第一章 几何光学

第四节 成像

第四节 成像

4.1 实像与虚像、实物与虚物

4.2 物方与像方、物与像的共轭性

4.3 物像之间的等光程性

4.4 等光程面和严格成像

4.1实像与虚像、实物与虚物

成像—从盲人摸象说起（最原始的扫描成像）。

盲人摸象

图像摘自“谈古论今”论坛

扫描电子显微镜

X光成像

成像的要素：

手段（扫描、光学 等）、

对象（频谱、结构等）、

结果（维度、分辨率等）。

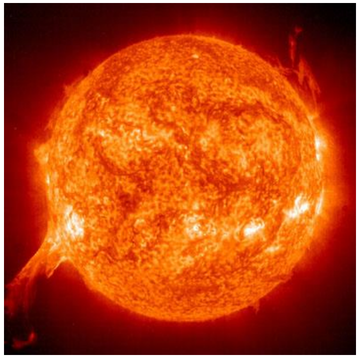
4.1实像与虚像、实物与虚物

光学成像：利用折射、反射等手段将物的信息再现。成像是几何光学研究的核心问题之一。

（1）光源与发光点

光源：正在发光的物体。

以下哪些是光源?



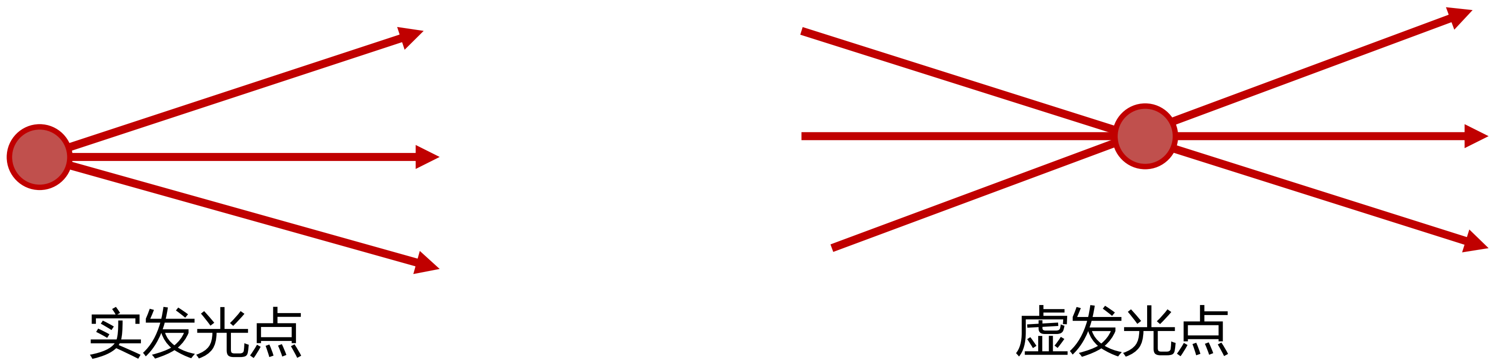
4.1实像与虚像、实物与虚物

（1）光源与发光点

发光点：光源抽象为理想的点光源。

实发光点：实际发出光线的发光点。

虚发光点：光线或其反向延长线的交点。



发光点只有几何位置，没有大小。

光源可以抽象为发光点的条件：尺度。

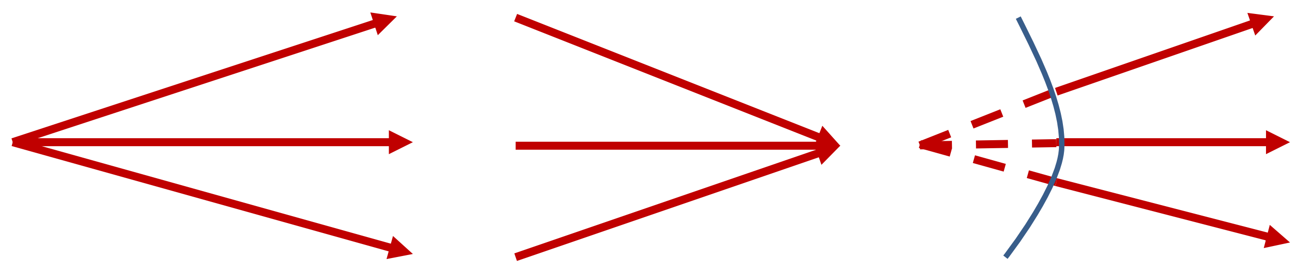
4.1实像与虚像、实物与虚物

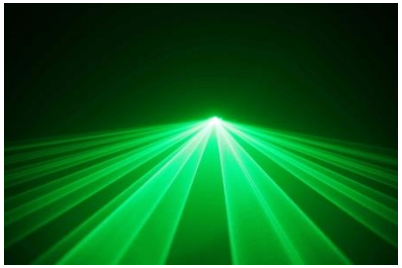
（2）光线与光束

光线：发光体发出的带有辐射能量的线条。

光束：在空间上具有一定关系的光线的集合。

同心光束，也称单心光束（concentric beam, homocentric beam）：光线本身或延长线交于一点。



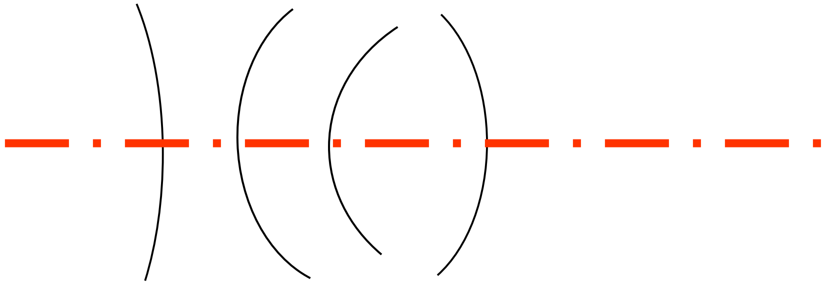


均匀各向同性的透明介质中，同心光束对应有限远处发光点发出的球面波或无限远处发光点发出的平面波。

4.1实像与虚像、实物与虚物

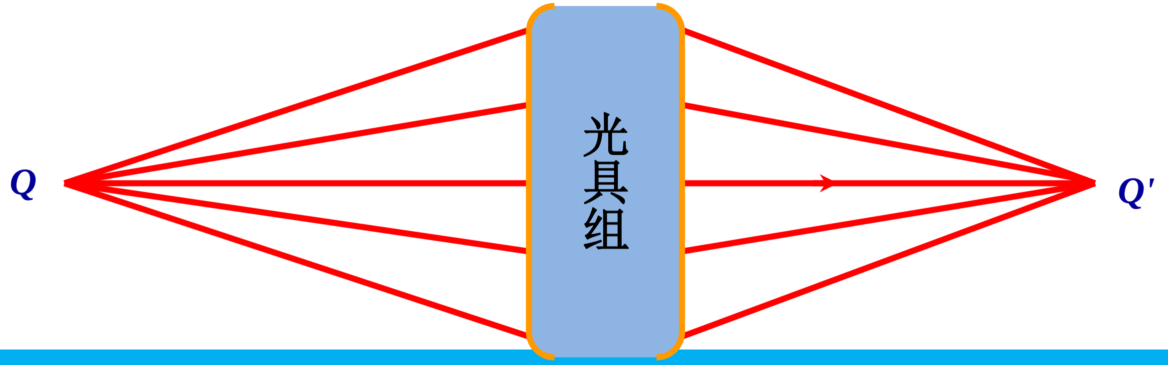
（3）光具组与理想光具组

光具组（optical system）：由若干反射面和折射面组成的系统。



光轴：光具组的对称轴

理想光具组：使通过系统的同心光束仍然保持同心性的光具组。



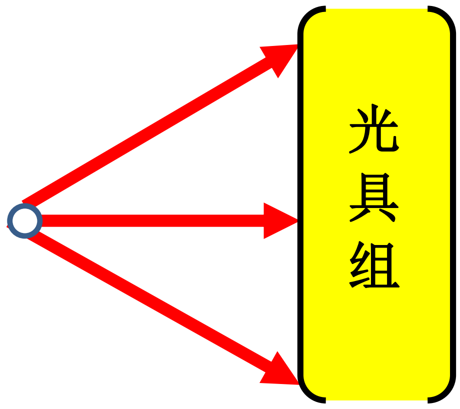
4.1实像与虚像、实物与虚物

（4）光学系统的物点与像点

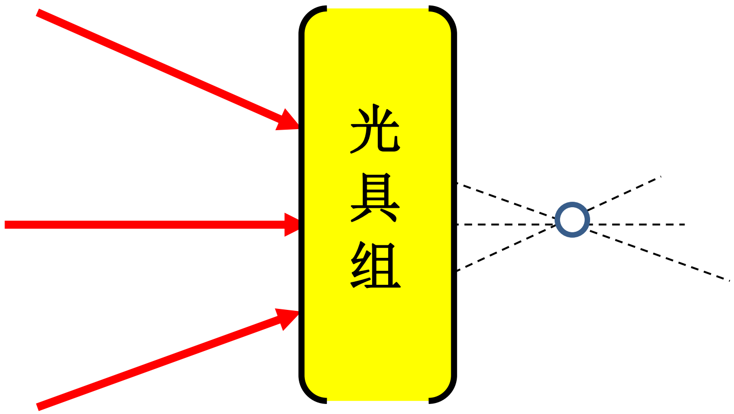
物点：对光具组来说，入射光线的发光点或同心光束的顶点。

实物点：发出同心光束的物点。

虚物点：会聚入射光线的顶点、或入射同心光束延长线的交点。



实物



虚物

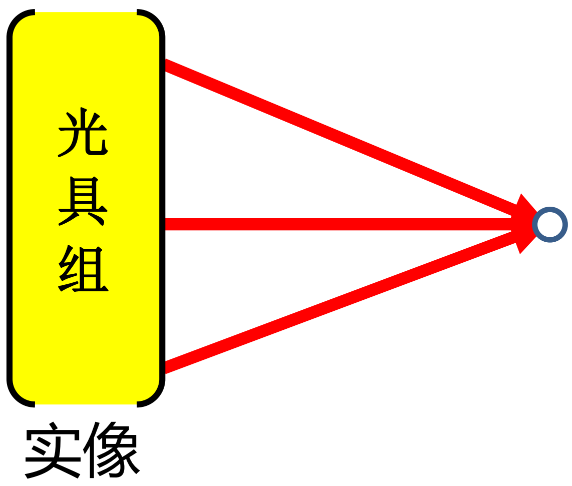
4.1实像与虚像、实物与虚物

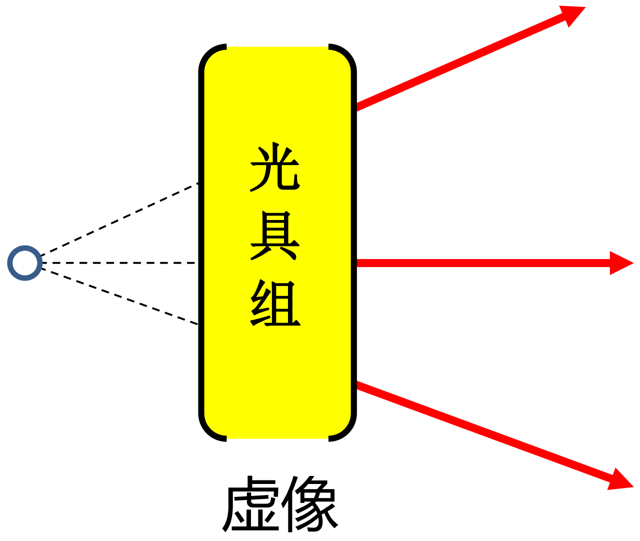
(4) 光学系统的物点与像点

