

第五，第六章 波色系统练习

1. 证明杨展如书的3.1.36 式，即理想波色气体 $T > T_c$ 和 $T < T_c$ 时的定容比热公式。
2. (a) 计算二维理想波色气体的巨配分函数 $\Xi(z, V, T)$ 及极限 $\lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \ln \Xi(z, V, T)$, 这里 $V = L^2$ 是系统的面积; (b) 说明为何二维理想波色气体不会有波色-爱因斯坦凝聚。

第七章 费米系统

7.1 理想费米气体的一般性质

在3.7节我们获得了理想费米气体的物态方程：

$$\begin{cases} \frac{P}{k_B T} = \frac{1}{\lambda^3} f_{5/2}(z), & f_{5/2}(z) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dx x^2 \ln(1 + z e^{-x^2}) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1} z^l}{l^{5/2}} \\ \frac{1}{v} = \frac{1}{\lambda^3} f_{3/2}(z), & f_{3/2}(z) = z \frac{\partial}{\partial z} f_{5/2}(z) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dx \frac{x^2}{z^{-1} e^{x^2} + 1} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1} z^l}{l^{3/2}} \end{cases}$$

上面的展开只对**小z**比较有用。注意对费米系统z可为任意正实数，对**大z**，记 $\nu = \ln z = \mu/(k_B T)$ ，有

$$\begin{aligned} f_{3/2}(z) &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dx \frac{x^2}{e^{x^2-\nu} + 1} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dy \frac{\sqrt{y}}{e^{y-\nu} + 1} = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dy \frac{y^{3/2} e^{y-\nu}}{(e^{y-\nu} + 1)^2} = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dy \frac{e^{y-\nu}}{(e^{y-\nu} + 1)^2} \times \\ &\quad \left[\nu^{3/2} + \frac{3}{2} \nu^{1/2} (y - \nu) + \frac{3}{8} \nu^{-1/2} (y - \nu)^2 + \dots \right] = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \int_{-\nu}^\infty dt \frac{e^t}{(e^t + 1)^2} \left(\nu^{3/2} + \frac{3}{2} \nu^{1/2} t + \frac{3}{8} \nu^{-1/2} t^2 + \dots \right) \end{aligned}$$

上式第一行第三个等式我们利用了分部积分。

第二行我们把 $y^{3/2}$ 在 ν 处作了泰勒展开。由于 $\int_{-\nu}^\infty \dots = \int_{-\infty}^\infty \dots - \int_{-\infty}^{-\nu} \dots$ ，第二个积分值的量级为 $e^{-\nu}$ ，因此

$$f_{3/2}(z) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^\infty dt \frac{e^t}{(e^t + 1)^2} \left(\nu^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} \nu^{\frac{1}{2}} t + \frac{3}{8} \nu^{-\frac{1}{2}} t^2 + \dots \right) + O(e^{-\nu}) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \left(I_0 \nu^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} I_1 \nu^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{8} I_2 \nu^{-\frac{1}{2}} + \dots \right) + O(e^{-\nu})$$

这里 $I_n = \int_{-\infty}^\infty dt \frac{t^n e^t}{(e^t + 1)^2} = \int_{-\infty}^\infty dt \frac{t^n}{e^t + 2 + e^{-t}}$ ，由对称性知对奇数n此积分为零。并易知 $I_0 = 1$ ，对偶数n，

$$I_n = -2 \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \int_0^\infty dt \frac{t^{n-1}}{e^{\lambda t} + 1} \right]_{\lambda=1} = 2n \int_0^\infty du \frac{u^{n-1}}{e^u + 1} = (n-1)!(2n)(1 - 2^{1-n})\zeta(n),$$

这里 $\zeta(n)$ 是黎曼Zeta函数，一些低阶值为： $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$, $\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$, ...

因此**大z**， $f_{3/2}(z)$ 可写为如下的形式： $f_{3/2}(z) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \left[(\ln z)^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi^2}{8} (\ln z)^{-\frac{1}{2}} + \dots \right] + O(z^{-1})$

由 $\lambda^3/v = f_{3/2}(z)$ 易知 λ^3/v 是 z 的单调递增函数；对确定的 v 值，由于 $\lambda \propto T^{-\frac{1}{2}}$ ， **z 将随 T 减少而增加**。我们下面考虑两种极限情形：

1. 高温和低密度情况（此时 $\lambda^3/v \ll 1$ ，**小 z** ）。反解状态方程可得： $z = \frac{\lambda^3}{v} + \frac{1}{2^{3/2}} \left(\frac{\lambda^3}{v} \right)^2 + \dots$
只取上式第一项，并带入到另一状态方程可得：

$$\frac{Pv}{k_B T} = \frac{v}{\lambda^3} f_{5/2}(z) = \frac{v}{\lambda^3} \frac{\lambda^3}{v} - \frac{v}{\lambda^3} \frac{1}{2^{5/2}} \left(\frac{\lambda^3}{v} \right)^2 + \dots$$

上式右边形式上是维里展开。只取上式右边第一项即得理想玻尔兹曼气体的状态方程，取到第二项可得对经典理想气体的量子修正（不是来自于粒子间的相互作用）。

2. 低温和高密度情况（此时 $\lambda^3/v \gg 1$ ，**大 z** ）。这时粒子间距离 $v^{\frac{1}{3}}$ 远小于热波长 λ ，量子效应（特别是泡利不相容原理）很重要。由前页公式，我们有（保留到第一项）：

$$\frac{\lambda^3}{v} = \frac{1}{v} \left(\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T} \right)^{3/2} \approx \frac{4}{3\sqrt{\pi}} (\ln z)^{3/2}$$

由此我们可近似地得到费米能(Fermi energy，即绝对零度时的化学势)：

$$k_B T \ln z = \mu \approx \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{6\pi^2}{v} \right)^{2/3} \equiv \varepsilon_F.$$

由绝对零度附近的分布函数可得 ε_F 的物理意义： $\langle n_{\mathbf{p}} \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_{\mathbf{p}} - \varepsilon_F)} + 1}$ 。

如 $\varepsilon_{\mathbf{p}} < \varepsilon_F$ ，当 $T \rightarrow 0$ 时 $\langle n_{\mathbf{p}} \rangle = 1$ ；如 $\varepsilon_{\mathbf{p}} > \varepsilon_F$ ，则有 $\langle n_{\mathbf{p}} \rangle = 0$ 。

由于泡利不相容原理的限制，在基态时， N 个粒子将占据最低可能的能态，直到某个有限能级 ε_F 为止。在动量空间里，这些粒子将填充一个半径为 p_F 的球，其表面称为费米球 (Fermi surface)。

下面我们根据这一解释，可在更一般的情形下独立地求费米能。如每个粒子能级为 g 重简并。

确定 ε_F 的方程为：
$$g \sum_{\mathbf{p}} \langle n_{\mathbf{p}} \rangle_{T=0} = N.$$

在 ε_F 下的能量有 N 个态，令 $\varepsilon_F = p_F^2/(2m)$ ，有：
$$\frac{g}{(2\pi\hbar)^3} \frac{4\pi}{3} p_F^3 = \frac{N}{V} = \frac{1}{v} \Rightarrow \varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{6\pi^2}{gv} \right)^{2/3}.$$

由上式即可得我们前页得到的 ε_F 的表达式（ $g=1$ 时）。

低温和高密度时的热力学函数

通过 ε_F 我们可以把前面获得的状态方程改写为：

$$\varepsilon_F^{3/2} = (k_B T \ln z)^{3/2} \left[1 + \frac{\pi^2}{8} (k_B T)^2 (k_B T \ln z)^{-2} + \dots \right] = \mu^{3/2} \left[1 + \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{k_B T}{\mu} \right)^2 + \dots \right].$$

由上可得：
$$\mu = \varepsilon_F \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{k_B T}{\varepsilon_F} \right)^2 + \dots \right].$$

我们可以定义费米温度（或简并温度）： $k_B T_F = \varepsilon_F$ ，低温和高密度的意义因此为 $T \ll T_F$ ，这时气体可看作简并的，因为所有粒子都尽可能占据最低能级。

平均填布数为： $\langle n_{\mathbf{p}} \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_{\mathbf{p}} - \mu)} + 1}$ ， μ 由上面的公式确定。

