle_0)^2 = \bar{\xi}^2$  后可得：

$$P = \begin{cases} P^{(0)} + \frac{4\pi a \hbar^2}{mv^2}, & (v > v_c, T > T_c) \\ P^{(0)} + \frac{2\pi a \hbar^2}{m} \left( \frac{1}{v^2} + \frac{1}{v_c^2} \right), & (v < v_c, T < T_c) \end{cases}$$

这个相变是二级相变。



### 5.3 波色-爱因斯坦凝聚实验的基本原理

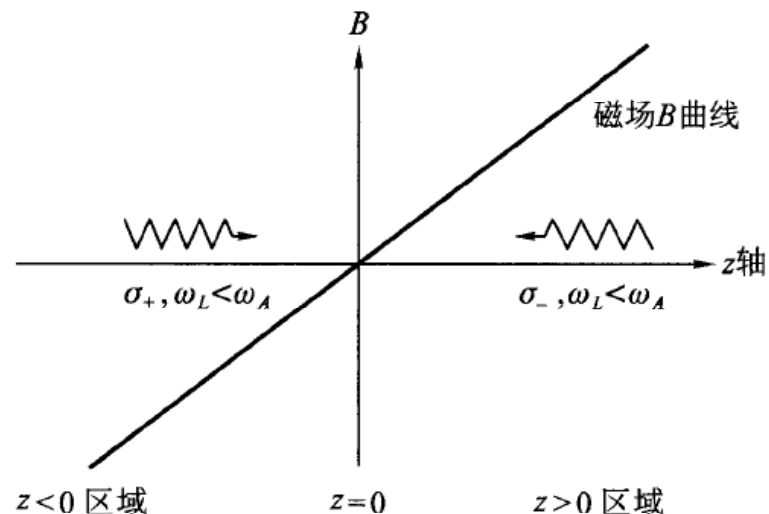
实验困难：大多数气体在极低温下不呈现气态。

1995年：三个研究组用Rb, Na 和Li蒸气在简谐磁陷阱中在极低温下观察到了波色-爱因斯坦凝聚现象。

实验的基本原理有两个：

(1) 多普勒致冷（动量空间的压缩）：恰当选取激光频率，可使得原子在多次吸收激光后，动量不断减小。

(2) 磁-光陷阱（坐标空间囚禁）：  
在磁场中原子激发态能级发生分裂，原子通过两束沿z轴相对运动的激光激发。激光频率小于原子无磁场时的跃迁频率。这样，不论在 $z>0$ 还是 $z<0$ 区域内只能吸收向坐标原点方向传播的激光，受到一个指向 $z=0$ 点的辐射力 $F=-kz$ ，这样原子处于一个辐射力造成的简谐势阱中。



## 5.4 简谐势阱中理想波色气体中的波色-爱因斯坦凝聚

详见杨展如书98-102页。

### 5.4 非简谐势阱中理想波色气体中的波色-爱因斯坦凝聚

温度很低时，原子的德布罗意波长（热波长）比原子相互作用程大很多，原子间的相互作用是很弱的完全被量子力学中讨论过的S-波散射所支配，因此我们只需考虑二体碰撞。S-波散射可以用散射长度 $a$ 来表征，相互作用势可近似写为： $U(r-r')=U_0\delta(r-r')$

因此在外界简谐势场  $V_{trap}(r)$  中，波色场算符满足（海森堡绘景，坐标表象）：

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\psi}(r,t)}{\partial t} = [\hat{\psi}(r,t), \hat{H}] = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{trap}(r) + \int d^3r' \hat{\psi}^\dagger(r',t) U(r-r') \hat{\psi}(r',t) \right] \hat{\psi}(r,t)$$
$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{trap}(r) \right] \hat{\psi}(r,t) + U_0 \hat{\psi}^\dagger(r,t) \hat{\psi}(r,t) \hat{\psi}(r,t)$$

这个方程可在平均场近似下求解。关键是把波色场算符分为凝聚部分和非凝聚部分(博戈留波夫近似)：

均匀空间情形：

理想波色气体的基态是所有粒子都处于单粒子的零动量态，其低激发态仍有量级为 $N$ 的粒子占据零动量态，而  $p \neq 0$  的态的占据数很少。我们假定这对近理想波色气体仍然成立。

令  $\hat{a}_p$  ( $\hat{a}_p^\dagger$ ) 为动量为 $p$ 的单粒子态的湮灭(产生)算符，我们有

$$\hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 = N_0 \approx N, \quad \hat{a}_0 \hat{a}_0^\dagger - \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 = 1 \ll N$$