像点：经过光具组后，出射同心光束的光心交点或顶点。

实像点：会聚同心光束的顶点。

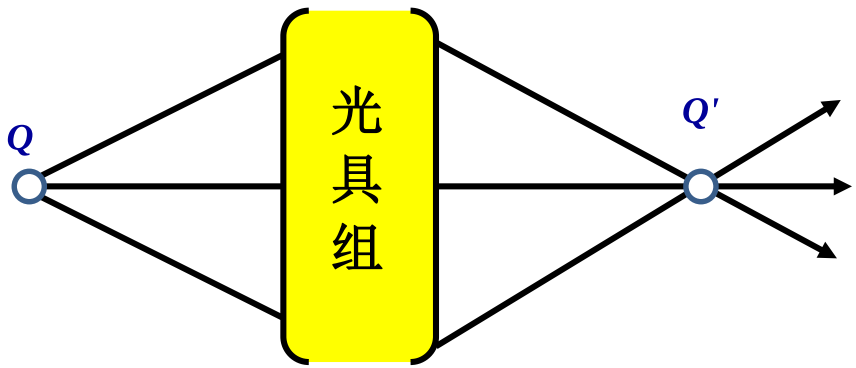
虚像点：发散同心光束反向延长线的顶点。



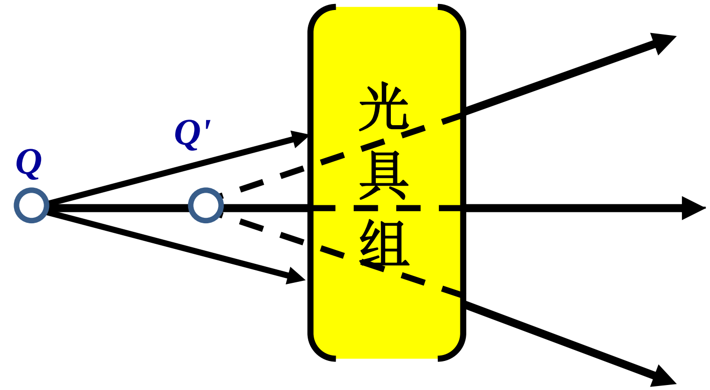


4.1实像与虚像、实物与虚物

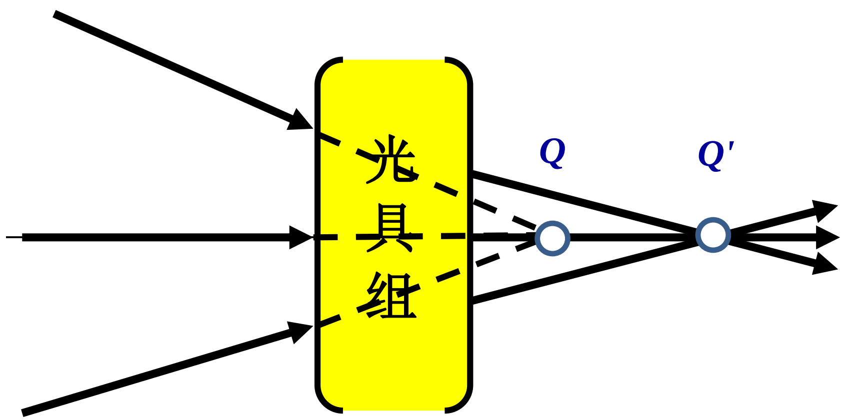
（4）光学系统的物点与像点



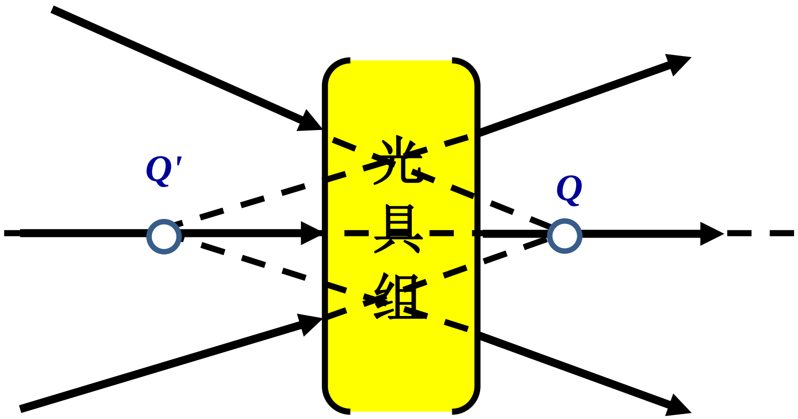
实物成实像



实物成虚像



虚物成实像



虚物成虚像

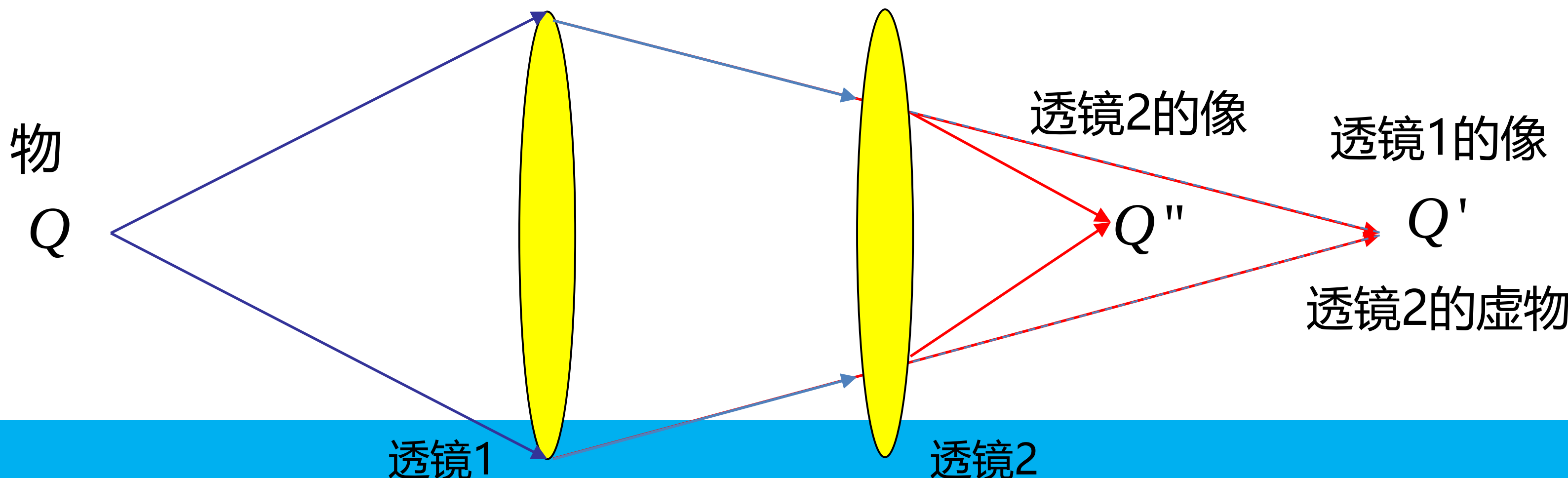
4.1实像与虚像、实物与虚物

(5) 讨论

① 物和像都是由一系列的点构成的，物点和像点一一对应。

② 实物、实像的意义在于有光线实际发自或通过该点，而虚物、虚像仅仅是由光的直线传播性质给人眼造成的一种错觉，实际上并没有光线经过该点。

③ 物和像具有相对性，虚实之间也可以进行转换。

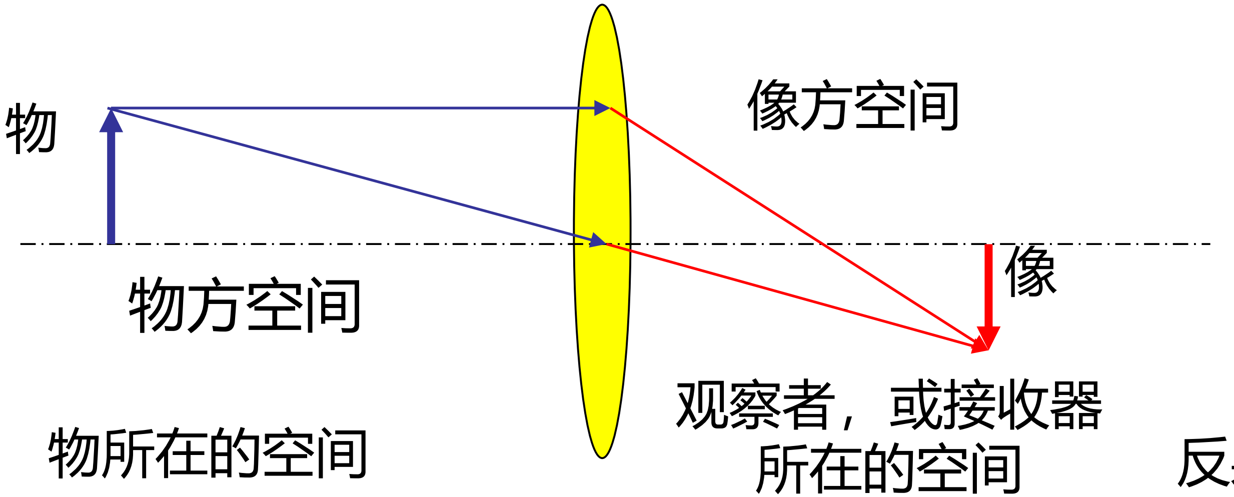


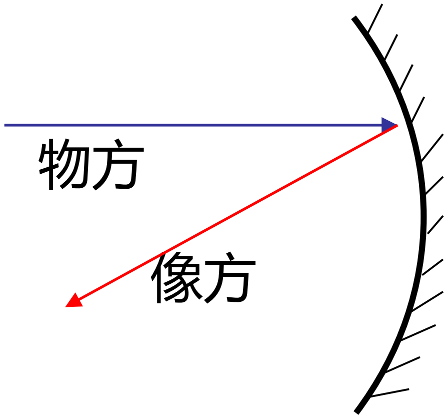
4.2 物方和像方、物与像的共轭性

（1）光学系统的物方和像方

物方（物空间）：物点所在的空间（包含入射光线及其延长线）。

像方（像空间）：像点所在的空间（包含出射光线及其延长线）。





反射镜的物方和像方重合

说明

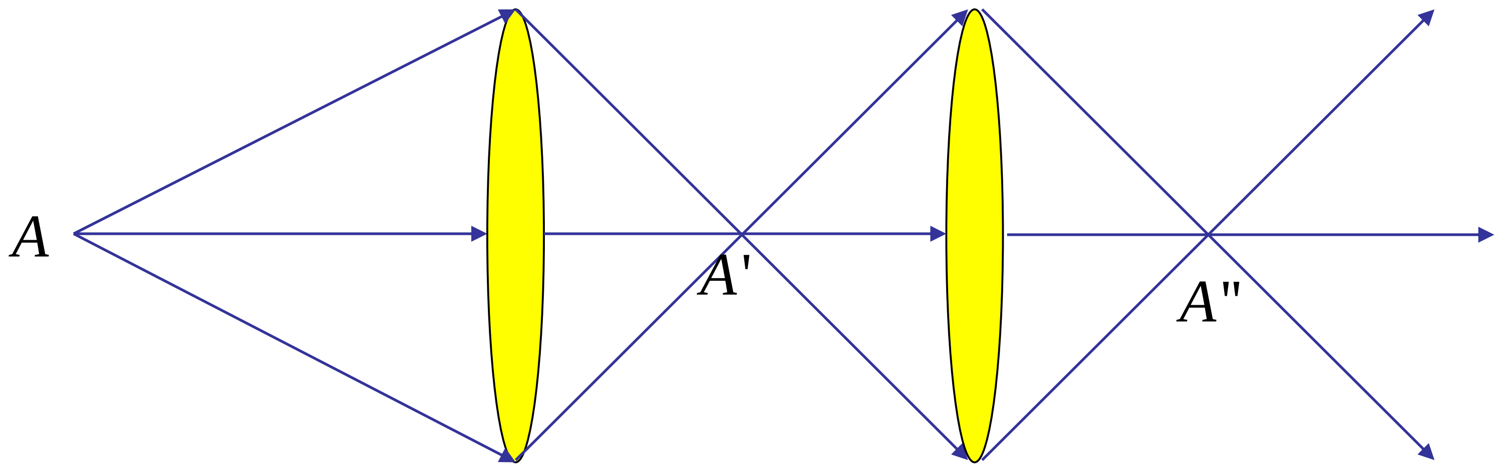
① 任何情况下，物方包含所有的实、虚物点，像方包含所有的实、虚像点。物空间只与物点或入射光束发生关系，像空间只与像点或出射光束发生关系。这也是判断空间一点是物方还是像方的依据。

② 对一个具体的光具组，物方可能不仅包含位于光具组前面的空间，而且也包含其后面的空间。像方的概念也同样如此。

4.2 物方和像方、物与像的共轭性

(2) 物与像的共轭性

对于给定的光学系统，无论物与像是实是虚，均具有共轭特性，即：将物点移到原来的像点位置，并使光线沿反方向射入光具组，像点将出现在原来的物点位置上。这样的一对物像点被称为共轭点。



共轭特性是光路可逆性原理的必然结果。

共轭特性反映了物像之间的关系。

4.3 物像之间的等光程性

等光程性：物点Q 经光具组成像于Q'，则Q和Q' 之间的光线等光程。

对实物和实像，多条光线光程的平稳值只能是恒定值，即相等。

对虚物和虚像，引入“虚光线”与“虚光程”的概念。

问题：虚光程怎么理解？—物像空间与折射率的关系。

按照费马原理，物像之间等光程

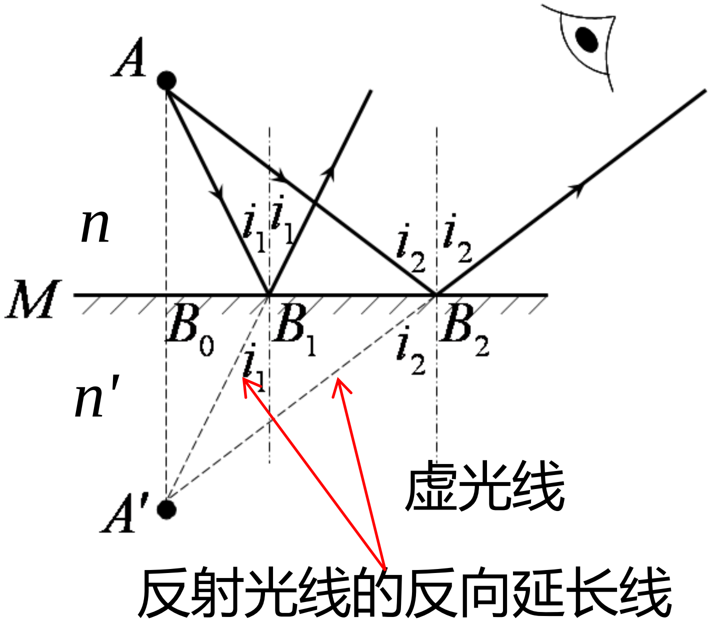
$$n\overline{AB_1}+n'\overline{B_1A'}=n\overline{AB_2}+n'\overline{B_2A'}$$