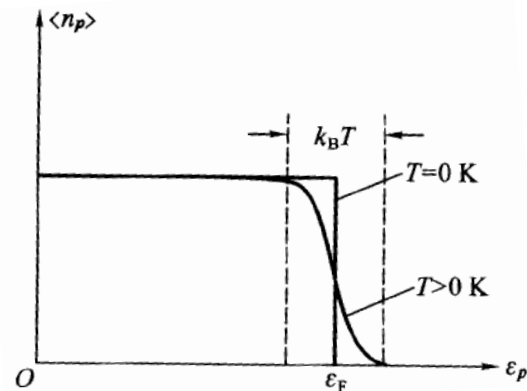
内能为：
$$U = \sum_{\mathbf{p}} \varepsilon_{\mathbf{p}} \langle n_{\mathbf{p}} \rangle = \frac{V 4\pi}{h^3 2m} \int_0^\infty dp p^4 \langle n_{\mathbf{p}} \rangle = \frac{3N}{5} \varepsilon_F \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{k_B T}{\varepsilon_F} \right)^2 + \dots \right].$$

其中第一项为费米气体的基态能。

定容比热为： $\frac{C_V}{Nk_B} \approx \frac{\pi^2}{2} \frac{k_B T}{\varepsilon_F}$ ，由激发的粒子贡献，其数目的

数量级为 $k_B T$ 。

物态方程现可写为：
$$P = \frac{2U}{3V} = \frac{2}{5} \frac{\varepsilon_F}{v} \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{k_B T}{\varepsilon_F} \right)^2 + \dots \right].$$



7.2 白矮星的统计平衡

这是费米—狄拉克统计在天体物理的第一个应用。

白矮星的特点：由质量 $M \approx 10^{33} \text{g} \approx M_{\text{sun}}$ 的氢组成的高密度的球（密度 $\rho \approx 10^7 \text{g/cm}^3 \approx 10^7 \rho_{\text{sun}}$ ），球中心温度为 $T \approx 10^7 \text{K} \approx T_{\text{sun}} \approx 1 \text{KeV}$ ，这个能量比电离氢原子所需能量大很多，因此白矮星里的氢是完全电离的。由于费米能 $\varepsilon_F \approx \hbar^2/(2mv^2/3) \approx 20 \text{MeV}$ ，费米温度 $T_F \approx 10^{11} \text{K}$ 远大于白矮星温度，我们可把白矮星看作由 **N个处于基态的相对论性电子** 组成的费米系统，电子在 **N/2个不动的氢核背景中运动**，而**氢核的引力**使得整个系统**约束**在一起。

基态相对论性电子气体的压强：

单电子的状态由动量 $\mathbf{p}$ 和自旋 $s = \pm 1/2$ 表征，而其能级与自旋无关。单电子能量为：

$$\varepsilon_{\mathbf{p},s} = \sqrt{(pc)^2 + (m_e c^2)^2},$$

由此可得费米气体的基态能：

$$E_0 = 2 \sum_{|\mathbf{p}| < p_F} \sqrt{(pc)^2 + (m_e c^2)^2} = \frac{2V}{h^3} \int_0^{p_F} dp 4\pi p^2 \sqrt{(pc)^2 + (m_e c^2)^2}.$$

对费米动量我们有： $\frac{V}{h^3} \left(\frac{4\pi}{3} p_F^3 \right) = \frac{N}{2} \Rightarrow p_F = \hbar \left(\frac{3\pi^2}{v} \right)^{1/3}$.

引入积分变数 $x = p/(m_e c)$ ，可得基态能为： $\frac{E_0}{N} = \frac{m_e^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3} v f(x_F)$,

这里 $f(x_F) = \int_0^{x_F} dx x^2 \sqrt{1+x^2} = \begin{cases} \frac{1}{3} x_F^3 \left(1 + \frac{3}{10} x_F^2 + \cdots \right) & (x_F \ll 1) \\ \frac{1}{4} x_F^4 \left(1 + \frac{1}{x_F^2} + \cdots \right) & (x_F \gg 1) \end{cases}$

$$x_F \equiv \frac{p_F}{m_e c} = \frac{\hbar}{m_e c} \left(\frac{3\pi^2}{v} \right)^{1/3}.$$

设白矮星总质量为 M ，半径为 R ，则 $M = (m_e + 2m_p)N \simeq 2m_p N$, $R = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{1/3}$.

这里 m_p 是质子的质量。因此我们有：

$$v = \frac{8\pi m_p R^3}{3 M},$$

$$x_F = \frac{\hbar}{m_e c} \frac{1}{R} \left(\frac{9\pi M}{8 m_p} \right)^{1/3} \equiv \frac{\overline{M}^{1/3}}{\overline{R}}, \text{ 这里 } \overline{M} \equiv \frac{9\pi M}{8 m_p}, \overline{R} \equiv \frac{R}{(\hbar/m_e c)}.$$

因此费米气体的压强为：

$$\begin{aligned} P_0 &= -\frac{\partial E_0}{\partial V} = \frac{m_e^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3} \left[-f(x_F) - \frac{\partial f(x_F)}{\partial x_F} v \frac{\partial x_F}{\partial v} \right] = \frac{m_e^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3} \left[\frac{1}{3} x_F^3 \sqrt{1+x_F^2} - f(x_F) \right] \\ &\approx \begin{cases} \left(\frac{m_e^4 c^5}{15\pi^2 \hbar^3} \right) x_F^5 = \frac{4}{5} K \frac{\overline{M}^{5/3}}{\overline{R}^5} & (\text{nonrel.: } x_F \ll 1) \\ \left(\frac{m_e^4 c^5}{12\pi^2 \hbar^3} \right) (x_F^4 - x_F^2) = K \left(\frac{\overline{M}^{4/3}}{\overline{R}^4} - \frac{\overline{M}^{2/3}}{\overline{R}^2} \right) & (\text{extreme rel.: } x_F \gg 1) \end{cases} \end{aligned}$$

这里 $K \equiv \frac{m_e c^2}{12\pi^2} \left(\frac{m_e c}{\hbar} \right)^3$.

白矮星的平衡条件：

如没有引力，系统将是无限稀松的均匀气体。为把星体从此状态压到有限密度的球体，外力作的功为： $-\int_{\infty}^R P_0 4\pi r^2 dr$ ，这里 P_0 是均匀气体的压强。其次，设想加入引力，引力使得星体各部分相互吸引，结果使星的能量减小，减小的能量为引力自能。以量纲分析引力自能有如下形式： $-\alpha \gamma M^2/R$ ，这里 γ 为引力常数。如 R 为平衡半径，引力自能刚好抵消把星体压缩作的功： $\int_{\infty}^R P_0 4\pi r^2 dr = -\alpha \gamma M^2/R$ ，对 R 微分即得平衡条件：

$$P_0 = \frac{\alpha}{4\pi} \frac{\gamma M^2}{R^4} = \frac{\alpha}{4\pi} \gamma \left(\frac{8m_p}{9\pi} \right)^2 \left(\frac{m_e c}{\hbar} \right)^4 \frac{\overline{M}^2}{\overline{R}^4} = K' \frac{\overline{M}^2}{\overline{R}^4}.$$

上式实际只是对参数 α 给出了一个定义，要得出 M 和 R 的关系我们需要把 P_0 的合适表达式代入。讨论以下几种情况：

1. 电子气温度 $T \gg T_F$ ：这时电子气可看作经典玻尔兹曼气体，有 $P_0 = \frac{k_B T}{v} = \frac{3k_B T}{8\pi m_p} \frac{M}{R^3}$ 。
代入前页公式后得： $R = \frac{2}{3}\alpha M \frac{m_p \gamma}{k_B T}$ ，这不适用于白矮星。

2. 电子气密度很低，非相对论动力学适用（ $x_F \ll 1$ ）。把前面公式代入得：

$$\bar{M}^{1/3} \bar{R} = \frac{4}{5} \frac{K}{K'}.$$

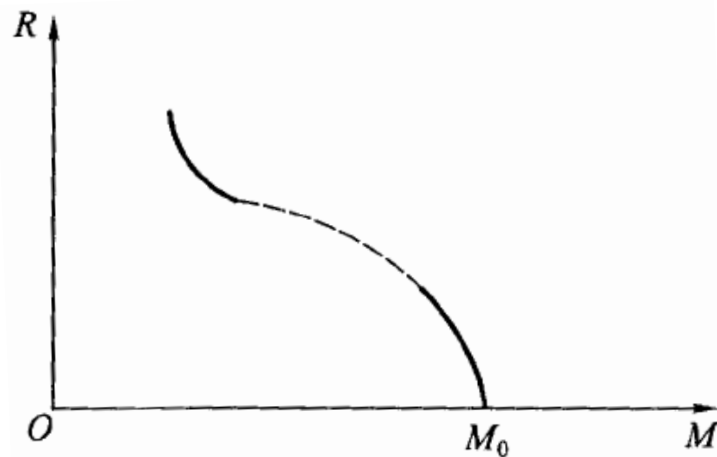
3. 电子气密度很高，相对论效应很重要（ $x_F \gg 1$ ）。把前面公式代入得：

$$K \left(\frac{\bar{M}^{4/3}}{\bar{R}^4} - \frac{\bar{M}^{2/3}}{\bar{R}^2} \right) = K' \frac{\bar{M}^2}{\bar{R}^4}$$

$$\Rightarrow \bar{R} = \bar{M}^{1/3} \sqrt{1 - (\bar{M}/\bar{M}_0)^{2/3}}, \quad \bar{M}_0 = \left(\frac{K}{K'} \right)^{3/2} = \left(\frac{27\pi}{64\alpha} \right)^{3/2} \left(\frac{\hbar c}{\gamma m_p^2} \right)^{3/2}.$$