故  $\hat{a}_0\hat{a}_0^+ = N_0 + 1 \approx \hat{a}_0^+\hat{a}_0$

这表明在这种近似下我们可以忽略  $\hat{a}_p, \hat{a}_p^+$  的非对易性，把它们当作非算符的量（C数）。这样场算符可以写为两部分：

$$\hat{\psi}(r) = \sum_p \psi_p(r) \hat{a}_p = \psi_0 \hat{a}_0 + \sum_{p \neq 0} \psi_p(r) \hat{a}_p = \sqrt{\frac{N}{V}} + \hat{\psi}'(r)$$

推广到空间非均匀和与时间有关的情形，我们有：

$$\hat{\psi}(r, t) = \Phi(r, t) + \hat{\psi}'(r, t),$$

这里  $\Phi(r, t) \equiv \langle \hat{\psi}(r, t) \rangle$ ， $\hat{\psi}'(r, t)$  是围绕平均值的量子涨落（一个小量）。带入到上面的方程即得（GP方程）：

$$i\hbar \frac{\partial \Phi(r, t)}{\partial t} = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{trap}(r) + N_0 U_0 |\Phi(r, t)|^2 \right] \Phi(r, t)$$

用巨正则系综我们可以研究系统的平衡性质。凝聚部分的哈密顿量为：

$$\begin{aligned} K_0 &= H_0 - \mu N_0 = H_0 - \mu \int d^3r \Phi^*(r) \Phi(r) \\ &= \int d^3r \Phi^*(r) \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{trap}(r) - \mu \right] \Phi(r) + \frac{1}{2} \int d^3r U_0 \Phi^*(r) \Phi^*(r) \Phi(r) \Phi(r) \end{aligned}$$

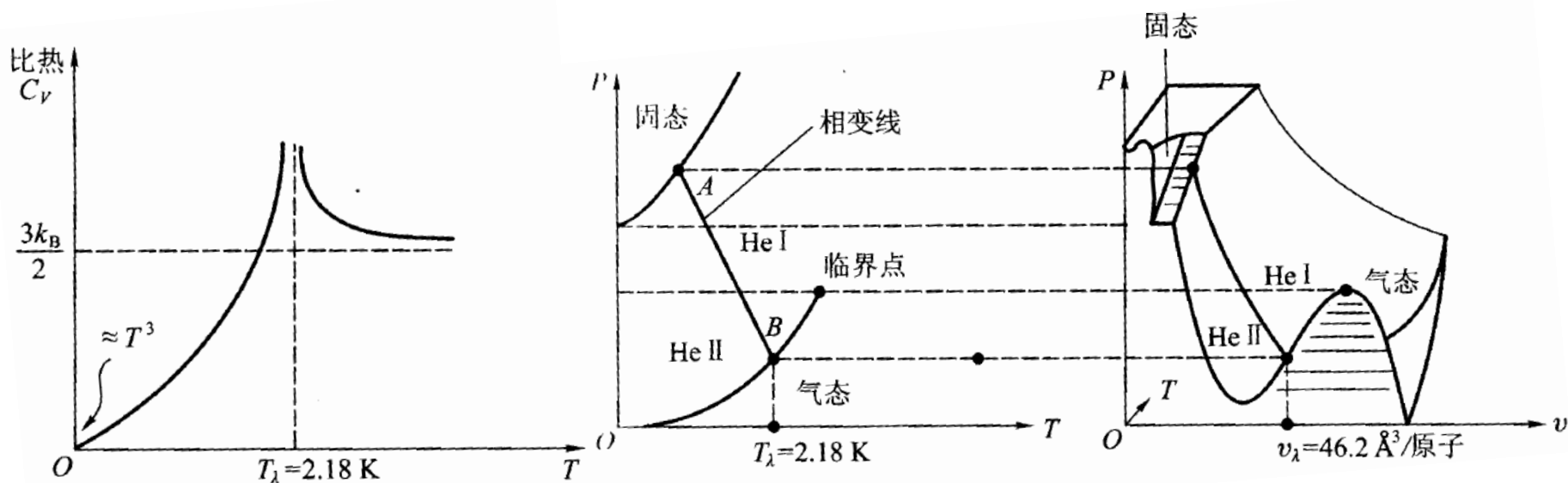
统计平衡时系统的  $\hat{K}$  的平均值有极小值，故有  $\frac{\delta K_0}{\delta \Phi^*} = 0$ ，从上式代入并解之得：