对任意光线成立，只能是等式为0

$$n\overline{AB_1}=-n'\overline{B_1A'}\quad n\overline{AB_2}=-n'\overline{B_2A'}$$

则虚像所在空间折射率 $n' = -n$

$$(QP)\equiv-\int_{Q\,(L)}^{P} n\,dl$$ n 为所属空间的折射率



4.4 等光程面和严格成像

光学系统严格（理想）成像的条件

（1） 同心性不变：由物点发出的同心光束通过光具组后保持同心性不变。

（2） 等光程成像：由物点发出的所有光线通过光具组后均应以相等的光程到达像点。

讨论

（1） 同心性不变条件和等光程条件是等价的。

（2） 不满足理想成像条件时，即同心性被光具组破坏的情况下，出射光束变为像散光束，像点变为弥散斑。

（3） 从等光程性与同心性不变条件的等效性，可以对物的共轭像点做定义：对于一个物点，如果相应的光学系统能使其发出的所有光线，均以相等的光程通过另一点，则该点与物点共轭，称为像点。

4.4 等光程面和严格成像

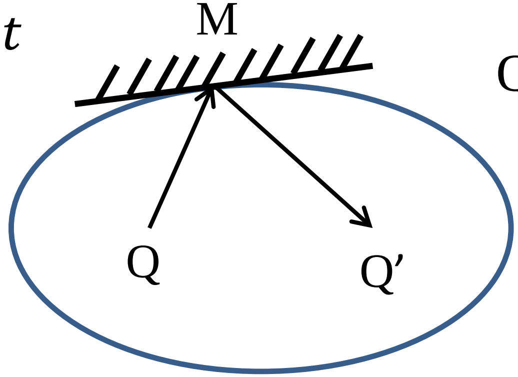
等光程面：若某一曲面的反射或折射能使从某一点发出的光线到达另一点时具有相等的光程，则该曲面称为该两点间的等光程面。只有等光程的反射、折射才能保证严格成像。

反射等光程面

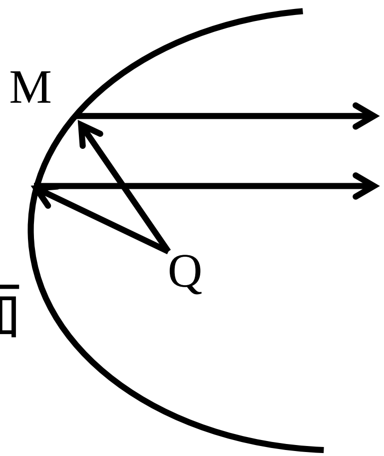
成实像

$$\overline{QM} + \overline{MQ'} = const$$

旋转椭球面



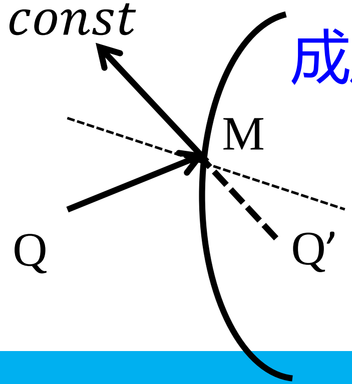
Q或Q'在无穷远处



旋转抛物面

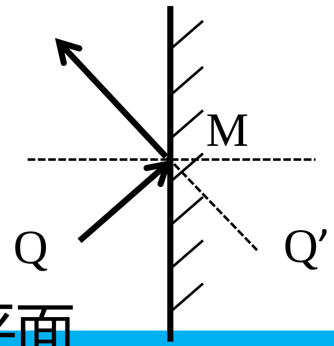
$$\overline{QM} - \overline{MQ'} = const$$

成虚像



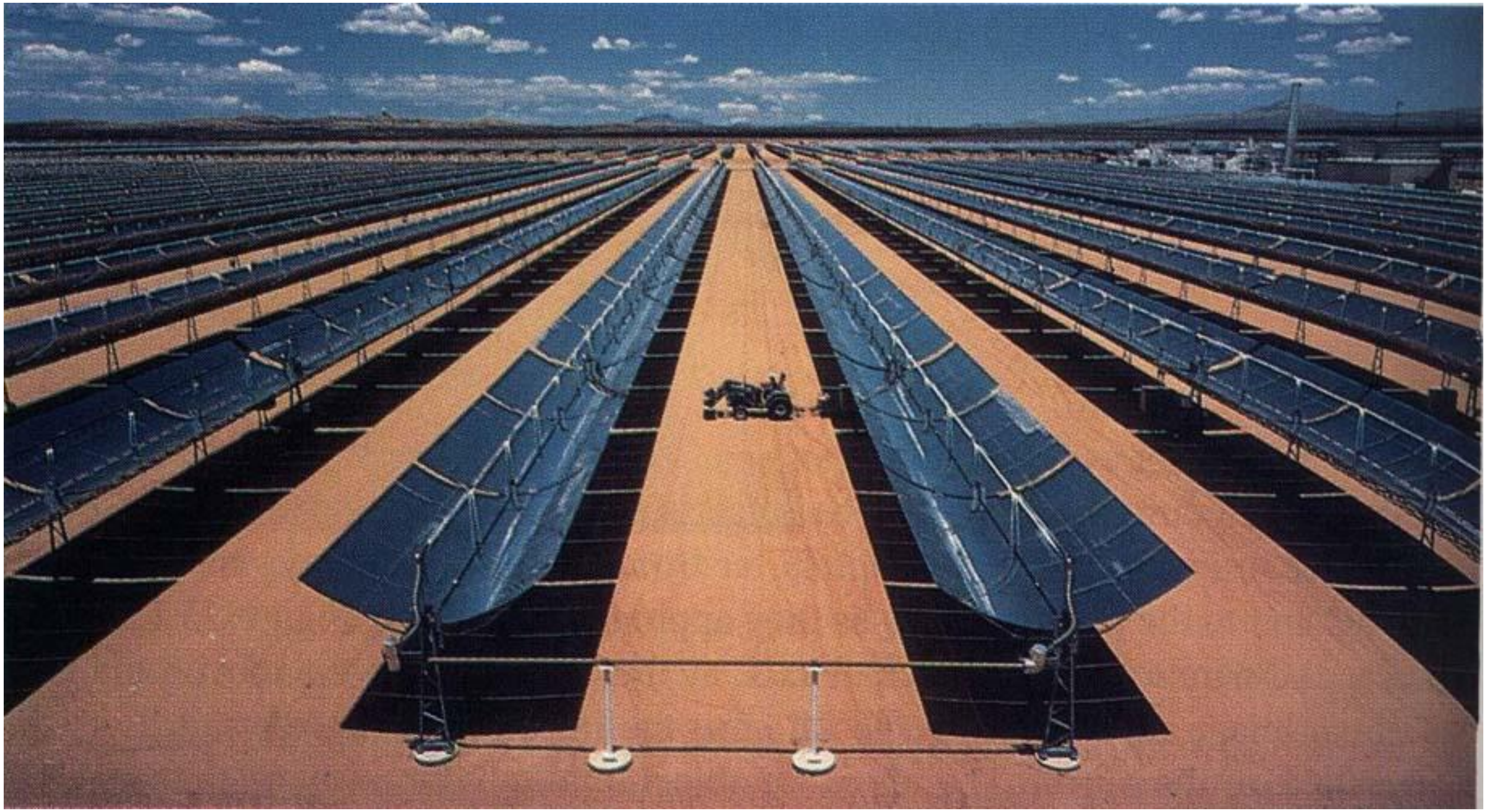
双曲面

$$const = 0$$



平面

4.4 等光程面和严格成像



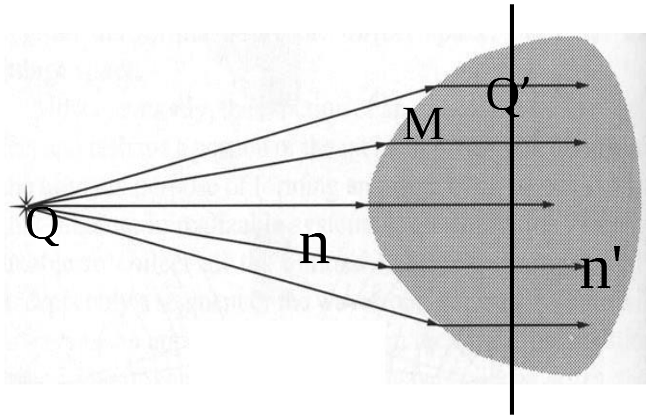
This solar-thermal electric plant in the Mojave Desert uses long rows of parabolic mirrors to focus the sun’s rays on oil-filled pipes, which are located at the focal point of each mirror.

4.4 等光程面和严格成像

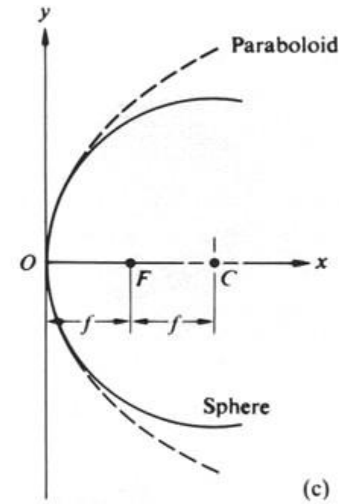
折射等光程面：笛卡尔卵形面，其截面的曲线是笛卡尔卵形线。

笛卡尔卵形线方程: $n\overline{QM}+n'\overline{MQ'}=const$

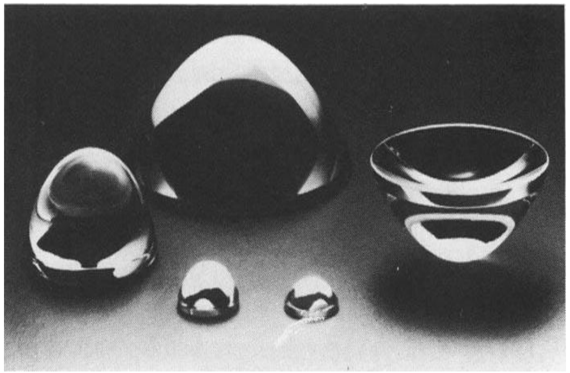
勒内 笛卡尔
(1596-1690)，法国哲学家



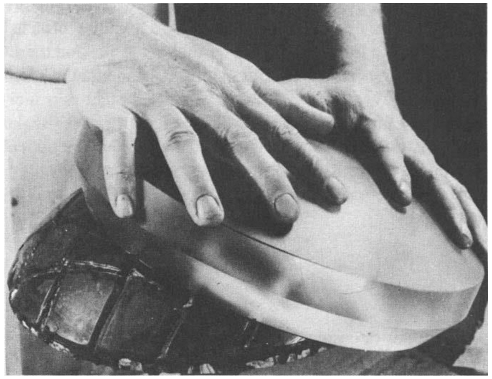
笛卡尔卵形面是四次曲面



球面镜与非球面镜的比较



非球面镜（aspherical lenses）



镜面抛光

4.4 等光程面和严格成像

讨论

① 理想成像的基本要求是满足同心光束的不变性，并且从整个物和像的对应关系看，还必须要满足物像间的相似性。

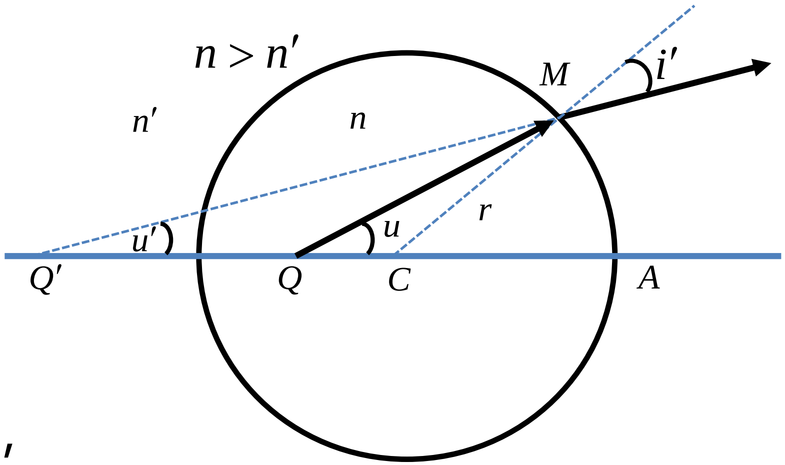
② 空间上各个点之间的相互位置要一一对应，同时每一对物像点的颜色要一一对应。

③ 要求成像的光学系统不产生畸变，没有像差、色差等。

④ 理想光具组是严格成像的必要条件。

4.4 等光程面和严格成像

齐明点，也称不晕点(aplanatic points)