取 $\alpha=1$ ，我们发现 $M_0 = \frac{8}{9\pi} m_p \bar{M}_0 \approx 10^{33} \text{g} \approx M_{\text{sun}}$ 。

这个情形有一个预言，即白矮星质量不能超过 M_0 ，更精确的考虑发现 $M_0 = 1.4 M_{\text{sun}}$ ，这已被天文观察证实。



7.3 朗道抗磁性

抗磁性指的是磁化率 $\chi < 0$ ，而顺磁性指的是磁化率 $\chi > 0$ 。

在外磁场中对物质磁性起作用的因素有两个：其一是电子自旋倾向于平行磁场方向排列，这产生顺磁性；其二是在磁场中电子受洛伦兹力产生圆周轨道运动，其运动轨道是量子化的，这导致抗磁性。

朗道能级：

在磁场中运动的非相对论性电子的哈密顿量为：

$$H' = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 - \mu_0 \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{H},$$

其中 $\mu_0 = \frac{e\hbar}{2mc}$ 是波尔磁子， $\boldsymbol{\sigma}$ 是泡利矩阵， $\mathbf{A}$ 是矢势。上式第一项与抗磁性有关，第二项与顺磁性有关，这里我们只考虑第一项。再设磁场为沿 z 轴的均匀磁场，则 $\mathbf{A}$ 可取为 $\mathbf{A}=(-Hy, 0, 0)$

因此哈密顿量为：

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 = \frac{1}{2m} \left\{ \left[p_x - \frac{eH}{c} y \right]^2 + p_y^2 + p_z^2 \right\}.$$

设波函数为： $\psi(x, y, z) = e^{i(k_x x + k_z z)} f(y)$ ，把以上结果代入到本征方程 $\hat{H}\psi(x, y, z) = \varepsilon\psi(x, y, z)$ 中得：

$$\left[\frac{1}{2m} p_y^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 (y - y_0)^2 \right] f(y) = \varepsilon' f(y),$$

$$\omega_0 = \frac{eH}{mc}, \quad y_0 = \frac{\hbar c}{eH} k_x, \quad \varepsilon' = \varepsilon - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}.$$

我们得到了一个振动中心在 y_0 ，固有频率为 ω_0 的谐振子，其能量本征值为：

$$\varepsilon(p_z, j) = \frac{p_z^2}{2m} + \hbar \omega_0 \left(j + \frac{1}{2} \right) \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

其中 $p_z = \hbar k_z$ ，这称为朗道能级。

朗道能级与 k_x 无关，因此能级的简并度应等于 k_x 的允许值的个数， k_x 的取值又必须保证振动中心 $y_0 = k_x \hbar c / (eH)$ 在容器内。

令系统处于一个边长为 L 的立方体内，由周期性边界条件得 k_x 的允许值为 $2\pi n_x / L$ ($n_x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)，再考虑 $y_0 \in [0, L]$ 的 k_x 的取值数(简并度)为 $g = eHL^2 / (\hbar c)$ 。由于相邻两个能级间距为 $\hbar\omega_0 = \hbar eH / (mc)$ ，故能级密度为 $g / (\hbar\omega_0) = (2\pi mL^2) / \hbar^2$ 。这~~与无磁场的自由粒子能级密度相同~~。磁场只是把准连续能谱变为了离散能谱（见右图）。

练习：请比较自由粒子能谱 $(p_x^2 + p_y^2) / 2m$ 证明上面结论。

磁化率：

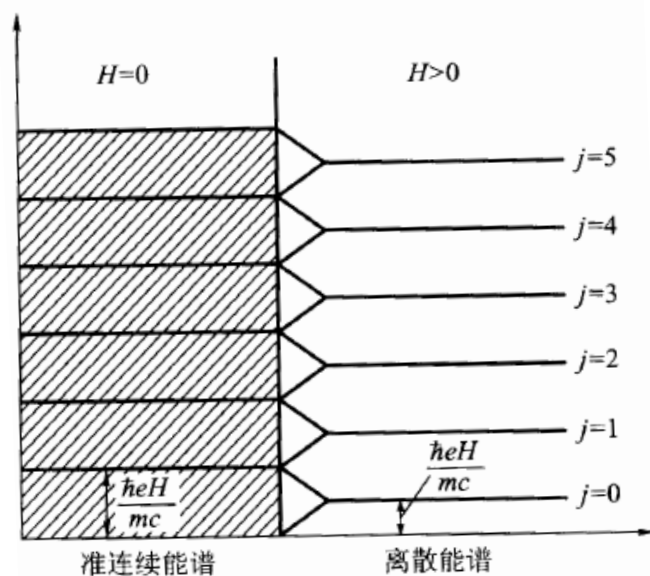
巨配分函数为： $\Xi = \prod_{\lambda} (1 + ze^{-\beta\epsilon_{\lambda}})$,

这里 λ 为量子数的集合， $\lambda = \{p_z, j, \alpha\}$, $\alpha = 1, 2, \dots, g$ ，因此

$$\ln \Xi = \sum_{\alpha=1}^g \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{p_z} \ln [1 + ze^{-\beta\epsilon(p_z, j)}] = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{L}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} dp_z g \ln [1 + ze^{-\beta\epsilon(p_z, j)}]$$

平衡时平均粒子数为：

$$\langle \hat{N} \rangle = \left(z \frac{\partial}{\partial z} \ln \Xi \right)_{V, T, H} = \frac{2gL}{h} \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dp_z \frac{1}{z^{-1} e^{\beta\epsilon(p_z, j)} + 1}.$$



高温极限：

上面 N 的表达式中，为确保 N 有限，要求 $z \rightarrow 0$ 。把 $\ln \Xi$ 按 z 的幂展开，只保留到一阶，得

$$\ln \Xi \approx \frac{2zgL}{h} \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dp_z e^{-\beta\epsilon(p_z, j)} = \frac{zgL}{\lambda} \frac{e^{-x}}{1 - e^{-2x}} \approx \frac{zgL}{\lambda} \frac{1}{2x} \left(1 - \frac{x^2}{6} \right), \quad x \equiv \frac{\hbar\omega_0}{2k_B T}.$$

由磁化强度 $M = k_B T \left[\frac{\partial}{\partial H} \left(\frac{\ln \Xi}{V} \right) \right]_{T, V, z}$ ，得磁化率为： $\chi = \frac{\partial M}{\partial H} \approx -z \frac{1}{3k_B T \lambda^3} \left(\frac{e\hbar}{2mc} \right)^2 \approx -\frac{1}{3k_B T v} \left(\frac{e\hbar}{2mc} \right)^2$ ，这为一个负值。

(大磁场)低温极限，de Haas-Van Alphen效应：

此极限下电子倾向于占据最低可能的能级。当我们减小磁场时，由于简并度 g 也随之减小，每个朗道能级只能容纳较少的电子，因此有些电子将被迫跳到更高能级，这时低温磁化率将发生振荡，这称为**de Haas-Van Alphen效应**。为研究此效应我们考虑 $k_B T \ll \hbar \omega_0$ ，我们近似设 $T=0K$ ，并忽略电子沿 z 方向的运动。

这样系统变为一个面积为 $L \times L$ 的容器中的二维电子系统。朗道能级和简并度为：

$$\varepsilon_j = \hbar \omega_0 \left(j + \frac{1}{2} \right) = 2\mu_0 H \left(j + \frac{1}{2} \right), \quad g = L^2 \left(\frac{eH}{hc} \right) = \frac{N}{n} \left(\frac{eH}{hc} \right) = \frac{NH}{H_0}. \quad \left(H_0 \equiv \frac{n\hbar c}{e} \right)$$

当磁场比 H_0 大时， $g > N$ ，这时能级简并度比全部电子数还多，所有电子都占据最低能级系统基态能为： $E_0 = N\varepsilon_0 = N\mu_0 H$ 。

当磁场比 H_0 小时， $g < N$ ，有些电子将占据更高能级。其中第 j 个以下的低能级被全占，第 $j+1$ 个能级被部分占据的条件为 $(j+1)g < N < (j+2)g$ ($j=0,1,2,\dots$)，因此有 $\frac{1}{j+2} < \frac{H}{H_0} < \frac{1}{j+1}$ 。