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{trap}(r) + N_0 U_0 |\Phi(r, t)|^2 \right] \Phi(r, t) = \mu \Phi(r, t)$$

# 第六章 波色系统：超流性

## 6.1 液 $\text{He}^4$ 中的超流相变

自然界中的氦有两种稳定的同位素： $\text{He}^3$ 和 $\text{He}^4$ 。 $\text{He}^3$ 是费米子， $\text{He}^4$ 是玻色子。氦原子间相互作用很弱，原子的质量很小从而零点振动能很大，这使得在常压下直到接近绝对零度氦仍可保持液态。在很低的温度下，量子效应起主导作用，因此液氦是典型的量子液体。



液 $\text{He}^4$ 有两个不同的相：正常相He I和超流相He II，正常相沿饱和蒸汽压曲线降温，在温度 $T_\lambda=2.18\text{K}$ 和比容 $v_\lambda=46.2\text{\AA}^3/\text{原子}$ 处发生He I到He II的相变。相变无潜热和体积变化，在相变点比热以对数形式趋于无穷大，表明这是二级相变。比热线很像 $\lambda$ ，因此此相变又称为 $\lambda$ 相比，曲线AB称为 $\lambda$ 线。在 $T=0$ 附近，比热以 $T^3$ 规律趋于零。

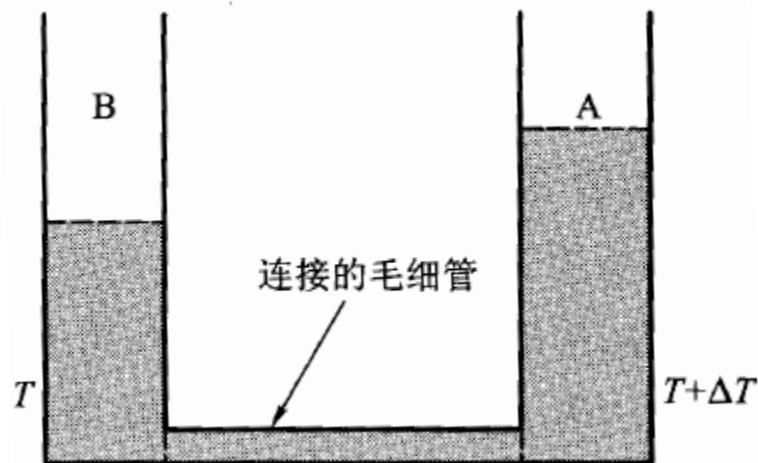
## 6.2 液He II的特性 二流体模型

液He II的特性:

1. 液He II能沿极细的毛细管流动而不呈现任何粘滞性, 这称为超流性。而且存在一个临界速度, 在这个速度以上, 超流性被破坏。
2. 如用一细丝悬挂一薄圆盘浸泡在液He II里, 并让圆盘作扭转振动, 可以用来测粘滞系数。结果比“毛细管”法测得的大 $10^6$ 倍(与正常相的相似)。且测得的系数强烈依赖于温度, 随 $T \rightarrow 0K$ 而趋于零。
3. 当液He II由容器A通过多孔塞(或极细的毛细管)流出时, A内液He II的温度升高(见右下图)。这称为机械热效应, 其逆过程称为热机械效应。
4. 液He II的热导率很大, 数量级为室温下铜的800倍, 而且其热导与通常流体不同, 并不正比于温度梯度。

**二流体模型**的解释:

1. 液He II由正常流体和超流体两种成分组成。超流体没有粘滞性, 熵也为零; 正常流体具有粘滞性和熵, 用 $\rho_s$ 和 $\rho_n$ 表示超流体和正常流体的质量密度, 速度场为 $v_s$ 和 $v_n$ , 则总质量密度为:  $\rho = \rho_s + \rho_n$ , 总质量流为:  
$$\rho v = \rho_s v_s + \rho_n v_n$$



2.  $T=0K$ 时, 全部液体为超流体;  $T = T_\lambda$  时, 全部为正常成分。二者之间时 $\rho_s / \rho$  是温度的函数。
3. 超流成分的速度场是无旋的, 即  $\nabla \times v_s = 0$ 。且两种流体成分可以相对流动而彼此间无摩擦(无动量交换)。