Q与Q'是一对共轭点，

$$\overline{QC} = \frac{n'}{n} r \qquad \overline{Q'C} = \frac{n}{n'} r$$

在球上取任一点M，$\Delta QMC \sim \Delta MQ'C$

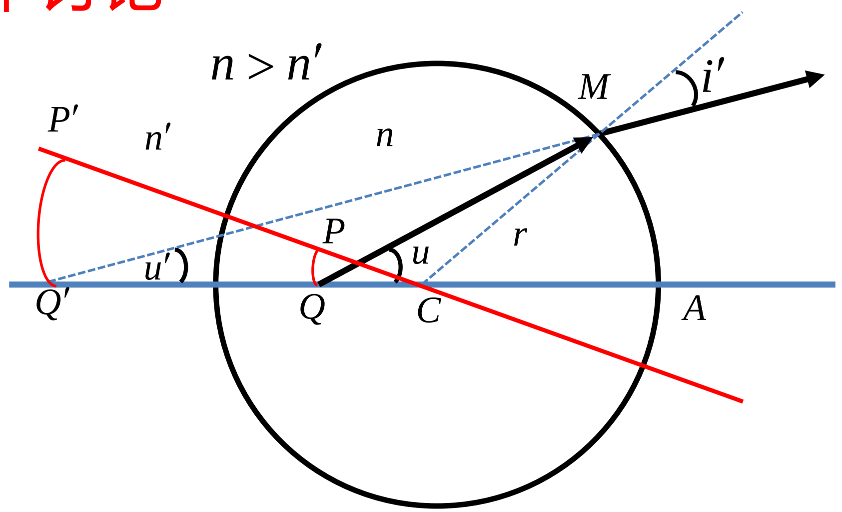
$$\therefore \frac{\overline{QM}}{\overline{MQ'}} = \frac{\overline{MC}}{\overline{Q'C}} = \frac{n'}{n}$$

注意：$Q'M$是反向延长线
结合之前的虚光程考虑

因此，光程 $\overline{QMQ'} = n\overline{QM} - n'\overline{MQ'} = 0$

4.4 等光程面和严格成像

齐明点的引申讨论



将QCO绕球心转一个角度，显然，与齐明点 (Q,Q') 同在一个圆弧上的各点，比如(P,P'),也是一对齐明点。由此可以得到以下结论：

PQ 可以严格成像于 $P'Q'$

当圆弧很短时，可以近似为一条直线，即 $PQ \approx \overline{PQ}, P'Q' \approx \overline{P'Q'}$

这表明位于齐明点位置的傍轴小物可以宽光束严格成像。

本节重点

1. 物点与像点
2. 物方与像方
3. 物与像的虚实
4. 等光程面与严格成像
5. 齐明点

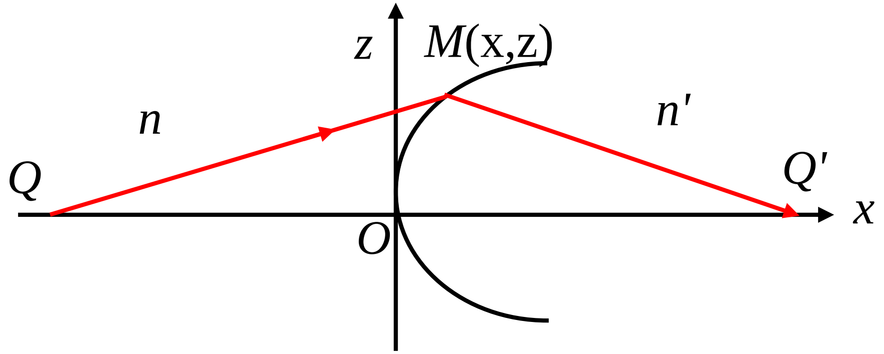
作业

P46. 1

New P32.-1

补充作业(选作)

1. 试推导笛卡尔卵形线的四次方程，并思考：一个给定的笛卡尔卵形面，有几个共轭点？（提示，从过光轴的光线与非经过光轴光线的等光程性入手，建立坐标方程，无需求解，写出基本形式即可，体会其四次方程的特性即可。）



$$n\overline{QM} + n'\overline{MQ'} = n\overline{QO} + n'\overline{OQ'}$$

第一章 几何光学

第五节 共轴球面组傍轴成像

第五节 共轴球面组傍轴成像

5.1 光在单个球面上的折射

5.2 轴上的物点成像、焦距、物像距公式

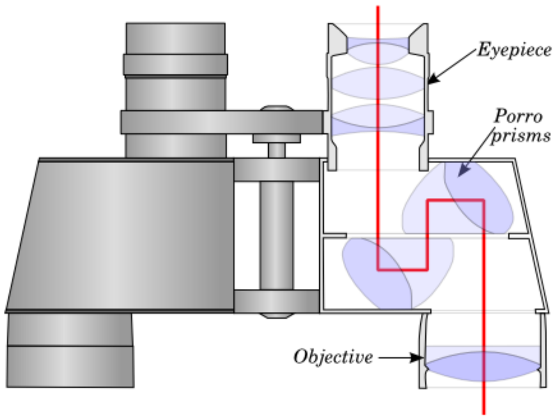
5.3 傍轴物点成像与横向放大率

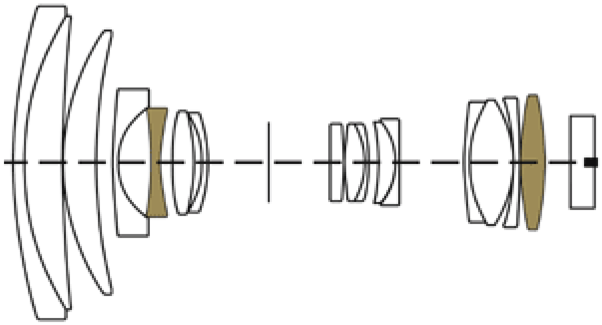
5.4 共轴球面组的逐次成像

5.5 拉格朗日-亥姆霍兹定理

5.1 光在单个球面上的折射

共轴球面光具组

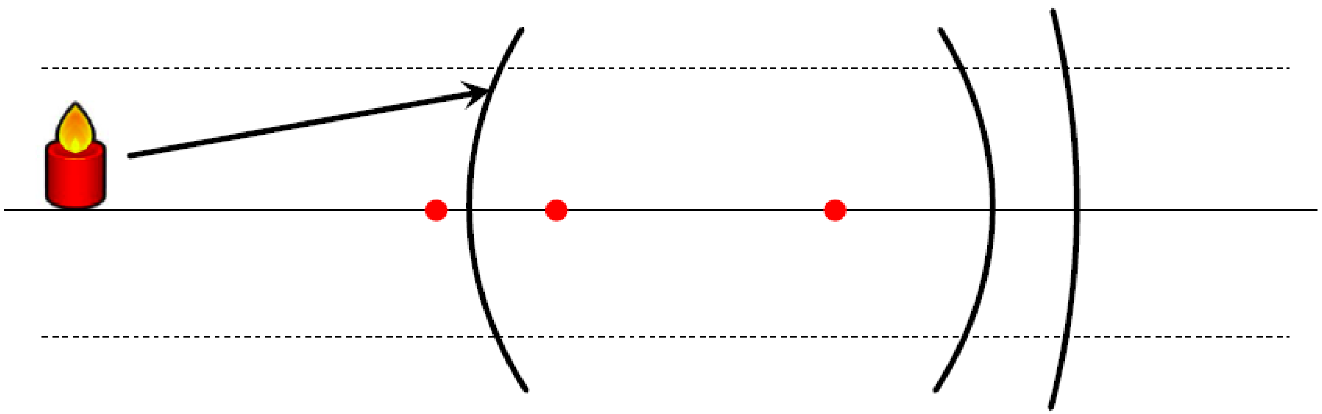




5.1 光在单个球面上的折射

共轴球面光具组：由一系列球心在一条直线上的折射、反射面构成的光学系统简称为共轴球面组。球心的连线称为光轴（主光轴）。

傍轴成像：将参与成像的光线限制在光轴附近，使球面能够近似成像，称为傍轴成像。



一个球面光具组有无数个光轴和无数个截面，但主光轴只有一个。并且，由于轴对称性，一般只需要讨论光线在某一个主截面上的传播规律即可。后续我们所说光具组的光轴一般均指主光轴。