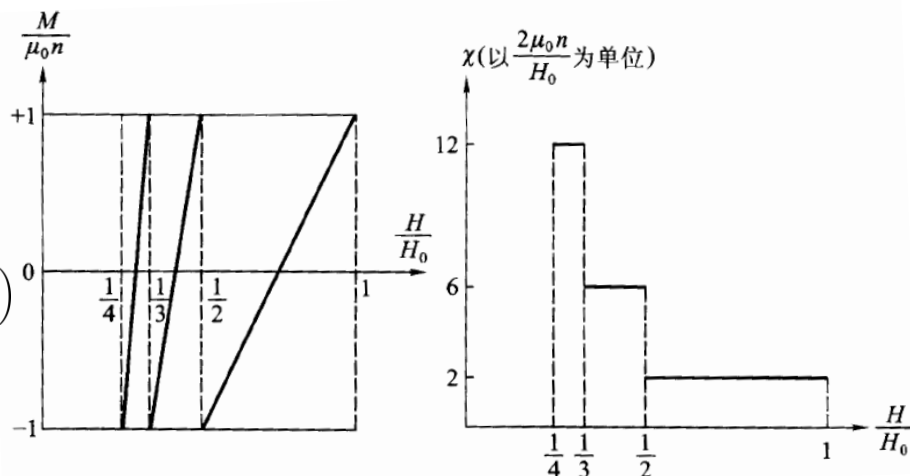
此范围内电子系统能量为：

$$E_0 = g \sum_{i=0}^j \varepsilon_i + [N - (j+1)g] \varepsilon_{j+1} = N\mu_0 H \left[(2j+3) - (j+2)(j+1) \frac{H}{H_0} \right].$$

记 $x = H/H_0$ ，单位体积的磁化强度和磁化率为：

$$M = -\frac{\partial (E_0/N)}{\partial H} = \begin{cases} -\mu_0 n & (x > 1) \\ \mu_0 n [2(j+2)(j+1)x - (2j+3)] & \left(\frac{1}{j+2} < x < \frac{1}{j+1} \right) \end{cases}$$

$$\chi = \frac{\partial M}{\partial H} = \begin{cases} 0 & (x > 1) \\ \frac{2\mu_0 n}{H_0} (j+2)(j+1) & \left(\frac{1}{j+2} < x < \frac{1}{j+1} \right) \end{cases}$$



7.4 量子霍尔效应

经典霍尔效应（右图）：

金属薄膜中的电子可在 xy 平面运动。设沿 x 方向有电流， z 方向有均匀外磁场。运动电荷受洛伦兹力作用偏转累积在薄膜边缘，形成一个沿 y 方向的电场，该电场最终与洛伦兹力平衡：

$$\mathbf{f}_L = \frac{e}{c}(\mathbf{v} \times \mathbf{H}) = e\mathbf{E}_y \Rightarrow E_y = \frac{vH}{c},$$

x 方向电流密度： $\mathbf{j}_x = ne\mathbf{v}_x = ne\mathbf{v}$.

电阻： $R_x = \rho_{xx} \frac{L}{S} = \rho_{xx} \frac{L}{L} = \rho_{xx}$.

霍尔电阻率： $\rho_{xy} \equiv \frac{V_y}{I_x} = \frac{E_y L}{j_x L} = \frac{E_y}{nev} = \frac{H}{nec}$ ，这里 V_y 是 y 方向电势差。

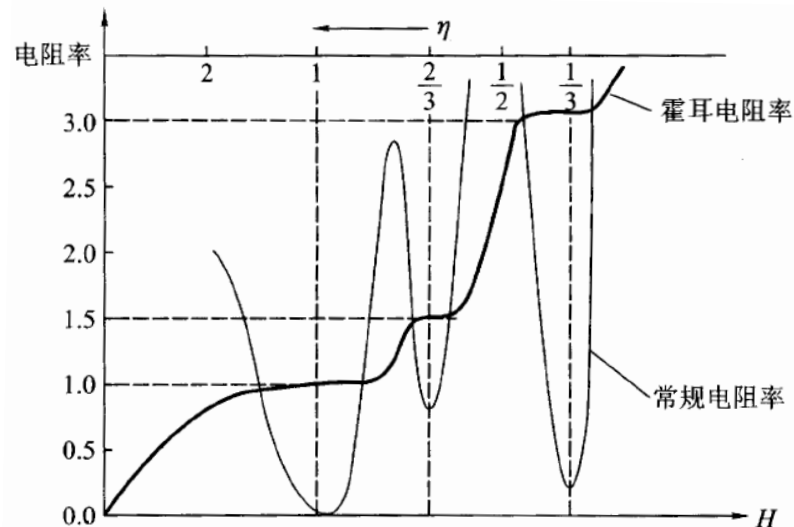
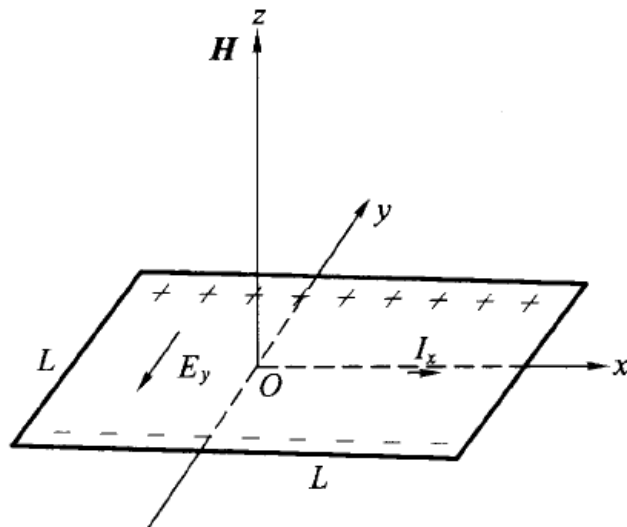
量子效应：

电子能谱和简并度同前节最后部分。引入填充比（能级被电子占据的份额）：

$$\eta \equiv \frac{N}{g} = \frac{N}{L^2} \frac{hc}{eH} = \frac{nhc}{eH},$$

则霍尔电阻率可写为： $\rho_{xy} = \frac{h}{\eta e^2}$.

实验发现在填充比为1和一些分数时 ρ_{xy} 有一个平台，值由上式决定；常规电阻率 ρ_{xx} 变得非常小。



整数量子霍尔效应的解释：

- 填充比为1时，最低朗道能级完全被电子填满，该能级相当与费米能级。由于费米能级以上有能隙，低温下电子难以跃迁到低激发态，这些电子轨道中心的运动和自由电子一样，由前可得结果，与实验结果一致。另外这些电子可以不受散射地移动（不激发），因此电阻几乎为零。

- 平台：样品中的杂质使得朗道能级变宽；杂质能级并产生局域杂质态，使朗道能带之间的态密度不为零。这样磁场变化在一定范围内时费米能级可处于朗道能带之间的连续区内，最低朗道能带一直保持完全被填满的状态。

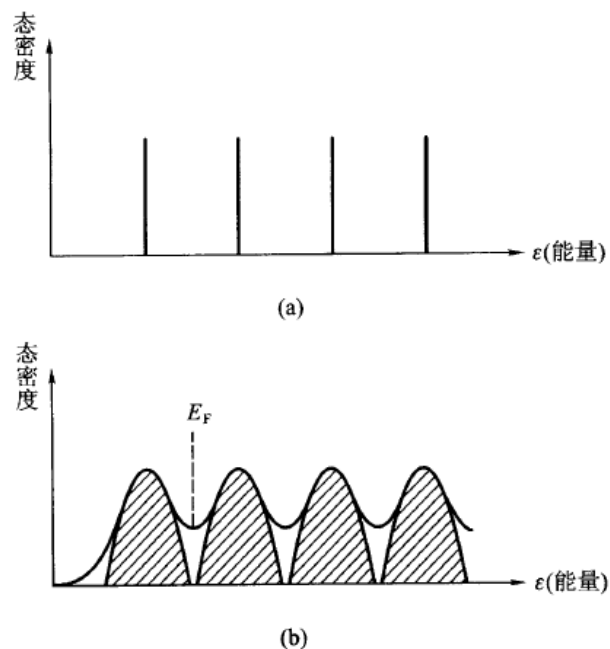


图 5.4.3 在外磁场中电子的态密度：(a)表示无杂质情况；
(b)表示有杂质时朗道能级变宽(阴影)，局域电子态位于朗道能带之间的间隙内

7.5 泡利顺磁性

在磁场中运动的非相对论性电子的哈密顿量为（只考虑顺磁性）：

$$H' = \frac{1}{2m}p^2 - \mu_0 \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{H} = \frac{p^2}{2m} - \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{H}$$