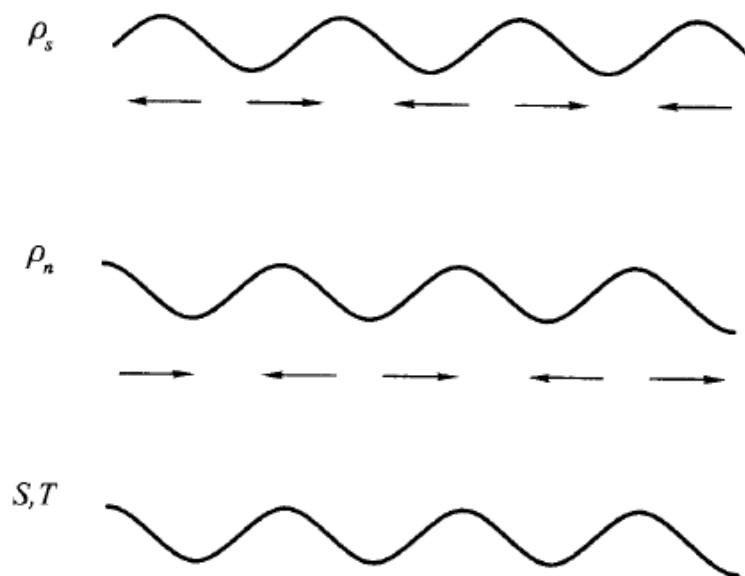
只有超流成分可通过毛细管，这解释了特性一；

只有正常流体成分才对圆盘振动起阻尼作用，这解释了特性二；

机械制热效应：由毛细管流出的只是超流成分，不带走熵。因而容器内流体的单位质量的熵将增加，导致温度增加。这解释了特性三；

特性四：设想均匀温度的液He II中，某点附近温度突然稍稍上升。按二流体模型，热点的  $\rho_n/\rho$  要增加，而  $\rho_s/\rho$  将减小，造成两种成分的密度涨落。为恢复平衡，热点附近的超流成分将向热点流动，同时正常成分将向反方向流动而离开热点，这称作“内运流”。这种内部调整进行的很快，使液He II有极好的导热性。

由于液He II中有两种成分，朗道预言He II中会有两种独立的振动波：若  $v_s$  和  $v_n$  方向一致，则振动波传递密度和压强的变化，这是普通的声(第一声)；若  $v_s$  和  $v_n$  方向相反，则可能在保持总密度  $\rho = \rho_s + \rho_n$  基本不变的情况下， $\rho_s, \rho_n$  分别有涨落。由于超流成分熵为零， $\rho_n$  的涨落决定了熵密度的涨落和温度的涨落（如图所示）。



## 6.3 超流体的涡旋运动

昂萨格和费因曼在理论上指出，在液He II的基态或液He II的超流成分中，可以存在一种“组织化的运动”——量子化的涡旋。设N个玻色子组成的超流体的基态波函数为 $\Psi_0$ ，若液He II相以匀速 $v_s$ 运动，则系统波函数为：

$$\Phi = \Psi_0 e^{\frac{i}{\hbar} p_s \cdot R} = \Psi_0 \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} N m v_s \cdot \frac{1}{N} \sum_j^N r_j \right\}$$

这里  $p_s = N m v_s$  是超流体宏观运动的动量， $R$ 是质心坐标。若各粒子 $v_s$ 不均匀，在局部意义上上式仍是一个较好的近似。即在比速度发生显著变化的距离小得多的范围内，由局部位移引起的波函数的相位变化为：

$$\Delta\phi = \frac{m}{\hbar} \sum_j (v_{s_j} \cdot \Delta r_j)$$

现在考虑超流体的涡旋。设想液He II相中的一个闭合环，使环上每一原子从其原位置移到其最近邻位置上。由于波函数的对称性，波函数不变。因此这种位移引起的波函数的相位变化必为 $2\pi$ 的整数倍，即

$$\frac{m}{\hbar} \sum_j (v_{s_j} \cdot \Delta r_j) = 2\pi n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

注意求和只对环上的所有原子求和，对宏观尺度的闭合环，求和可换为积分：

$$\oint v_s \cdot dl = n \frac{h}{m} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

这表明，环流是量子化的，环流量子为 $h/m$ 。由此可证超流成分的无旋性。由斯托克斯定理，

$$\iint_S (\nabla \times v_s) \cdot dS = n \frac{h}{m} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$S$ 为积分回路包围的曲面面积。若此区域是单连通的，且流速 $v_s$ 在 $S$ 内处处连续，则左方的积分可以随 $S$ 连续地趋于零，但右方不能连续变化，故只有  $\nabla \times v_s = 0$ 。