5.1 光在单个球面上的折射

单个折射球面光具组：

- 从Q点发出的光线QM经过折射后变为MQ'
- MQ'与沿光轴的光线QOQ'相交成像

n：物方介质的折射率

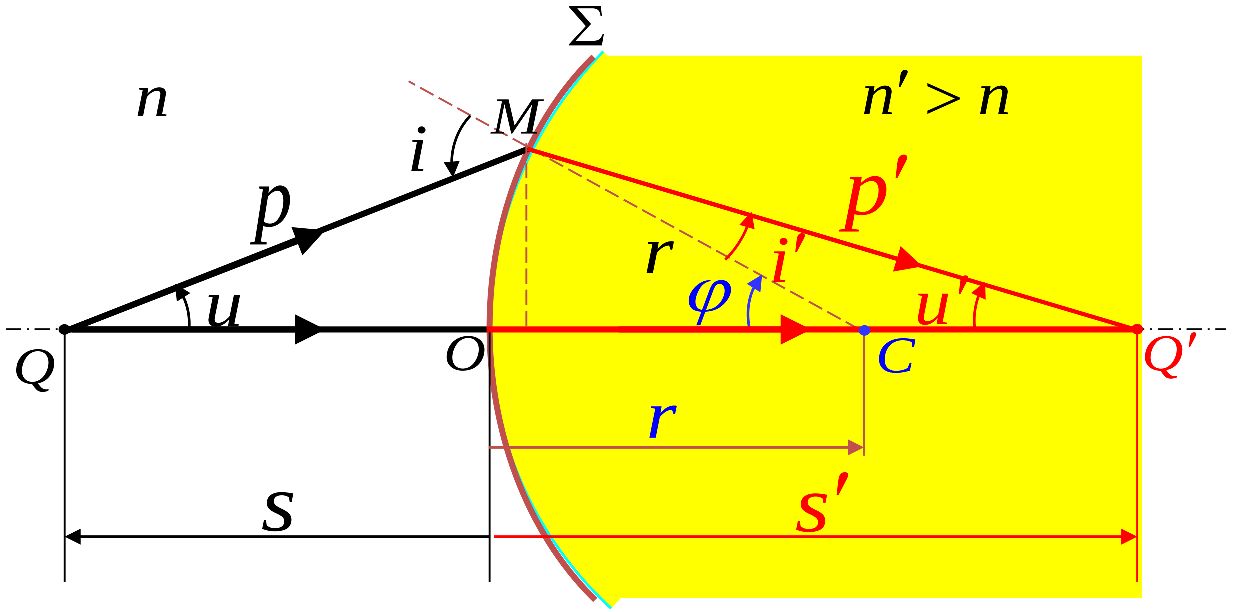
n'：像方介质的折射率

O：顶点

C：球心

Q：物点

Q'：像点



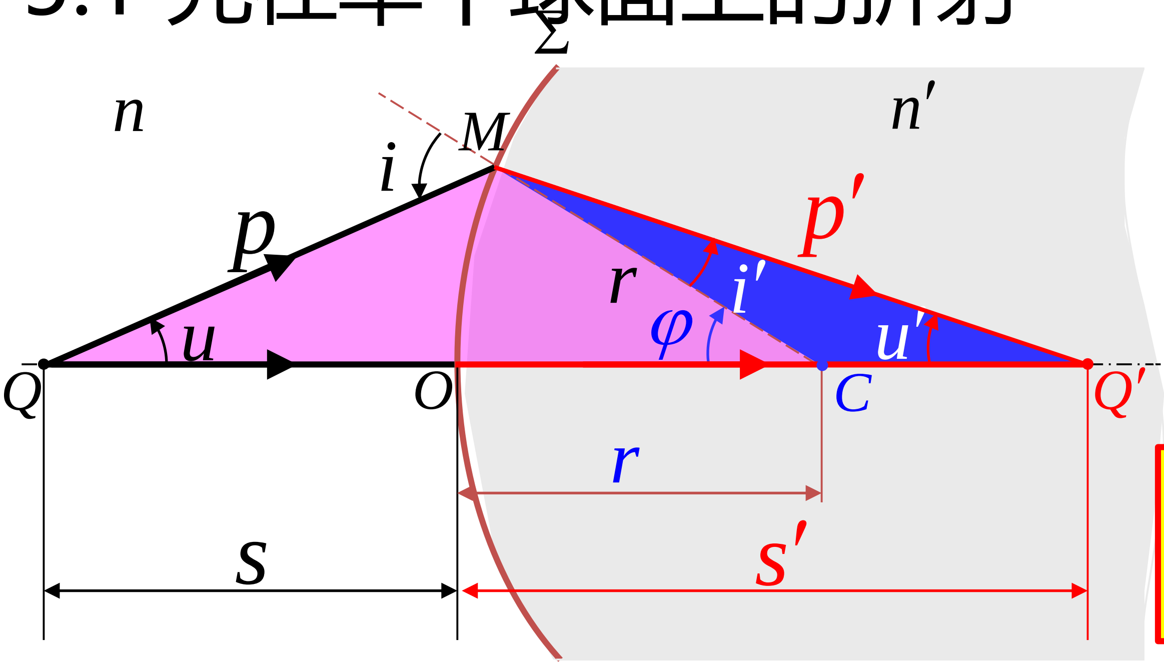
顶点：球面在光具组中的对称点O。

光轴：使光线不发生偏折的方向，如过球心并垂直于球面的方向。

主光轴：过球面顶点O和球心C的连线。

主截面：包含主光轴的截面。

5.1 光在单个球面上的折射



$$n\sin i = n'\sin i'$$

在ΔQMC和$\Delta Q'CM$中应用正弦定理

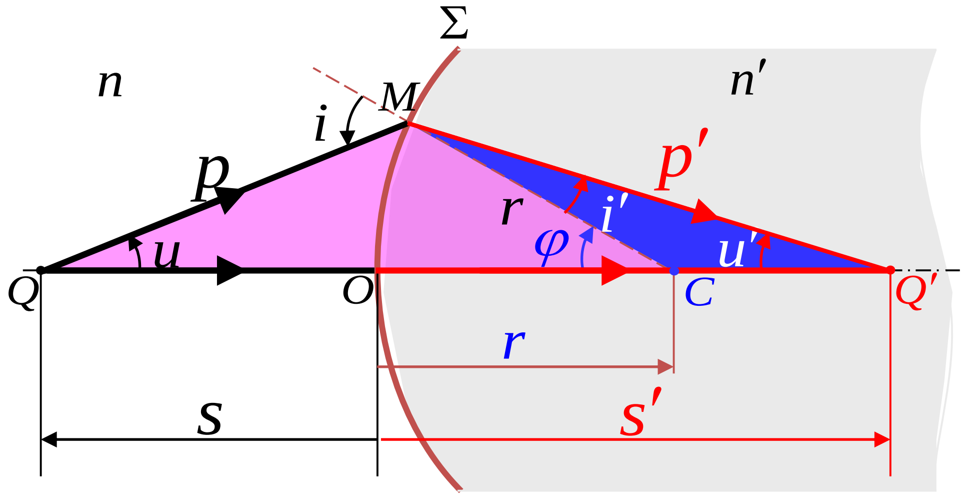
在任意一个平面三角形中，各边和它所对角的正弦值的比相等且等于外接圆的直径

$$\frac{p}{\sin\varphi} = \frac{s+r}{\sin i} \qquad \frac{p'}{\sin\varphi} = \frac{s'-r}{\sin i'}$$

$$\frac{p}{n(s+r)} = \frac{\sin\varphi}{n\sin i} = \frac{\sin\varphi}{n'\sin i'} = \frac{p'}{n'(s'-r)}$$

$$\frac{p}{n(s+r)} = \frac{p'}{n'(s'-r)}$$

5.1 光在单个球面上的折射



在ΔQMC和$\Delta Q'MC$中应用余弦定理

半角公式

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

$$p^2=(s+r)^2+r^2-2r(s+r)\cos\varphi$$

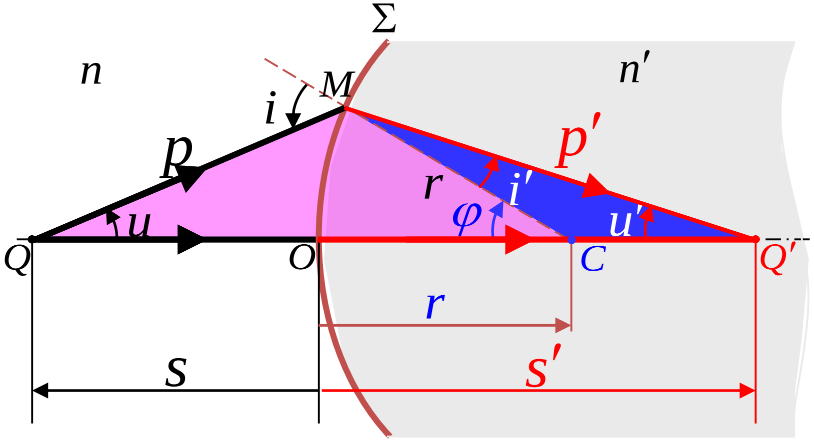
$$p'^2=(s'-r)^2+r^2+2r(s'-r)\cos\varphi$$

$$p^2=s^2+2rs+r^2+r^2-2r(s+r)\cos\varphi=s^2+2r(s+r)-2r(s+r)\cos\varphi$$

$$=s^2+2r(s+r)(1-\cos\varphi)\quad=s^2+4r(s+r)\sin^2\frac{\varphi}{2}$$

$$p^2=s^2+4r(s+r)\sin^2\frac{\varphi}{2}\qquad p'^2=s'^2-4r(s'-r)\sin^2\frac{\varphi}{2}$$

5.1 光在单个球面上的折射



从这三个式子出发

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{p}{n(s+r)}=\frac{p'}{n'(s'-r)} &&(1)\\ &p^2=s^2+4r(s+r)\sin^2\frac{\varphi}{2} &&(2)\\ &p'^2=s'^2-4r(s'-r)\sin^2\frac{\varphi}{2} &&(3)\end{aligned}\right.$$

将(2)式和(3)式带入(1)式的平方，可以得到

$$\frac{s^2+4r(s+r)\sin^2\frac{\varphi}{2}}{n^2(s+r)^2}=\frac{s'^2-4r(s'-r)\sin^2\frac{\varphi}{2}}{n'^2(s'-r)^2}$$

$$\frac{s^2}{n^2(s+r)^2}-\frac{s'^2}{n'^2(s'-r)^2}=-4\sin^2\frac{\varphi}{2}\left[\frac{r}{n^2(s+r)}+\frac{r}{n'^2(s'-r)}\right]$$

φ不同，s'不同，即从Q点发出的同心光束不能保持同心性

- 欲使折射光线保持同心性，必须
- (1) $r=\infty$ $n^2=n'^2$

$n=n'$ 没有意义 只有 $n=-n'$ 这就是平面镜

- 或者(2) $$\frac{s^2}{n^2(s+r)^2}-\frac{s'^2}{n'^2(s'-r)^2}=0$$

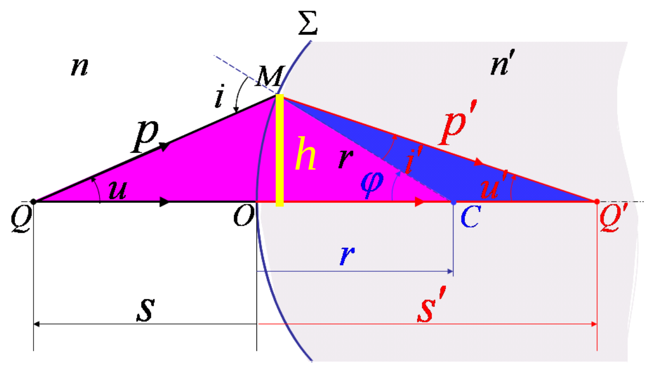
$$\frac{r}{n^2(s+r)}+\frac{r}{n'^2(s'-r)}=0$$

→齐明点。

- 或者(3)满足近轴（傍轴）条件

$$|h| \ll |s|, |s'|, |r|$$

$$|\varphi|, |u|, |u'| \ll 1$$



$$\varphi \approx 0 \qquad \sin^2\frac{\varphi}{2} \approx 0$$

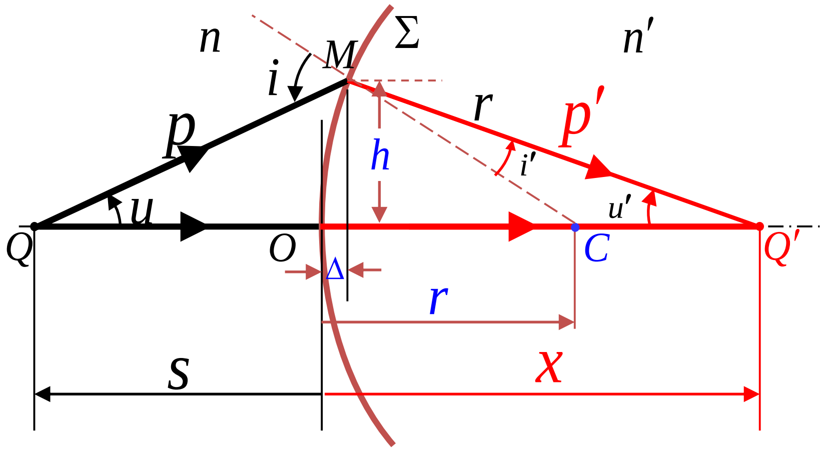
$$\frac{s^2}{n^2(s+r)^2} - \frac{s'^2}{n'^2(s'-r)^2} = -4\sin^2\frac{\varphi}{2}\left[\frac{r}{n^2(s+r)} + \frac{r}{n'^2(s'-r)}\right]$$

$$\frac{n(s+r)}{s} = \pm\frac{n'(s'-r)}{s'} \qquad \text{取}+ \qquad \frac{n'}{s'} + \frac{n}{s} = \frac{n'-n}{r}$$

$$\Phi = \frac{n'-n}{r}$$ 折射球面的光焦度

5.2 轴上的物点成像、焦距、物像距公式

从费马定理出发导出球面折射傍轴成像公式



一般来说，光程$L(QMQ')$是Δ和x的函数，可以表示为$L(\Delta,\ x)$。Δ通常和h有关，只有当$L(\Delta, x)$与Δ无关时，x才是像点Q'。

$$L(QMQ') = L(QOQ')$$ 等光程方程

$$L(QMQ') = n\overline{QM} + n'\overline{MQ'} = n\sqrt{(s+\Delta)^2 + h^2} + n'\sqrt{(x-\Delta)^2 + h^2} \qquad L(QOQ') = ns + n'x$$

在傍轴条件下，$\Delta << s,r,x$，于是近似有 $h^2 = r^2 - (r-\Delta)^2 \approx 2r\Delta$

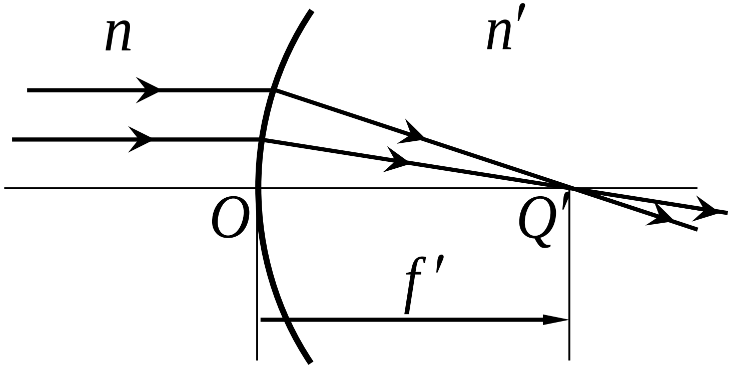
进而
$$\begin{cases} \sqrt{(s+\Delta)^2 + h^2} \approx s(1 + \dfrac{r+s}{s^2}\Delta) \\ \sqrt{(x-\Delta)^2 + h^2} \approx s(1 + \dfrac{r-x}{s^2}\Delta) \end{cases}$$
带入等光程方程得到

$$ns(1 + \frac{r+s}{s^2}\Delta) + n'x(1 + \frac{r-x}{x^2}\Delta) = ns + n'x \quad \Rightarrow \frac{n}{s} + \frac{n'}{x} = \frac{n'-n}{r}$$

5.2 轴上的物点成像、焦距、物像距公式

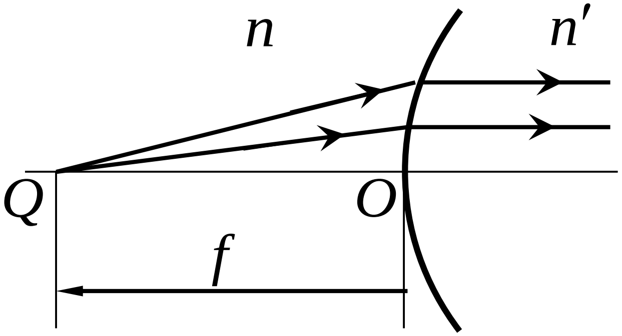
物像焦点与焦距 $\dfrac{n'}{s'}+\dfrac{n}{s}=\dfrac{n'-n}{r}$

（1） 平行光入射，$s\to\infty$。此时成像点Q'称为像方焦点，记为F'。s'称为像方焦距，记为f'。



$$s'=\frac{n'r}{n'-n}=f'=\frac{n'}{\Phi}$$

（2） 折射后出射光线为平行光，$s'\to\infty$。此时物点Q称为物方焦点，记为F，s称为物方焦距，记为f。



$$s=\frac{nr}{n'-n}=f=\frac{n}{\Phi}$$

5.2 轴上的物点成像、焦距、物像距公式

光焦度

$$\Phi = \frac{n' - n}{r}$$

单位：屈光度，符号D，1D=1m^{-1}

称为折射球面的光焦度，由球面的曲率半径和球面两侧的折射率之差决定。

光焦度的意义在于：仅由球面系统参数确定。表征的是光学系统偏折光线的能力。

(1) Φ 越大，对平行光的偏折能力越强。

(2) $\Phi>0$，对光线的折射起到会聚作用； $\Phi<0$，对光线的折射起到发散作用； $\Phi=0$，为平面折射，平行光束经过光具折射后仍是平行光束。