当电子的 $\boldsymbol{\mu}$ 与 $\mathbf{H}$ 平行或反平行时，电子的能量不同： $\varepsilon_{\mathbf{p},\pm 1} = \frac{p^2}{2m} \mp \mu_0 H$.

$$N \text{ 个粒子系统的能级为: } E_n = \sum_{\mathbf{p}} \sum_s \varepsilon_{\mathbf{p},s} n_{\mathbf{p},s} = \sum_{\mathbf{p}} \left[\left(\frac{p^2}{2m} - \mu_0 H \right) n_{\mathbf{p},+1} + \left(\frac{p^2}{2m} + \mu_0 H \right) n_{\mathbf{p},-1} \right],$$

$$\text{这里 } n_{\mathbf{p},s} = 0, 1; \quad \sum_{\mathbf{p}} \sum_s n_{\mathbf{p},s} = N.$$

$$\text{记 } n_{\mathbf{p},+1} \equiv n_{\mathbf{p}}^+, \quad n_{\mathbf{p},-1} \equiv n_{\mathbf{p}}^-, \quad \sum_{\mathbf{p}} n_{\mathbf{p},+1} \equiv N_+, \quad \sum_{\mathbf{p}} n_{\mathbf{p},-1} \equiv N_- = N - N_+.$$

$$\text{则 } E_n = \sum_{\mathbf{p}} (n_{\mathbf{p}}^+ + n_{\mathbf{p}}^-) \frac{p^2}{2m} - \mu_0 H (N_+ - N_-).$$

而（正则系综）配分函数可写为：

$$\begin{aligned} Z_N &= \sum_{\{n_{\mathbf{p}}^+\}, \{n_{\mathbf{p}}^-\}} \exp \left[-\beta \sum_{\mathbf{p}} (n_{\mathbf{p}}^+ + n_{\mathbf{p}}^-) \frac{p^2}{2m} + \beta \mu_0 H (N_+ - N_-) \right] \\ &= \sum_{N_+=0}^N e^{\beta \mu_0 H (2N_+ - N)} \sum_{\{n_{\mathbf{p}}^+\}}'' e^{-\beta \sum_{\mathbf{p}} \frac{p^2}{2m} n_{\mathbf{p}}^+} \sum_{\{n_{\mathbf{p}}^-\}}''' e^{-\beta \sum_{\mathbf{p}} \frac{p^2}{2m} n_{\mathbf{p}}^-} \end{aligned}$$

这里对 $n_{\mathbf{p}}^+$ 和 $n_{\mathbf{p}}^-$ 的求和要满足前面的限制条件。

如果假想粒子没有自旋，那么配分函数会有比较简单的形式：

$$Z_N^{(0)} = \sum_{(\sum n_{\mathbf{p}}=N)} e^{-\beta \sum_{\mathbf{p}} \frac{p^2}{2m} n_{\mathbf{p}}} \equiv e^{-\beta F(N)}$$

这里 $F(N)$ 是假想粒子系的自由能。由此可以把 Z_N 写为： $Z_N = e^{-\beta \mu_0 H N} \sum_{N_+=0}^N e^{2\beta \mu_0 H N_+} Z_{N_+}^{(0)} Z_{(N-N_+)}^{(0)}$
于是， $\frac{1}{N} \ln Z_N = -\beta \mu_0 H + \frac{1}{N} \ln \sum_{N_+=0}^N e^{2\beta \mu_0 H N_+ - \beta F(N_+) - \beta F(N-N_+)}$

上面的 $N+1$ 项求和等于其中最大项的对数加上一个 $\ln N$ 量级的项，因此忽略掉 $\ln N/N$ 量级的项，我们有： $\frac{1}{N} \ln Z_N = \beta f(\bar{N}_+) + O\left(\frac{1}{N} \ln N\right)$ ，

这里 $f(\bar{N}_+) = \max[f(N_+)]$, $f(N_+) = \mu_0 H \left(\frac{2N_+}{N} - 1\right) - \frac{1}{N} [F(N_+) + F(N - N_+)]$
 $\bar{N}_+$ 可以认为是自旋向上的粒子数的平均值，若 $\bar{N}_+$ 已知，我们就可由下式获得单位体积内的磁化强度： $M = \frac{\mu_0(2\bar{N}_+ - N)}{V}$

现在来求 $\bar{N}_+$ 。为此在上面的 $f(N_+)$ 定义式中对 N_+ 求极值。利用化学势 $\mu = \frac{\partial F(N)}{\partial N}$ ，我们有

$$\mu^{(0)}(\bar{N}_+) - \mu^{(0)}(N - \bar{N}_+) = 2\mu_0 H$$

这里 $\mu^{(0)}$ 是假想的无自旋粒子系统的化学势。这可以理解为在磁场里，自旋向上的粒子（与外场同向）数需要使得其化学势比自旋向下的粒子（与外场反向）的化学势大 $2\mu_0 H$ （平衡条件）。

引入无量纲数 $r \equiv \frac{2\bar{N}_+}{N} - 1$ ，磁化强度可写为： $M = \mu(\bar{N}_+ - \bar{N}_-) = \mu(2\bar{N}_+ - N) = \mu N r$ ，

于是我们有 $\mu^{(0)}\left(\frac{1+r}{2}N\right) - \mu^{(0)}\left(\frac{1-r}{2}N\right) = 2\mu_0 H$

注意到 $H=0$ 时，必有 $r=0$ ，当 H 很小时， r 也很小。因此可以把上式在 $r=0$ 附近做展开。

保留到第一项，我们有
$$r \simeq \frac{2\mu_0 H}{\left(\frac{\partial \mu^{(0)}(xN)}{\partial x}\right)_{x=0.5}}$$

因此对**弱场**，单位体积的磁化率为：
$$\chi = \frac{1}{V} \frac{\partial M}{\partial H} = \frac{1}{V} \frac{\partial (\mu_0 N r)}{\partial H} = \frac{2\mu_0^2 n}{\left(\frac{\partial \mu^{(0)}(xN)}{\partial x}\right)_{x=0.5}}$$

1) 低温极限

由本章第一节得到的公式对当前系统我们有：
$$\mu^{(0)}(xN) = \left(\frac{3xN}{4\pi V}\right)^{2/3} \frac{h^2}{2m}.$$

另一方面，实际系统的费米能为（**g=2**）：
$$\varepsilon_F = \left(\frac{3N}{8\pi V}\right)^{2/3} \frac{h^2}{2m}.$$

由此可得单位体积磁化率为：

$$\chi_0 \approx \frac{3n\mu_0^2}{2\varepsilon_F v}$$

有限温度时有
$$\chi \approx \chi_0 \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{k_B T}{\varepsilon_F}\right)^2\right]$$

(2) 高温极限（第一节的小z情形）：

类似本章第一节得到的公式对当前系统我们有：
$$\ln z = \frac{\mu}{k_B T} \approx \ln f_{3/2}(z) = \ln \left(\frac{\lambda^3}{v}\right).$$

易知
$$\mu^{(0)}(xN) = k_B T \ln \left(\frac{xN\lambda^3}{V}\right)$$

因此
$$\chi_\infty = \frac{n\mu_0^2}{k_B T}$$

温度有限时由
$$\ln z \simeq \ln \left[\frac{\lambda^3}{v} + \frac{1}{2^{3/2}} \left(\frac{\lambda^3}{v}\right)^2 \right], \quad f_{3/2}(z) \approx z - \frac{z^2}{2^{3/2}},$$

可得
$$\chi \simeq \chi_\infty \left(1 - \frac{n\lambda^3}{2^{5/2}}\right).$$

7.6 正常费米液体理论 (一)

这里我们讨论的是原子热运动的德布罗意波长与液体中原子间距离可相比的情形，这时液体的宏观性质由量子效应决定。虽然自然界中只有液 He^3 才是量子费米液体，但这里的理论也可用于有相互作用的简并费米系统。

对有相互作用的粒子系来说，最困难的是确定宏观物体(系统)的能级，因此时单粒子能级已失去意义。但在足够低温度下，我们只需考虑基态附近的弱激发(元激发)。

- 理论的基本出发点：宏观物体的弱激发态是一类有确定的能量 $\epsilon(\mathbf{p})$ 和动量 $\mathbf{p}$ 的元激发或准粒子的集合。朗道假定原子间的相互作用是渐进地(绝热地)加入到系统中，此时系统的能级类型不发生改变。因此从理想费米气体加入相互作用过渡到液体时，改变的只是气体粒子被元激发所取代，元激发遵守费米统计，且其数目等于原来原子的数目。