但对复连通区域或  $v_s$  有奇点的情形上式不成立。如一个中心在  $r=0$  处的柱对称的涡旋，其速度场为  $v = (v_r, v_\phi, v_z) = (0, \omega r, 0)$ 。 $r=0$  是  $v$  的奇点。除涡旋轴 ( $r=0$ ) 外，我们仍有  $\nabla \times v_s = 0$ ，但对以  $r=0$  为中心且垂直于  $z$  轴的圆的积分回路，我们有

$$\oint v_s \cdot dl = v_\phi 2\pi r = n \frac{h}{m} \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

实验已观测到量子化涡旋，其半径为  $1\text{\AA}$  左右。

圆柱型容器中超流体的旋转：

对正常液体，由于重力和离心力，液体的自由表面呈抛物面状：

$$z(r) = z(0) + \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

对超流体又如何？

实验发现超流体和正常液体的形状是一样的。如何与  $\nabla \times v_s = 0$  的假设协调？

如右图，考虑一系列互相平行的涡旋线的均匀分布阵列。

每一（最小）涡旋的环流为  $h/m$ ，以  $N$  表示单位面积的涡旋线数。考虑半径为  $r$  及  $r+dr$  的两圆之间的封闭面元。涡旋线环流之和是  $N 2\pi r dr h/m$ 。除去  $r$  和  $r+dr$  的圆边界外，相邻涡旋的速度场彼此抵消。

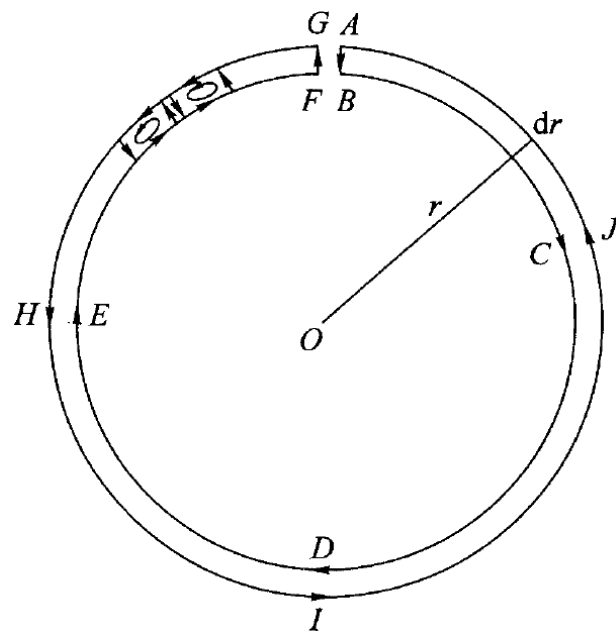
另一方面，面元周界的净环流又可以计算如下：

$$(v + dv) 2\pi(r + dr) - v 2\pi r \approx 2\pi d(rv)$$

两种算法的结果应相等，故有  $N = \frac{m}{hr} \frac{d(rv)}{dr}$

若要超流体和正常液体以相同的方式旋转，只需取

$N = \text{Const.} = 2\omega m/h$  即可。涡旋线间的距离  $d \approx 1/\sqrt{N}$ ，当  $\omega = 1\text{rad/s}$  时， $d$  约为  $0.1\text{mm}$  量级，这远比量子化涡旋大。



## 6.4 朗道超流理论

朗道理论的基本图像是把液He II看成受弱激发的量子波色系统，弱激发态与基态( $T=0K$ )的偏离表现为在安稳的背景上出现了由元激发或准粒子组成的气体，后者与二流体模型中的正常液体成分对应，而前者代表超流成分（回忆上章最后一节的另一个例子）。

当温度很低时，元激发的密度很低，可以把它们看作元激发的理想气体。令 $\mathbf{p}$ 和 $\varepsilon(\mathbf{p})$ 代表元激发的动量和能量， $n(\mathbf{p})$ 表示相应的元激发数，则系统低激发态的总能量和动量为：

$$E = E_0 + \sum_{\mathbf{p}} n(\mathbf{p}) \varepsilon(\mathbf{p}), \quad P = \sum_{\mathbf{p}} n(\mathbf{p}) \mathbf{p}.$$

朗道进一步假设液He II中存在两种不同的波色型元激发（准粒子），即声子和旋子。当 $T \ll T_\lambda$ 时，液He II的比热随 $T^3$ 变化，这是声子的特征，其能谱为 $\varepsilon = c p$ ， $c$ 为声子速度。当温度稍高时，比热有一如 $\exp[-\Delta/k_B T]$ 的附加项，其中 $\Delta$ 为常数。由此推测对较大的动量，元激发能量有一个能隙，朗道假定在这个动量范围内能谱为：

$$\varepsilon(p) = \hbar \omega_k = \Delta + \frac{(p - p_0)^2}{2m^*} = \Delta + \frac{\hbar^2 (k - k_0)^2}{2m^*}$$