5.2 轴上的物点成像、焦距、物像距公式

Gauss公式

将焦距的定义代入折射球面的成像公式，可以得到

卡尔·弗里德里希·高斯
(1777~1855)，德国

$$\frac{f'}{s'}+\frac{f}{s}=1$$

高斯物像公式是光学系统傍轴成像的普遍公式。无论成像系统如何不同，其物距、像距和物像方焦距之间的关系，均可以表示成高斯物像公式的形式。只是在不同系统中，物距、像距和物像方焦距的取值方法和符号规则有可能不同。

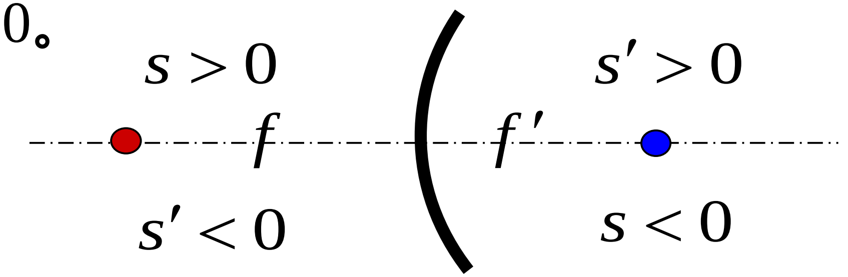
5.2 轴上的物点成像、焦距、物像距公式

公式的符号规则

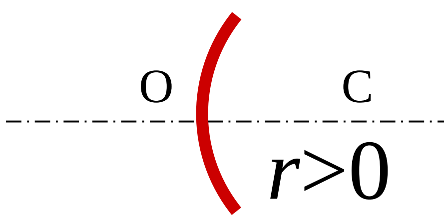
以光具组的顶点和主光轴为基准，设入射光从左向右入射，规定光路图中各几何量的符号：

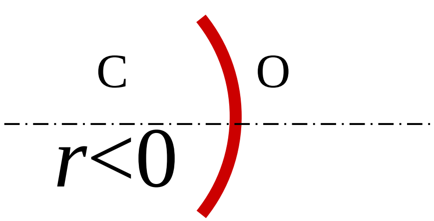
（1）物距s：物点Q位于球面顶点O的左侧，为实物点，$s>0$；反之，为虚物点，$s<0$。

（2）像距s'：像点Q'位于球面顶点O的右侧，为实像点，$s'>0$；反之，为虚像点，$s'<0$。



（3）球心C位于球面顶点O的右侧时，$r>0$。反之，$r<0$。

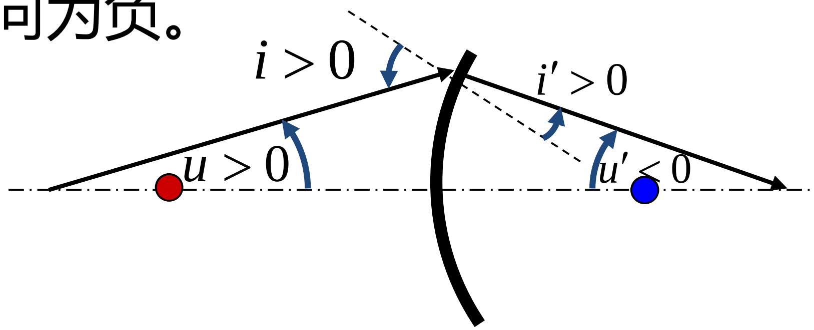




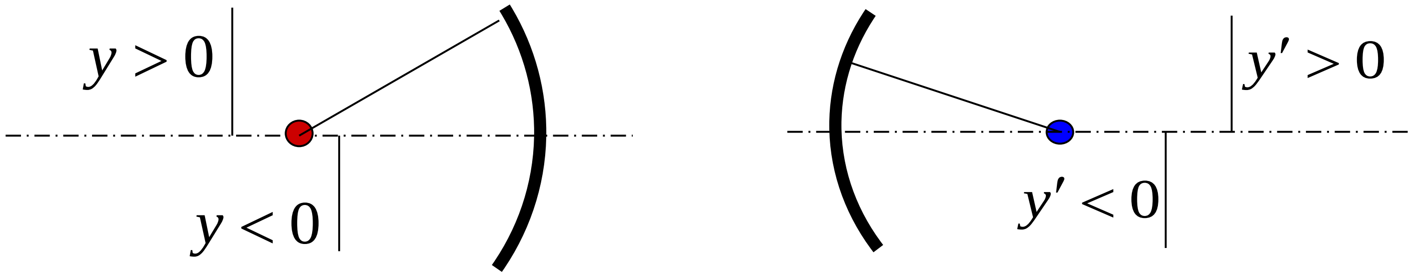
5.2 轴上的物点成像、焦距、物像距公式

公式的符号规则（续）

（4）角度：以光轴（主光轴或球面法线）为基准，以锐角逆时针偏向为正，顺时针偏向为负。



（5）物像及轴外点高度：以主光轴为基准，向上为正，向下为负。



（6）反射球面：光线经过反射后，从右向左传播，且物方和像方位于球面同一侧。因此，若像点Q'位于球面顶点O的左侧，为实像点，$s'>0$；反之，为虚像点，$s'<0$。

5.2 轴上的物点成像、焦距、物像距公式

公式的符号规则（续）

(7）全正图形：所有长度和角度在图中均以正值标记，若某个量按符号规则为负值，在图上标注时，应冠以“-”号。

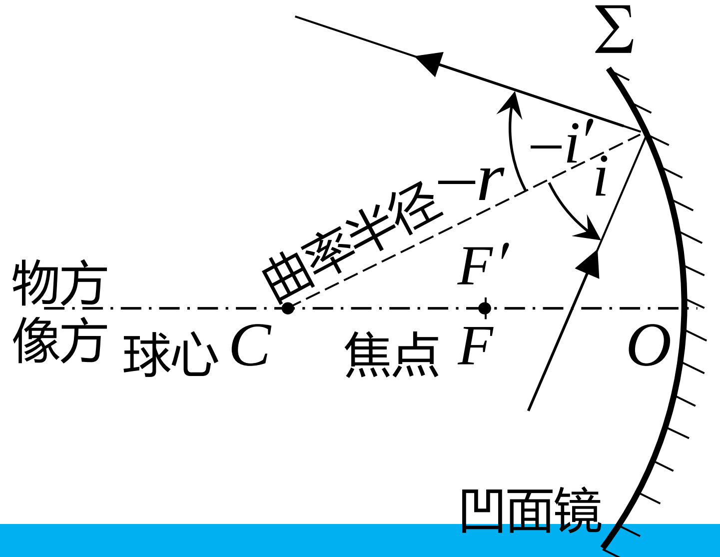
例：光在单个球面上的反射成像

可以看作是球面折射的一种特殊形式，不同之处仅在于经球面反射的光线方向倒转，变为从右向左传播。利用符号规则（6）和 $n' = -n$，用 $-s'$ 代替 s'，带入成像公式