- 费米型准粒子：每个准粒子有确定的动量 $\mathbf{p}$ 。设 $n(\mathbf{p})$ 是其动量分布函数，我们有归一化条件 $\frac{N}{V} = \int n(\mathbf{p}) \frac{d^3p}{h^3}$ ，但液体的总能量 E 并不等于各准粒子能量之和， E 是 $n(\mathbf{p})$ 的泛函：

$$\delta \left(\frac{E}{V} \right) = \int \epsilon(\mathbf{p}) \delta n(\mathbf{p}) \frac{d^3p}{h^3}, \text{ or } \epsilon(\mathbf{p}) = \frac{\partial (\delta \frac{E}{V})}{\partial (\delta n(\mathbf{p}))}$$

元激发可近似看作一个在其它原子的自洽场中运动的原子(但这里不仅势能会变，动能对动量的依赖关系也会变)。

- 准粒子的自旋：准粒子的能量也是其自旋算符 $\hat{s}$ 的函数。在均匀的各向同性液体里，最低阶形式为 $\hat{s}^2$ 或 $(\hat{s} \cdot \mathbf{p})^2$ (因为 $(\hat{s} \cdot \mathbf{p})$ 为赝标量不可能)，准粒子能量和自旋算符无关，且准粒子的能级都是二重简并的(对任何不为 $1/2$ 的自旋， $\epsilon(\mathbf{p})$ 有 $(2s+1)/2$ 个分支，每个对应于自旋为 $1/2$ 的准粒子)。这时分布函数算符可写为： $\hat{n}(\mathbf{p}) \rightarrow \begin{bmatrix} n_{\alpha\alpha}(\mathbf{p}) & n_{\alpha\beta}(\mathbf{p}) \\ n_{\beta\alpha}(\mathbf{p}) & n_{\beta\beta}(\mathbf{p}) \end{bmatrix}$ 。其中 $\alpha=1/2, \beta=-1/2$ 。总粒子数为：

$$\frac{N}{V} = \text{Tr} \int \hat{n} \frac{d^3p}{h^3} = \int (n_{\alpha\alpha} + n_{\beta\beta}) \frac{d^3p}{h^3}$$

准粒子的能量也是算符，由下式定义： $\delta \left(\frac{E}{V} \right) = \text{Tr} \int \hat{\epsilon}(\mathbf{p}) \delta \hat{n}(\mathbf{p}) \frac{d^3p}{h^3} \equiv \int \sum_{\alpha, \beta} \epsilon_{\alpha\beta} (\delta n)_{\beta\alpha} \frac{d^3p}{h^3}$

- 统计平衡时准粒子的分布函数：因准粒子态和理想气体态的描写方式相同，费米液体的熵可由类似公式来表达：
$$S/V = -k_B \text{Tr} \int \{ \hat{n} \ln \hat{n} + (1 - \hat{n}) \ln(1 - \hat{n}) \} \frac{d^3 p}{h^3}$$

由粒子数和能量守恒的限制条件（ $\delta(N/V)=0$, $\delta(E/V)=0$ ）下求条件极值得：

$$\hat{n} = \frac{1}{e^{(\hat{\epsilon}-\mu)/k_B T} + 1}$$

这里 μ 是化学势。虽然表达式与理想气体的相同，注意这里 ϵ 本身就是 n 的泛函。当 $T=0K$ 时，化学势等于费米球表面的能量（费米能），即

$$\mu(T=0K) = \epsilon_F \equiv \epsilon(p_F)$$

- 朗道假设准粒子有确定动量，即动量不确定性跟动量相比很小，也跟分布的跃迁区（在费米面附近）的宽度 Δp 相比也很小。只有在跃迁区内的准粒子能互相散射使得能量发生变化，于是跃迁区两个准粒子发生散射的概率正比于 $(\Delta p)^2$ ，因此理论适用的条件为 $(\Delta E)\tau \sim (k_B T)/(k_B T)^2 \gg \hbar$ ，这在极低温时是成立的。

- 准粒子的有效质量：
$$n(\mathbf{p}) = \theta(p_F - p) = \begin{cases} 1, & p < p_F; \\ 0, & p > p_F. \end{cases}$$

(a)在 $T=0K$ 时有：

在接近 $0K$ 时，用上面的阶跃函数的分布函数算出的 ϵ 值代替泛函 ϵ ，这样 ϵ 就变成动量 p 的一个确定函数，粒子数分布函数就变为通常的费米—狄拉克分布。

在费米面附近 $\epsilon(\mathbf{p})$ 可按 $(p - p_F)$ 的幂展开，取一级项得：

$$\epsilon - \epsilon_F \approx v_F(p - p_F)$$

这里 $v_F = \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial p} \right)_{p_F}$ 是费米面上准粒子的速度。对理想费米气体有 $\epsilon = \frac{p^2}{2m}$ ，因此 $v_F = \frac{p_F}{m}$

类似对费米液体我们可以定义有效质量，使得： $m^* = \frac{p_F}{v_F}$

这样参照理想费米气体，只要把原公式中的 m 换成有效质量，我们就可写下费米液体的熵和比热在 $0K$ 的公式。

(b) 在OK附近时分布函数偏离阶跃函数一个小量 δn ，能量的变化可写为：

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \varepsilon^0(\mathbf{p}) + \int f(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \delta n(\mathbf{p}') \frac{d^3 p'}{h^3} = \varepsilon^0(\mathbf{p}) + \int f(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \delta n(\mathbf{p}') d\tau'$$

第一项为阶跃函数得出的准粒子能量，第二项中的 $f(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ 是准粒子相互作用函数。为看出其意义，我们把体系总能量按 δn 在 $\varepsilon^0(\mathbf{p})\delta n(\mathbf{p})$ 附近展开到二阶：

$$\delta E/V = \int \varepsilon^0(\mathbf{p}) \delta n(\mathbf{p}) d\tau + \frac{1}{2} \iint f(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \delta n(\mathbf{p}) \delta n(\mathbf{p}') d\tau d\tau'$$

其一阶变分导数就是上面的式子。由此还易知 $f(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ 是 $\mathbf{p}, \mathbf{p}'$ 的对称函数。

现在我们讨论有效质量和准粒子相互作用函数的关系，为简单记我们假设分布函数和能量都和自旋无关。

考虑液体单位体积的动量，它应等于单位体积内准粒子动量之和，即 $\int \mathbf{p} n(\mathbf{p}) d\tau$ 。

另一方面，它也等于液体的质量通量（质量迁移密度）= 实际粒子质量 m X 实际粒子通量。

由于液体中准粒子数等于实际粒子数，实际粒子通量等于准粒子通量，即

$$\int \mathbf{v} n(\mathbf{p}) d\tau = \int \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} n(\mathbf{p}) d\tau,$$

其中 $\mathbf{v} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}}$ 是准粒子速度。因此 $\int \mathbf{p} n(\mathbf{p}) d\tau = m \int \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} n(\mathbf{p}) d\tau$

于是有 $\int \mathbf{p} \delta n(\mathbf{p}) d\tau = m \int \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} \delta n(\mathbf{p}) d\tau + m \iint \frac{\partial f(\mathbf{p}, \mathbf{p}')}{\partial \mathbf{p}} n(\mathbf{p}) \delta n(\mathbf{p}') d\tau d\tau'$

上面右边第二式作分部积分，并互换 $\mathbf{p}, \mathbf{p}'$ 可得

$$-m \iint f(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \frac{\partial n(\mathbf{p}')}{\partial \mathbf{p}'} \delta n(\mathbf{p}) d\tau d\tau'$$

代回到原来式子，由近似 $\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} \approx \frac{p_F}{m^*} \frac{\mathbf{p}}{p}$ ，再由 δn 的任意性可得 $\frac{\mathbf{p}}{m} = \frac{p_F}{m^*} \frac{\mathbf{p}}{p} - \int f(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \frac{\partial n(\mathbf{p}')}{\partial \mathbf{p}'} d\tau'$ 。

由于在费米面附近，有 $\frac{\partial n(\mathbf{p}')}{\partial \mathbf{p}'} \approx \frac{\partial \theta(p_F - p')}{\partial \mathbf{p}'} = -\frac{\mathbf{p}'}{p'} \delta(p' - p_F)$,

我们有 $\frac{\mathbf{p}}{m} = \frac{p_F}{m^*} \frac{\mathbf{p}}{p} + \int f(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \frac{\mathbf{p}'}{p'} \delta(p' - p_F) d\tau'.$

两边点乘 $\mathbf{p}$ ，并令 $p = p_F$ ，这时 f 只与 $\mathbf{p}, \mathbf{p}'$ 的夹角 θ 有关。化简后得（自旋简并贡献了因子2）

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{m^*} + \frac{8\pi p_F}{h^3} \overline{f(\theta) \cos \theta},$$

其中 $\overline{f(\theta) \cos \theta} \equiv \frac{1}{4\pi} \int f(\theta) \cos \theta d\Omega$ ($d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$).