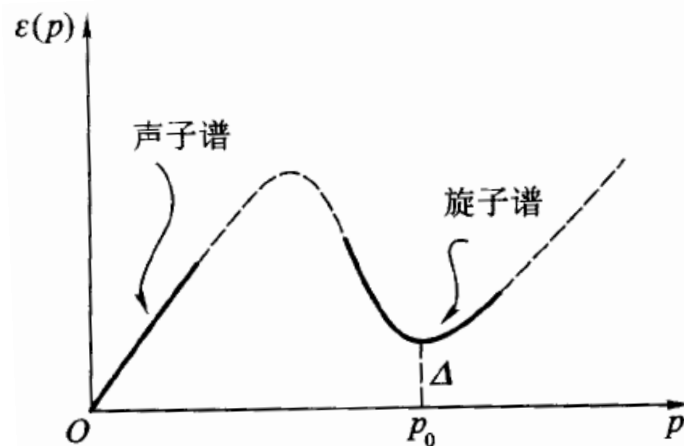
$m^*$  是旋子的有效质量。

### 热力学性质：

这里准粒子被看作是理想波色气体，准粒子数目不确定，系统的化学势为零。准粒子在能量 $\hbar \omega_k$ 的平均占据数为：

$$\langle n_k \rangle = 1 / (e^{\beta \hbar \omega_k} - 1),$$

由此可得内能： $U = E_0 + \sum_k \hbar \omega_k \langle n_k \rangle = E_0 + \frac{V}{2\pi^2} \int_0^\infty dk \frac{k^2 \hbar \omega_k}{e^{\beta \hbar \omega_k} - 1}$ ，和定容比热  $C_V = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V$



因此声子部分贡献的比热为：
$$\frac{C_{\text{声}}}{Nk_B} = \frac{2\pi^2 v (k_B T)^3}{15(\hbar c)^3}$$

旋子贡献的比热在假设  $k_B T / \Delta$  为小量时，可得

$$\frac{C_{\text{旋}}}{Nk_B} = \frac{2\sqrt{m^*} (k_0 \Delta)^2 v e^{-\Delta/k_B T}}{\hbar (2\pi k_B T)^{3/2}}$$

这些结果与实验符合的很好。

### 超流的临界速度：

设质量为  $M$  的超流体以宏观速度  $v$  运动，其动量和能量为：

$$P = Mv, \quad E = \frac{1}{2} Mv^2 = \frac{P^2}{2M}$$

因此动量和能量的任何变化必满足： $\delta E = v \cdot \delta P$

设这一变化是由超流体产生了一个新的元激发引起，其动量为  $p$ ，能量为  $\varepsilon(p)$ 。

按能量和动量守恒，元激发的动量和能量必由消耗超流体的宏观流动的动量和能量而来，故

$$p = -\delta P, \quad \varepsilon(p) = -\delta E$$

因此我们有  $\varepsilon(p) = v \cdot p \leq vp$  或  $v \geq \varepsilon(p)/p$ 。

上式说明，要能产生元激发，必须超流体的宏观流速大于  $\varepsilon(p)/p$ ；反之对一切小于  $\varepsilon(p)/p$  的  $v$  值，则由于宏观流动而产生新的元激发是不可能的，即流体继续保持超流。由此得到超流判据：

$$v < \left( \frac{\varepsilon(p)}{p} \right)_{\min} \equiv v_c$$

$v_c$  即为超流的临界速度。由此易知自由粒子能谱  $\varepsilon(p) = \frac{p^2}{2m}$  不可能有超流，因  $v_c = \left( \frac{\varepsilon(p)}{p} \right)_{\min} = \left( \frac{p}{2m} \right)_{\min} = 0$ 。

## 6.5 简并性近理想波色气体 波戈留波夫变换

这里我们用一个简并型近理想波色气体模型来微观地给出液He II的声子能谱。

近理想气体是稀薄的（即密度低），相互作用很弱（可以看作微扰）的粒子系统。此外我们仅考虑系统的低温性质，这时量子效应很明显。几个相关参数：

- 散射长度 $a$ , 它反映相互作用势的强度和作用范围；
- 平均热波长 $\lambda_T$ ，它代表粒子波包的平均空间范围，属于量子效应，低温时 $\lambda_T$ 可以很大；
- 粒子间平均距离 $l$ ,  $l \sim n^{-1/3}$ （ $n$ 为气体密度）。