$$\frac{n'}{s'} + \frac{n}{s} = \frac{n'-n}{r}$$

得到球面反射成像公式：$\dfrac{1}{s'} + \dfrac{1}{s} = -\dfrac{2}{r}$

光焦度 $\Phi = -\dfrac{2}{r}$ $f = f' = -\dfrac{r}{2}$



5.2 轴上的物点成像、焦距、物像距公式

关于符号规则的说明

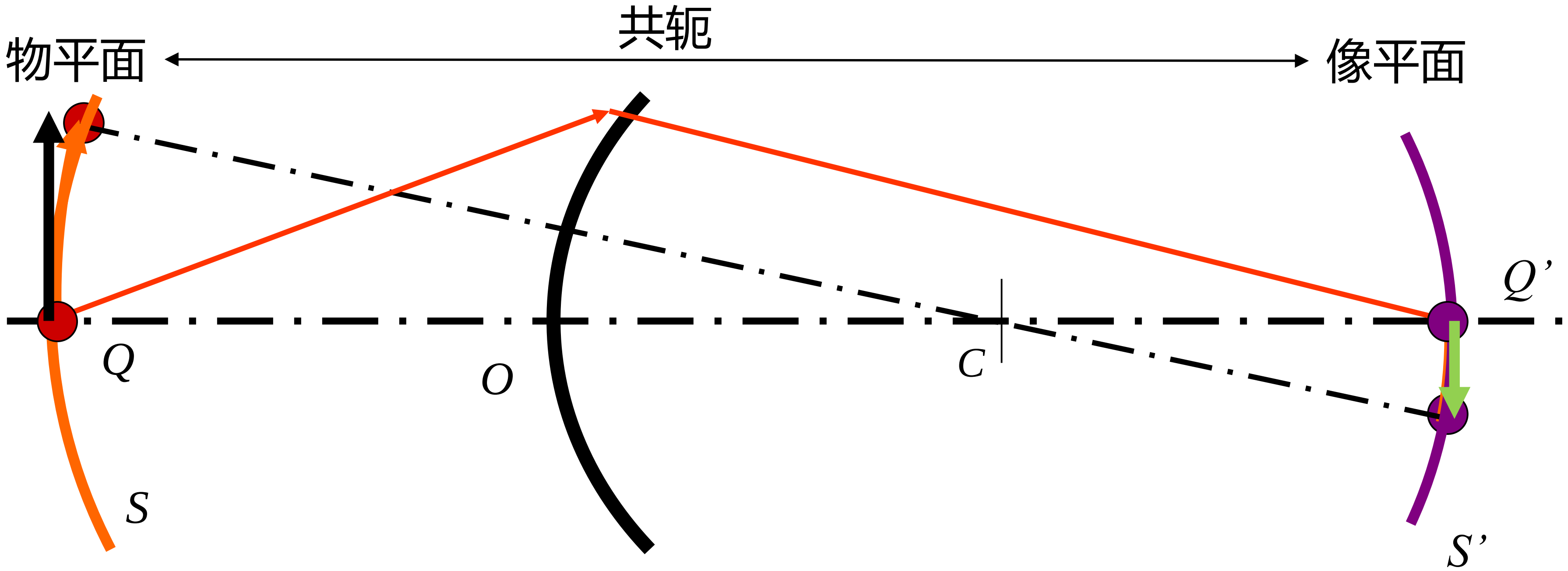
（1）长度度量与角度量的正负无关，各自遵守相应的符号规则。

（2）符号规则与全正图形的规定并不矛盾，在光路图中的长度量与角度量均为几何量，只能取正值，而实际计算时，这些量又成为代数量，这样才能保证所导出公式的普适性。

（3）不同教材采用的符号规则可能不同，但结论相同。这也说明了公式描述的普适性。

5.3 傍轴物点成像与横向放大率

轴外物点的成像



相当于光轴绕球心旋转，像随物动。物是以C点为球心，以线段CQ的长度为半径的球面S；像是以C点为球心，以线段$Q'C$的长度为半径且过Q'点的球面S'。

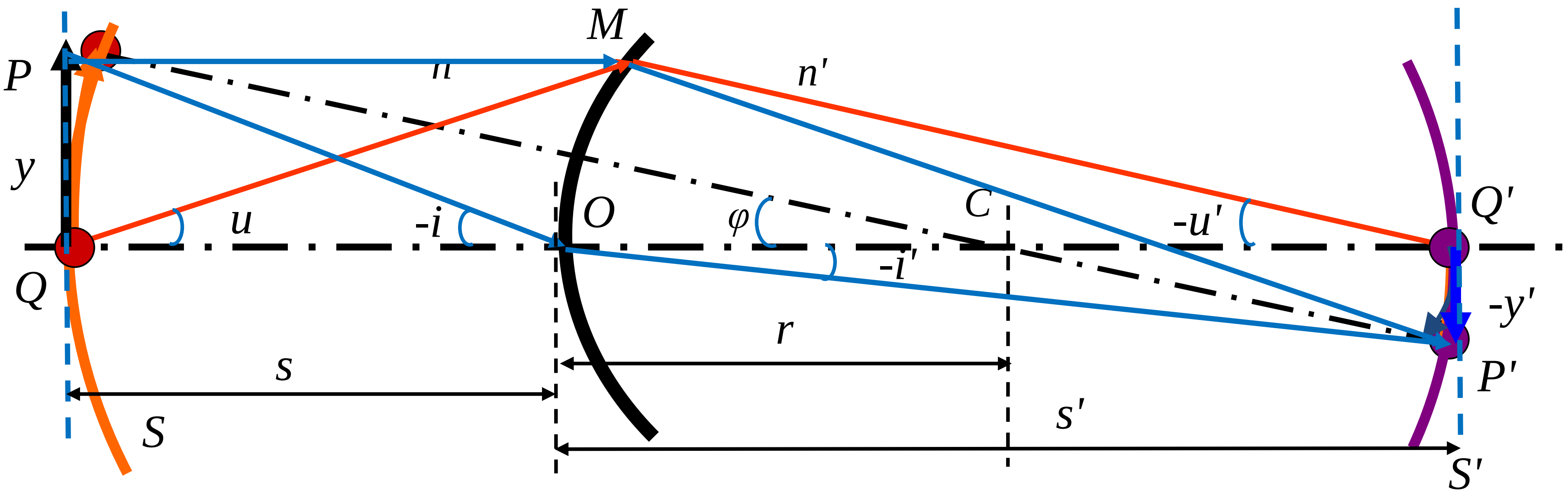
当满足近轴条件时，圆弧变为直线。

5.3 傍轴物点成像与横向放大率

傍轴物点的条件

(1) 当球面S（物）和相应的S'（像）的横向线度远远小于该球面成像系统的物距s、像距s'及折射球面S的曲率半径r时；

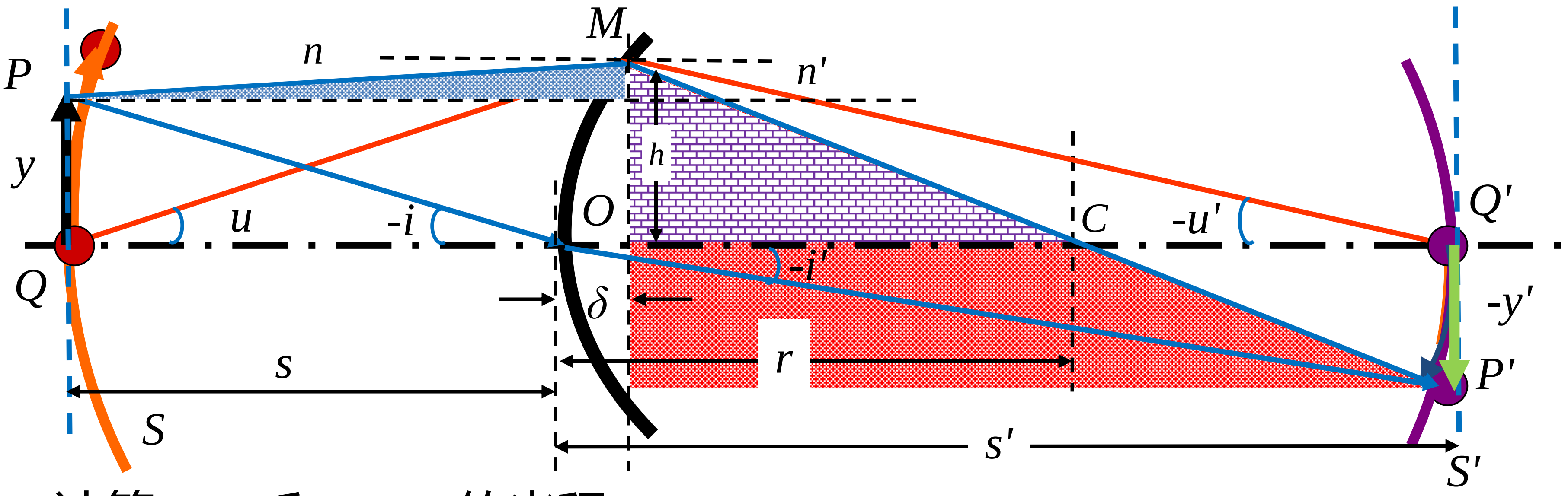
(2) 或球面S上任意一点发出的同心光束的光轴与系统主光轴之间的夹角φ很小时。



傍轴条件下，球面S和S'分别与过Q和Q'点的垂轴平面重合。成像系统的物像共轭面近似简化为一对垂轴平面。

5.3 傍轴物点成像与横向放大率

由等光程条件导出傍轴物点的成像规律



计算POP'和PMP'的光程

$$\overline{POP'} = n\sqrt{s^2 + y^2} + n'\sqrt{s'^2 + (-y')^2}$$

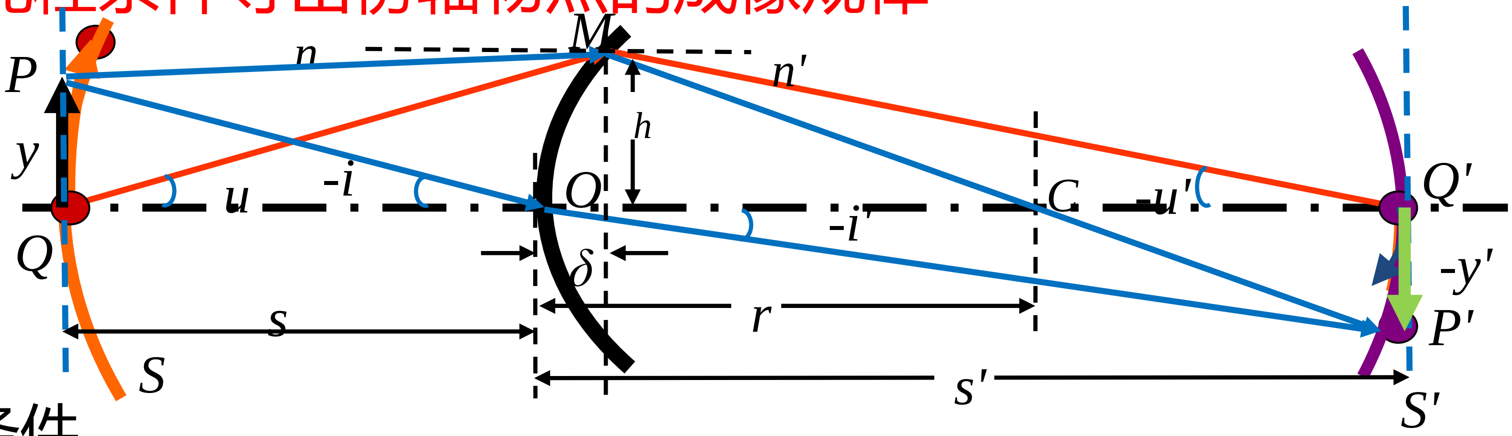
$$\overline{PMP'} = n\sqrt{(s+\delta)^2 + (h-y)^2} + n'\sqrt{(s'-\delta)^2 + [h+(-y')]^2}$$

$$\delta = r - \sqrt{r^2 - h^2}$$

一般情况下， $\overline{POP'} \neq \overline{PMP'}$

5.3 傍轴物点成像与横向放大率

由等光程条件导出傍轴物点的成像规律



傍轴条件

傍轴光线：$s^2, s'^2, r^2 >> h^2, \delta^2$

傍轴物：$s^2, s'^2, r^2 >> y^2, y'^2$

$$\boxed{(1+x)^a = 1 + \frac{a}{1!}x + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + o(x^3)}$$

傍轴条件下的物像关系，计算 $\overline{POP'} - \overline{PMP'}$，展开根号并取一级近似

$$\Delta L = \overline{POP'} - \overline{PMP'} = -h\left(\frac{n}{s}y + \frac{n'}{s'}y'\right) + \frac{h^2}{2}\left(\frac{n}{s} + \frac{n'}{s'} - \frac{n'-n}{r}\right)$$

对任意h，满足光程差 $\Delta L=0$ 的条件是

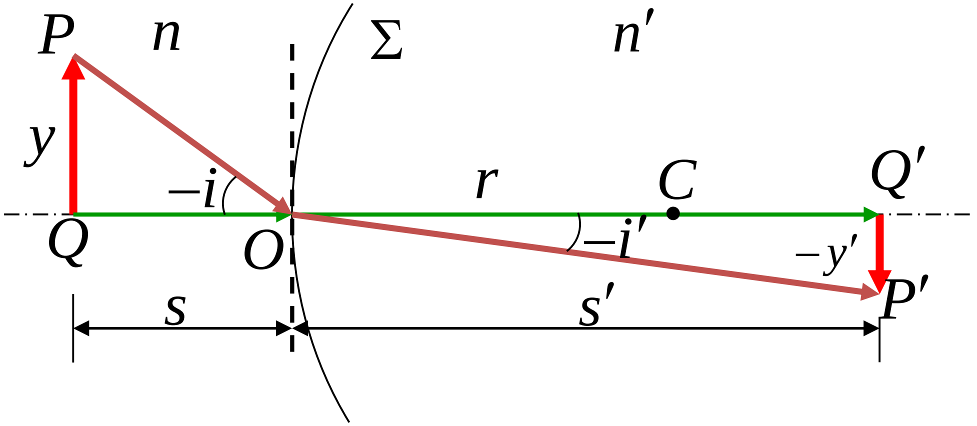
$$\frac{n}{s}y + \frac{n'}{s'}y' = 0 \qquad 并且 \qquad \frac{n}{s} + \frac{n'}{s'} - \frac{n'-n}{r} = 0$$

5.3 傍轴物点成像与横向放大率

横向放大率

定义：像高与物高之比。

$$V \equiv \frac{y'}{y}$$



意义：反映了傍轴条件下，物点高度与像点高度之间的关系。

缩放关系：$|V|>1$，横向被放大；$|V|<1$，横向被缩小。

正倒关系：$V>0$，像正立；$V<0$，像倒立。

折射球面 $$\frac{\overline{P'Q'}}{\overline{PQ}} = \frac{-y'}{y} = \frac{s'\tan i'}{s\tan i} \approx \frac{s'\sin i'}{s\sin i} = \frac{ns'}{n's} \Rightarrow V \equiv \frac{y'}{y} = -\frac{ns'}{n's}$$

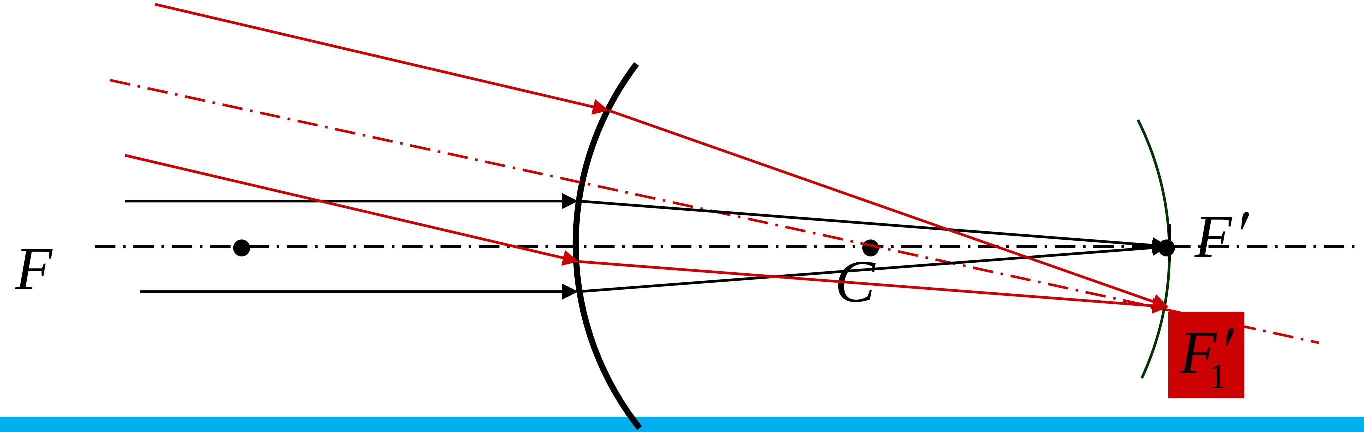
反射球面 $$n' = -n \qquad s' \to -s' \qquad V = -\frac{s'}{s}$$