7.7 正常费米液体理论（二）零声

下面我们研究费米液体的非平衡态。输运方程如下：

$$I(n) = \frac{dn}{dt} = \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \frac{\partial n}{\partial \mathbf{p}} \cdot \dot{\mathbf{p}}.$$

其中 $I(n)$ 为碰撞积分，即由于碰撞引起的粒子数变化。对近平衡分布，分布函数可写为：

$$n(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = n_0(\mathbf{p}) + \delta n(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$$

这里 $n_0(\mathbf{p})$ 是平衡分布。对准粒子能量类似有 $\varepsilon = \varepsilon_0 + \delta\varepsilon$, ε_0 为平衡态能量，于是

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial(\delta\varepsilon)}{\partial \mathbf{r}} = 2 \int f(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \frac{\partial(\delta n(\mathbf{p}', \mathbf{r}, t))}{\partial \mathbf{r}} d\tau'$$

2来自于对自旋求迹。准粒子能量起着哈密顿量的作用。由经典哈密顿方程得（精确到一级）：

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} &= \frac{\partial(n_0 + \delta n)}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\partial(\delta n)}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \mathbf{p}}, \\ \frac{\partial n}{\partial \mathbf{p}} \cdot \dot{\mathbf{p}} &= \frac{\partial(n_0 + \delta n)}{\partial \mathbf{p}} \cdot \left(-\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{r}}\right) = -\frac{\partial n_0}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial(\delta\varepsilon)}{\partial \mathbf{r}} \end{aligned}$$

于是输运方程变为：
$$I(n) = \frac{\partial(\delta n)}{\partial t} + \frac{\partial(\delta n)}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial n_0}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial(\delta\varepsilon)}{\partial \mathbf{r}}.$$

这里已经假定准粒子的运动是经典的，这要求费米面附近的德布罗意波长远小于粒子数分布发生显著变化的线性长度 L （空间条件），即 $\hbar/p_F \ll L = 1/k \implies \hbar k \ll p_F$

由于 $\frac{N}{V} = 2 \int_0^{p_F} n_{(T=0)} p^2 dp d\Omega = \frac{1}{3\pi^2} \frac{p_F^3}{\hbar^3}$ ，这等同于要求 $L \gg (V/N)^{1/3}$.

另一个需要满足的条件（时间）是 $\hbar\omega \ll \varepsilon_F$ ，这里 ω 是分布函数变化的频率，即扰动要足够慢。这保证了准粒子能量的不确定性（由于碰撞）小于 $\hbar\omega$ 。

现在用上面的输运方程研究费米液体里的振动问题。设准粒子的平均自由时间为 τ ，当 $\omega\tau \ll 1$ 时，**碰撞很频繁**，这可能导致液体里的小体积元中出现热力学平衡，波的传播可近似看作准静态过程，由此可由热力学理论求出声速。这是通常在液体里传播的声波（第一声）。

当 $\omega\tau \gg 1$ 时，必须用动力学方程，这时粒子间的**碰撞变得不重要**。这种过程可认为出现在零温下，这些波称为零声。我们现在来研究零声。这时可略去碰撞积分项 $I(n)$ 。于是有

$$\frac{\partial(\delta n)}{\partial t} + \frac{\partial(\delta n)}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{v} - \frac{\partial n_0}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial(\delta \varepsilon)}{\partial \mathbf{r}} = 0.$$

$T=0K$ 时有： $\frac{\partial n_0}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} = -\mathbf{v} \delta(\varepsilon - \varepsilon_F) = -\mathbf{e} \delta(p - p_F)$ ，其中 $\mathbf{e}$ 是 $\mathbf{p}$ 方向的单位矢量。设 $\delta(n)$ 的形式为：

$$\delta n = \delta(\varepsilon - \varepsilon_F) \nu(\mathbf{e}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

代入到输运方程中并化简得 $(\omega - v_F \mathbf{e} \cdot \mathbf{k}) \nu(\mathbf{e}) = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{k}) \frac{2p_F^2}{h^3} \int f(\theta'') \nu(\mathbf{e}') d\Omega'.$

波的传播速度为 $u_0 = \omega/k$ 。引入 $S = u_0/v_F$ ，取 $\mathbf{k}$ 为极轴， $\mathbf{e}$ 方向为 (θ, ϕ) ， $\mathbf{e}'$ 方向为 (θ', ϕ') ，可得

$$(S - \cos \theta) \nu(\theta, \phi) = \cos \theta \int F(\theta'') \nu(\theta', \phi') \frac{d\Omega'}{4\pi}$$

这里 $F(\theta'') \equiv \frac{m^* p_F}{\pi^2 \hbar^3} f(\theta'')$ ， θ'' 为 $\mathbf{p}, \mathbf{p}'$ 间夹角。由此可确定波的传播速度和 $\nu(\mathbf{e})$ ，后者表征费米面畸变与角度的关系（例子可见杨展如书182—183页）。

7.8 具有排斥势的简并近理想费米气体

与波色气体相似，这里“近理想”指 $a \ll \lambda, a \ll l, \lambda \approx l \ll L$, 其中 L 为容器线度， a 为散射长度， λ 为粒子的德布罗意波长，对费米系统

$$\lambda \sim \frac{\hbar}{p_F} \sim n^{-1/3}.$$

这些条件要求气体有足够低的密度，相互作用的有效力程远小于粒子间平均距离。

• 哈密顿量的简化

我们考虑 N 个自旋为 $1/2$ 的全同费米子组成的系统，粒子间相互作用为排斥势，且与自旋无关。

哈密顿量为：

$$\hat{H} = \sum_i^N \frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} u(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = \hat{H}_0 + \hat{H}_i$$

在二次量子化的动量表象里，我们有：

$$\hat{H}_0 = \sum_{\mathbf{p}, \sigma} \frac{p^2}{2m} \hat{a}_{\mathbf{p}, \sigma}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}, \sigma}$$

$$\hat{H}_i = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\mathbf{p}_1, \sigma_1, \mathbf{p}_2, \sigma_2 \\ \mathbf{p}'_1, \sigma'_1, \mathbf{p}'_2, \sigma'_2}} \langle \mathbf{p}'_1, \sigma'_1, \mathbf{p}'_2, \sigma'_2 | u(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) | \mathbf{p}_1, \sigma_1, \mathbf{p}_2, \sigma_2 \rangle \hat{a}_{\mathbf{p}'_1, \sigma'_1}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}'_2, \sigma'_2}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}_2, \sigma_2} \hat{a}_{\mathbf{p}_1, \sigma_1}$$

这里求和必须保持动量守恒，易知 $\langle \mathbf{p}'_1, \sigma'_1, \mathbf{p}'_2, \sigma'_2 | u(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) | \mathbf{p}_1, \sigma_1, \mathbf{p}_2, \sigma_2 \rangle = \frac{1}{V} \int e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} u(r) d^3 r$
 $\mathbf{p}$ 为动量转移： $\mathbf{p} \equiv \mathbf{p}'_2 - \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_1$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$.

算符 $\hat{a}_{\mathbf{p}, \sigma}^+, \hat{a}_{\mathbf{p}, \sigma}$ 是动量为 $\mathbf{p}$ ，自旋为 σ 的单粒子态的产生和湮灭算符，满足反对易关系。单粒子态为： $\varphi_{\mathbf{p}, \sigma}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} \eta_\sigma$ ，这里 $\eta_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

在低能近似下，散射矩阵元可近似写为： $\langle \mathbf{p}'_1, \sigma'_1, \mathbf{p}'_2, \sigma'_2 | u | \mathbf{p}_1, \sigma_1, \mathbf{p}_2, \sigma_2 \rangle \rightarrow \langle 0, \sigma'_1, 0, \sigma'_2 | u | 0, \sigma_1, 0, \sigma_2 \rangle$

由于反对易性（这样 $\sigma_1 = \sigma_2$ 或 $\sigma'_1 = \sigma'_2$ 的项贡献相消）和势能与自旋无关（假设），求和只剩下贡献相同的两项：

$$(\sigma'_1, \sigma'_2; \sigma_1, \sigma_2) = \begin{cases} (+1, -1; +1, -1) = (\uparrow\downarrow; \uparrow\downarrow) \\ (-1, +1; -1, +1) = (\downarrow\uparrow; \downarrow\uparrow) \end{cases}$$

因此 $\hat{H}_i = \frac{u_0}{V} \sum_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2} \hat{a}_{\mathbf{p}'_1, \uparrow}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}'_2, \downarrow}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}_2, \downarrow} \hat{a}_{\mathbf{p}_1, \uparrow}$, 这里 $\frac{u_0}{V} = \frac{1}{V} \int u(r) d^3r$, 在低能散射和小动量转移时,

我们有散射长度 $a = \frac{m}{4\pi\hbar^2} \int u(r) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} d^3r \approx \frac{m}{4\pi\hbar^2} \int u(r) d^3r = \frac{mu_0}{4\pi\hbar^2}$.