我们假定这三个参数间有如下关系：

$$a \ll \lambda_T; \quad a \ll l; \quad \lambda_T \approx l \ll L (L \text{ 为容器线度})$$

因此相互作用可以按小量  $a/\lambda_T$  展开。

### 哈密顿量及其简化：

设近理想波色气体由 $N$ 个全同的，自旋为零的波色子组成，系统哈密顿量为：

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \hat{u}(r_i - r_j) \equiv \hat{H}_0 + \hat{H}_{\text{int}}$$

采用二次量子化表述，上式可写为： $\hat{H}_0 = \sum_p \frac{p^2}{2m} \hat{a}_p^+ \hat{a}_p$ ,  $\hat{H}_{\text{int}} = \frac{1}{2} \sum_{p'_1, p'_2, p_1, p_2} \langle p'_1 p'_2 | \hat{u} | p_1 p_2 \rangle \hat{a}_{p'_1}^+ \hat{a}_{p'_2}^+ \hat{a}_{p_2} \hat{a}_{p_1}$ ,

其中第二式的求和要满足动量守恒条件， $\hat{a}_p^+$ 及 $\hat{a}_p$ 分别为动量为 $p$ 的单粒子态的产生和湮灭算符，它们满足波色算符的对易关系： $[\hat{a}_p, \hat{a}_{p'}^+] = \delta_{pp'}$ ,  $[\hat{a}_p, \hat{a}_{p'}] = [\hat{a}_p^+, \hat{a}_{p'}^+] = 0$ .

相互作用矩阵元为

$$\langle p'_1 p'_2 | \hat{u} | p_1 p_2 \rangle = \iint d^3 r_1 d^3 r_2 \varphi_{p'_1}^*(r_1) \varphi_{p'_2}^*(r_2) \hat{u}(r_1 - r_2) \varphi_{p_2}(r_2) \varphi_{p_1}(r_1),$$

其中  $\varphi_p(r) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{\frac{i}{\hbar} p \cdot r}$  是动量为 $p$ 的单粒子态的波函数。

把波函数表达式代入即可得  $\langle p'_1 p'_2 | \hat{u} | p_1 p_2 \rangle = \frac{1}{V} \int d^3 r e^{i(p \cdot r)/\hbar} u(r)$ ,  
 这里  $p \equiv p_1 - p'_1 = p'_2 - p_2$ ,  $r = r_1 - r_2$ .

在低温下, 由量子力学低能散射的波恩近似, 对散射长度  $a$  我们有:  $a = \frac{m}{4\pi\hbar^2} \int u(r) e^{i(p \cdot r)/\hbar} dr$ ,  
 在低能散射下, 动量转移  $p$  很小, 可取近似  $e^{i(p \cdot r)/\hbar} \approx 1$ 。因此

$$a \approx \frac{m}{4\pi\hbar^2} \int u(r) dr = \frac{mu_0}{4\pi\hbar^2}, \quad \langle p'_1 p'_2 | \hat{u} | p_1 p_2 \rangle \approx \frac{u_0}{V}$$

因此体系的哈密顿量可写为:  $\hat{H} = \sum_p \frac{p^2}{2m} \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p + \frac{u_0}{2V} \sum \hat{a}_{p'_1}^\dagger \hat{a}_{p'_2}^\dagger \hat{a}_{p_2} \hat{a}_{p_1}$ .

再进一步, 我们可以考虑波戈留波夫近似, 即  $\hat{a}_0^+$  和  $\hat{a}_0$  近似地代之以  $c$  数 (可交换数)  $\sqrt{n_0}$ 。而且由于我们只考虑低激发态, 有:

$$n_0 / N \approx 1, \quad n_p / N \ll 1 (p \neq 0).$$

因此  $\hat{a}_p^+$  和  $\hat{a}_p (p \neq 0)$  可看作小量, 我们只保留到二次项, 而略去三次及以上的高阶小量。故

$$\hat{H}_{\text{int}} = \frac{u_0}{2V} \left\{ \hat{a}_0^+ \hat{a}_0^+ \hat{a}_0 \hat{a}_0 + \sum_{p \neq 0} (\hat{a}_p^+ \hat{a}_{-p}^+ \hat{a}_0 \hat{a}_0 + \hat{a}_0^+ \hat{a}_0^+ \hat{a}_p \hat{a}_{-p} + \hat{a}_0^+ \hat{a}_p^+ \hat{a}_0 \hat{a}_p + \hat{a}_0^+ \hat{a}_p^+ \hat{a}_p \hat{a}_0 + \hat{a}_p^+ \hat{a}_0^+ \hat{a}_0 \hat{a}_p + \hat{a}_p^+ \hat{a}_0^+ \hat{a}_p \hat{a}_0) + \text{高次项} \right\}$$