• 能量二级修正

(1) 对近理想气体, 散射长度 a 是小量。我们将把能量展开到 a 的二次项, 为此, 我们还必须考虑二级波恩近似 (u_0 也精确到 a 的二次项)。设 $\mathbf{V}$ 为 (恒定) 微扰, 由量子力学, 一阶近似下跃迁几率决定于 $\hat{V}_{00}$ 。在二阶近似下, 则应把 $\hat{V}_{00}$ 换为:

$$\hat{V}_{00} + \sum_n' \frac{\hat{V}_{0n} \hat{V}_{n0}}{E_0^{(0)} - E_n^{(0)}}.$$

对我们考虑的问题, 有:

$$u_0 + \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2} \frac{|\int u(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} d^3r|^2}{\frac{1}{2m} (p_1^2 + p_2^2 - p_1'^2 - p_2'^2)} \approx u_0 + \frac{2u_0^2}{V} \sum_{\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2} \frac{2m}{p_1^2 + p_2^2 - p_1'^2 - p_2'^2} \delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2, \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2)$$

利用上面 a 和 u_0 的关系式可得

$$a = \frac{mu_0}{4\pi\hbar^2} \left[1 + \frac{2u_0}{V} \sum \frac{2m}{p_1^2 + p_2^2 - p_1'^2 - p_2'^2} \delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2, \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2) \right]$$

解此方程, 得

$$u_0 = \frac{4\pi a \hbar^2}{m} \left[1 - \frac{8\pi a \hbar^2}{mV} \sum \frac{\delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2, \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2)}{\frac{1}{2m} (p_1^2 + p_2^2 - p_1'^2 - p_2'^2)} \right]$$

(2) 设 $\hat{H}_0$ 本征矢为 $|n\rangle = |n_{\mathbf{p}_1, \sigma_1}, n_{\mathbf{p}_2, \sigma_2}, \dots\rangle$, 这里 $n_{\mathbf{p}\sigma}$ 是单粒子态 $(\mathbf{p}, \sigma)$ 上的占据数。

则相应本征值为:

零阶:

$$E_n^{(0)} = \sum_{\mathbf{p}, \sigma} \frac{p^2}{2m} n_{\mathbf{p}, \sigma}$$

一阶微扰：由反对易关系有

$$E_n^{(1)} = \langle n | \hat{H}_i | n \rangle = \frac{u_0}{V} \sum_{\substack{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2}} \langle n | \hat{a}_{\mathbf{p}'_1 \uparrow}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}'_2 \downarrow}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}_2 \downarrow} \hat{a}_{\mathbf{p}_1 \uparrow} | n \rangle = \frac{u_0}{V} \sum_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2} n_{\mathbf{p}_1 \uparrow} n_{\mathbf{p}_2 \downarrow}$$

二阶微扰：

$$E_n^{(2)} = \sum_{m \neq n} \frac{|\langle m | \hat{H}_i | n \rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} = 2 \frac{u_0^2}{V^2} \sum_{\substack{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2}} \frac{n_{\mathbf{p}_1 \uparrow} n_{\mathbf{p}_2 \downarrow} (1 - n_{\mathbf{p}'_1 \uparrow}) (1 - n_{\mathbf{p}'_2 \downarrow})}{\frac{1}{2m} (p_1^2 + p_2^2 - p_1'^2 - p_2'^2)} \delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2, \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2)$$

其中因子2来自于自旋简并，上式的计算作为练习。把 u_0 的表达式代入，并保留到 a 的二次项，可得

$$E_n = E_n^{(0)} + E_n^{(1)} + E_n^{(2)} = \sum_{\mathbf{p}, \sigma} \frac{p^2}{2m} n_{\mathbf{p}, \sigma} + \frac{4\pi a \hbar^2}{mV} \sum_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2} n_{\mathbf{p}_1 \uparrow} n_{\mathbf{p}_2 \downarrow} - 4m \left(\frac{4\pi a \hbar^2}{mV} \right)^2 \sum_{\substack{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2}} \frac{n_{\mathbf{p}_1 \uparrow} n_{\mathbf{p}_2 \downarrow} (n_{\mathbf{p}'_1 \uparrow} + n_{\mathbf{p}'_2 \downarrow})}{p_1^2 + p_2^2 - p_1'^2 - p_2'^2} \delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2, \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2)$$

这里四个 n 相乘的项为零，因为分子和分母对 $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ 和 $(\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2)$ 的同时交换分别为对称和反对称的，故求和后为零。

• 基态能

利用理想气体的分布函数： $n_{\mathbf{p}\sigma}^0(T=0\text{K}) = \begin{cases} 1, & p < p_F; \\ 0, & p > p_F. \end{cases}$

把上面能量的表达式对 $n=0$ 求和可得基态能：

$$E_0 = \frac{3(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2}{10m} \left(\frac{N}{V} \right)^{2/3} N + \frac{\pi a \hbar^2}{m} \frac{N}{V} N \left[1 + \frac{6}{35} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/3} a \left(\frac{N}{V} \right)^{1/3} (11 - 2 \ln 2) \right].$$

•从准粒子能谱 $\varepsilon(p)$ 计算相互作用函数 $f_{\alpha\alpha'}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$:

由前节定义，能量的改变量可写为：

$$\delta E = \sum_{\mathbf{p}, \alpha} \varepsilon_{\alpha}(\mathbf{p}) \delta n_{\mathbf{p}, \alpha} + \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{p}_1, \alpha, \mathbf{p}_2, \alpha'} f_{\alpha\alpha'}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \delta n_{\mathbf{p}_1, \alpha} \delta n_{\mathbf{p}_2, \alpha'}$$

由前页的能量表达式对 $n_{\mathbf{p}_1, \alpha}$ 和 $n_{\mathbf{p}_2, \alpha'}$ 求二阶泛函导数即得 $f_{\alpha\alpha'}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$. E_n 最后求和中的第一项可改写为：

$$\begin{aligned} & \sum_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2} \frac{n_{\mathbf{p}_1 \uparrow} n_{\mathbf{p}_2 \downarrow} n_{\mathbf{p}'_1 \uparrow}}{p_1^2 + p_2^2 - p_1'^2 - p_2'^2} \delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}'_2) = \\ & \sum_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2} \frac{1}{2} \frac{n_{\mathbf{p}_1 \uparrow} n_{\mathbf{p}_2 \downarrow} n_{\mathbf{p}'_1 \uparrow}}{p_1^2 + p_2^2 - p_1'^2 - p_2'^2} \delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}'_2) + \sum_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2} \frac{1}{2} \frac{n_{\mathbf{p}'_1 \uparrow} n_{\mathbf{p}_2 \downarrow} n_{\mathbf{p}_1 \uparrow}}{p_1'^2 + p_2^2 - p_1^2 - p_2'^2} \delta(\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_2) \end{aligned}$$

再对 $n_{\mathbf{p}_1 \uparrow}$ 和 $n_{\mathbf{p}_2 \downarrow}$ 求泛函，并设 $n_{\mathbf{p}\alpha} \approx 1$ （费米面附近），可得

$$\sum_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2} \frac{1}{2} \left[\frac{\delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}'_2)}{p_1^2 + p_2^2 - p_1'^2 - p_2'^2} + \frac{\delta(\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_2)}{p_1'^2 + p_2^2 - p_1^2 - p_2'^2} \right]$$

类似可得最后求和的第二项，设 $|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2| = |\mathbf{p}_F|$ ，即可得 $f_{\uparrow\downarrow}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ ：

$$f_{\uparrow\downarrow}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \frac{4\pi a \hbar^2}{m} - \frac{4m}{V} \left(\frac{4\pi a \hbar^2}{m} \right)^2 \sum_{\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2} \left[\frac{\delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}'_2)}{p_1^2 + p_2^2 - p_1'^2 - p_2'^2} + \frac{1}{2} \frac{\delta(\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_2)}{p_1'^2 + p_2^2 - p_1^2 - p_2'^2} + \frac{1}{2} \frac{\delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}'_2 - \mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}_2)}{p_1^2 + p_2'^2 - p_1'^2 - p_2^2} \right]$$

可以验证 $f_{\uparrow\downarrow}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = f_{\downarrow\uparrow}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$; $f_{\uparrow\uparrow}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = f_{\downarrow\downarrow}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$.

($f_{\uparrow\uparrow}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ 可由 E_n 中动量 $\mathbf{p}_2$ 与 $\mathbf{p}'_1$ 互相交换再求二阶泛函得到，其它类似)

于是我们有： $f_{\alpha\alpha'}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = a + b\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\alpha}'$.

利用前面的结果我们可以获得 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ ，由此可得相互作用函数 $f_{\alpha\alpha'}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$.