其中  $\hat{a}_0^+ \hat{a}_0^+ \hat{a}_0 \hat{a}_0 \approx n_0^2 \approx N^2 - 2N \sum_{p \neq 0} \hat{a}_p^+ \hat{a}_p$ ,

二次项的六项近似为  $n_0 (\hat{a}_p^+ \hat{a}_{-p}^+ + \hat{a}_p \hat{a}_{-p} + 4\hat{a}_p^+ \hat{a}_p)$ 。

因此哈密顿量最终近似为:  $\hat{H} = \sum_{p \neq 0} \frac{p^2}{2m} \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p + \frac{N^2 u_0}{2V} + \frac{Nu_0}{2V} \sum_{p \neq 0} (\hat{a}_p^\dagger \hat{a}_{-p}^\dagger + \hat{a}_p \hat{a}_{-p} + 2\hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p)$

## 波戈留波夫变换:

类似上章末节, 我们可以通过波戈留波夫变换来把哈密顿量严格对角化。

引入新的波色产生和湮灭算符  $\hat{b}_p^+$  和  $\hat{b}_p$  :

$$\hat{b}_p^+ = u_p \hat{a}_p^+ - v_p \hat{a}_{-p}^-, \quad \hat{b}_p = u_p \hat{a}_p - v_p \hat{a}_{-p}^+,$$

其中  $u_p$  和  $v_p$  为两个待定参数, 常取为实数, 且  $u_p = u_{-p}, v_p = v_{-p}$ 。可以验证若令  $u_p^2 - v_p^2 = 1$  则  $\hat{b}_p^+$  和  $\hat{b}_p$  满足波色对易关系 (注意这两个参数还有一个自由度)。上式的逆变换为:

$$\hat{a}_p^+ = u_p \hat{b}_p^+ + v_p \hat{b}_{-p}^-, \quad \hat{a}_p = u_p \hat{b}_p + v_p \hat{b}_{-p}^+,$$

带入到哈密顿量表达式中得

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \frac{N^2 u_0}{2V} + \sum_{p \neq 0} \left\{ \left( \frac{p^2}{2m} + \frac{Nu_0}{V} \right) v_p^2 + \frac{Nu_0}{V} u_p v_p \right\} + \sum_{p \neq 0} \left\{ \left( \frac{p^2}{2m} + \frac{Nu_0}{V} \right) (u_p^2 + v_p^2) + \frac{2Nu_0}{V} u_p v_p \right\} \hat{b}_p^+ \hat{b}_p \\ & + \sum_{p \neq 0} \left\{ \left( \frac{p^2}{2m} + \frac{Nu_0}{V} \right) u_p v_p + \frac{Nu_0}{2V} (u_p^2 + v_p^2) \right\} (\hat{b}_p^+ \hat{b}_{-p}^+ + \hat{b}_p \hat{b}_{-p}^-) \end{aligned}$$

我们可取两个待定参数的值使得:  $\left( \frac{p^2}{2m} + \frac{Nu_0}{V} \right) u_p v_p + \frac{Nu_0}{2V} (u_p^2 + v_p^2) = 0$ , 则上式最后一项为零, 哈密顿量被对角化。

解出参数的值可得:  $u_p = \frac{1}{\sqrt{1-L_p^2}}, v_p = \frac{L_p}{\sqrt{1-L_p^2}}$ , 其中  $L_p = \frac{1}{mu^2} \left\{ \varepsilon(p) - \frac{p^2}{2m} - mu^2 \right\}, u = \left( \frac{4\pi\hbar^2 aN}{m^2 V} \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{u_0 N}{mV}}$ 。

故哈密顿量为:  $\hat{H} = E_0 + \sum_{p \neq 0} \varepsilon(p) \hat{b}_p^+ \hat{b}_p = E_0 + \sum_{p \neq 0} \varepsilon(p) \hat{n}_p$ ,

其中  $E_0 = \frac{1}{2} Nmu^2 + \frac{1}{2} \sum_{p \neq 0} \left\{ \varepsilon(p) - \frac{p^2}{2m} - mu^2 + \frac{m^3 u^4}{p^2} \right\}, \quad \varepsilon(p) = \left[ u^2 p^2 + \left( \frac{p^2}{2m} \right)^2 \right]^{1/2}$ 。