焦点与焦平面

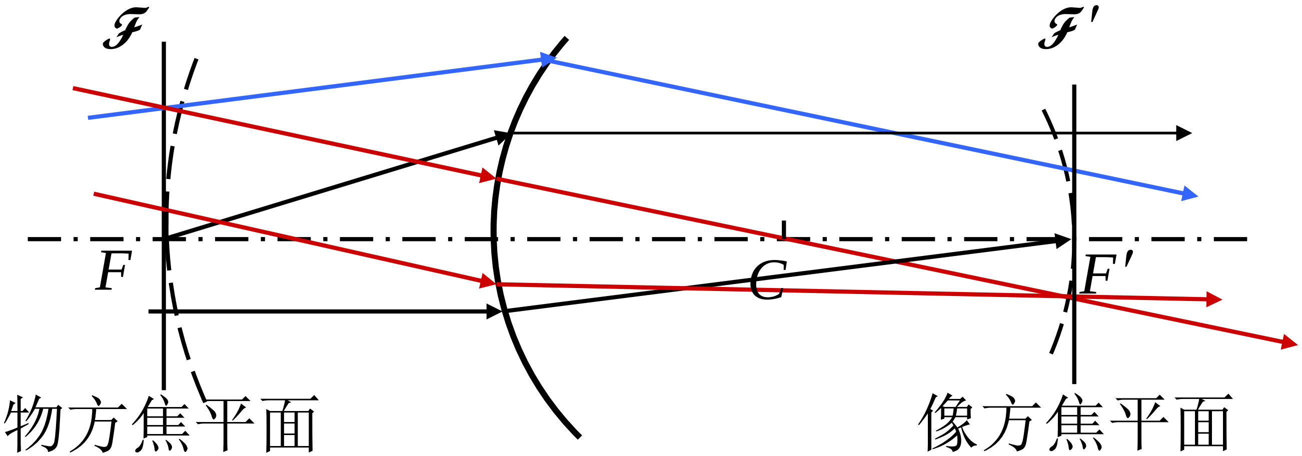
平行于光轴的入射光线经过球面折射后，汇聚于像方焦点。

由于单球面有无数个光轴，所以，凡是相互平行的入射光线，经折射后，都汇聚于与入射光线平行的光轴的像方焦点上。

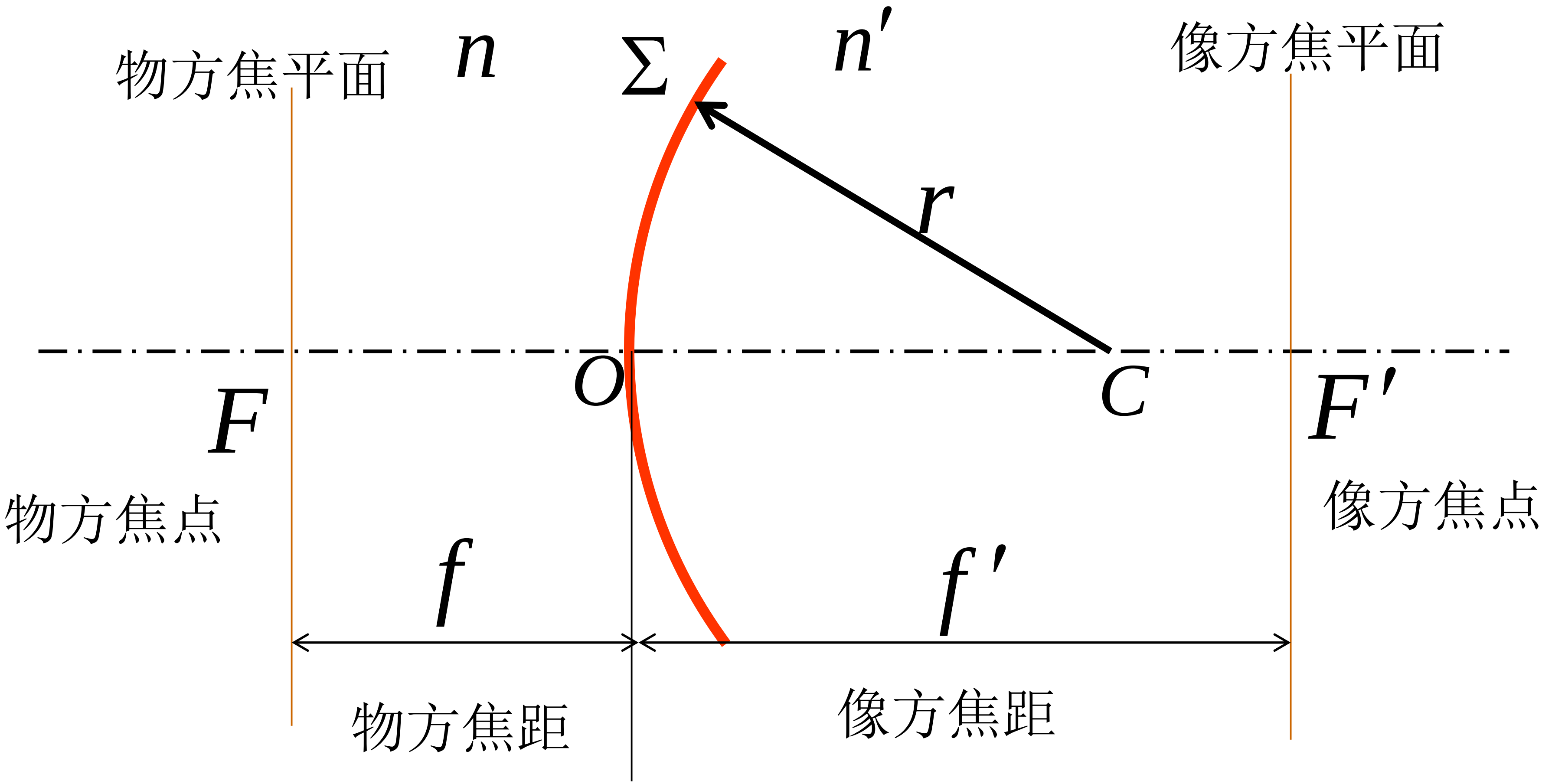
所有这些像方的焦点构成一个球面。



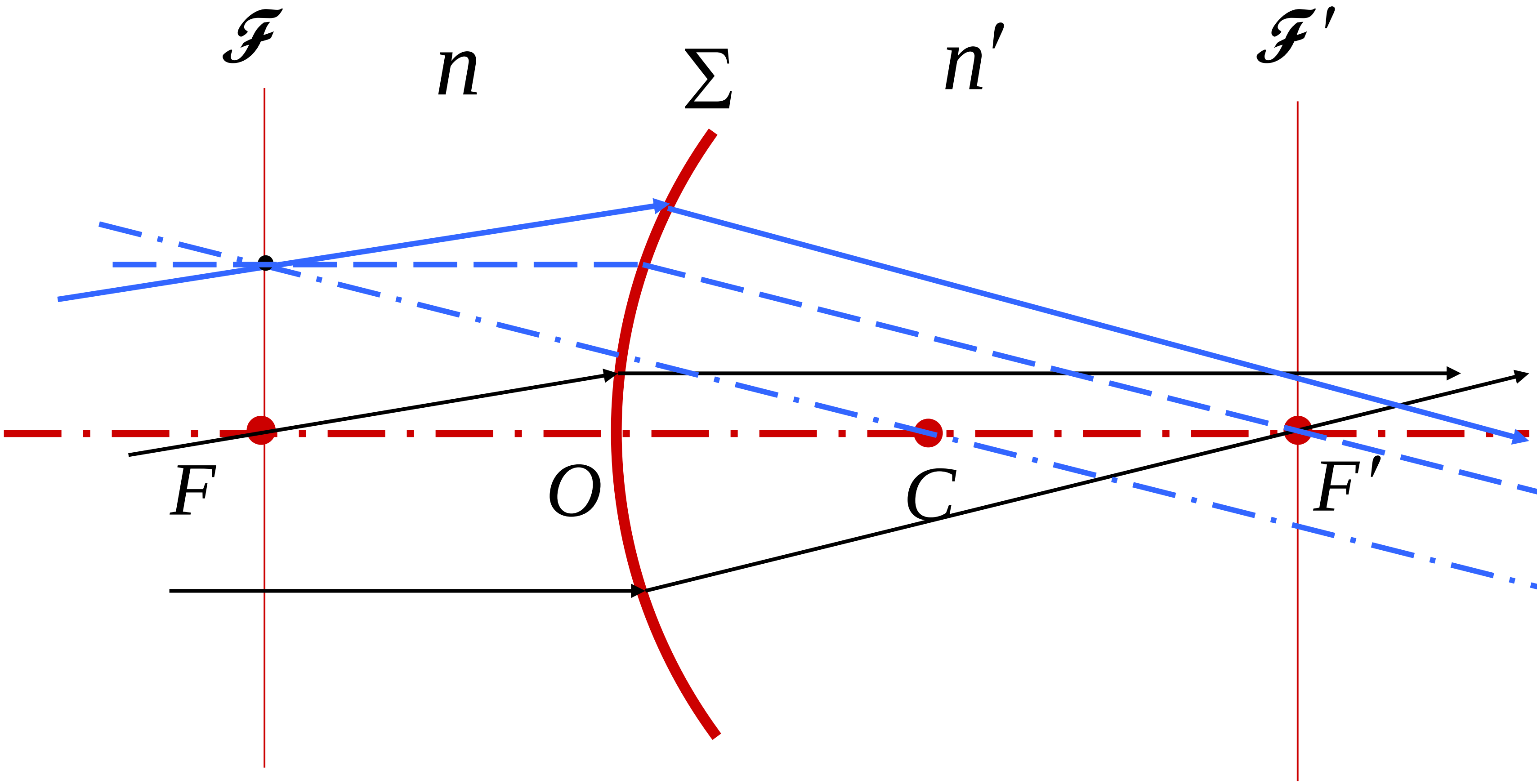
- 在傍轴条件下，上述像方焦点可以看作是处于一个平面上，这就是折射球面的**像方焦平面**
- 即：相互平行的入射光线都汇聚于像方焦平面上的同一点。
- 同样，可以得到并定义**物方焦平面**，从该平面上一点发出的所有光线，经折射后，在像方为相互平行的光线



折射球面的光学参数

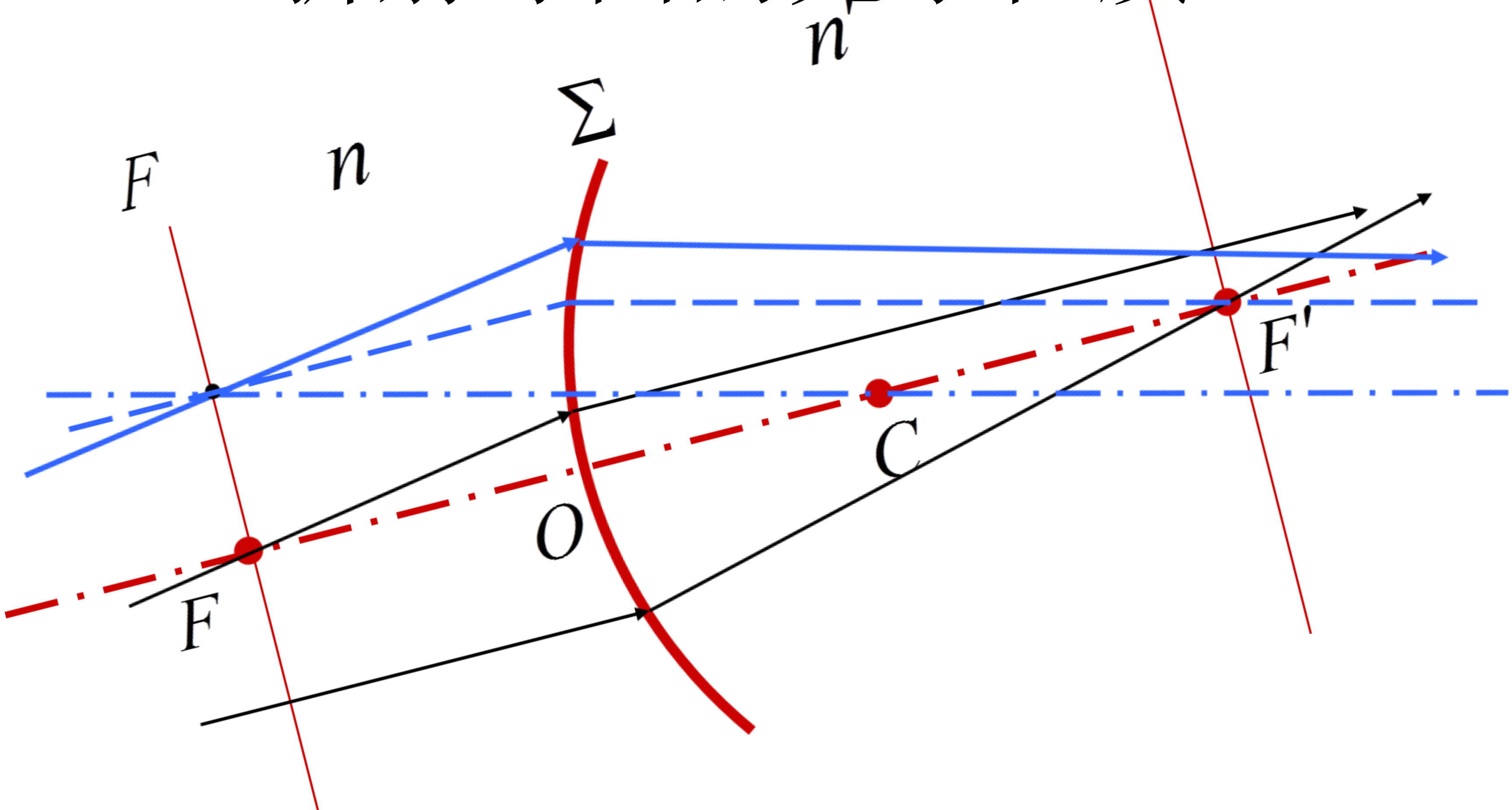


折射球面的光学性质



根据这些光学参数，可以得到任意一条光线的折射光线

折射球面的光学性质

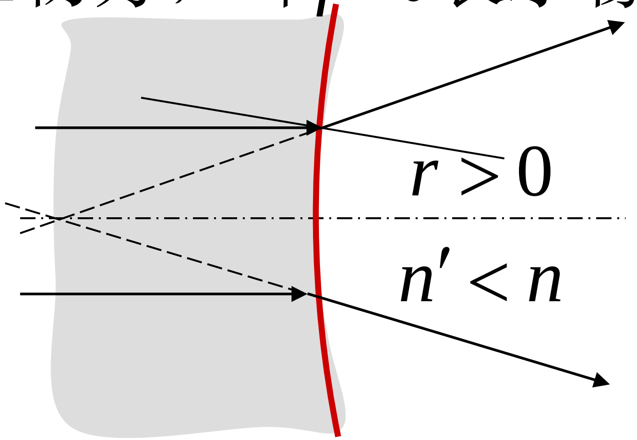


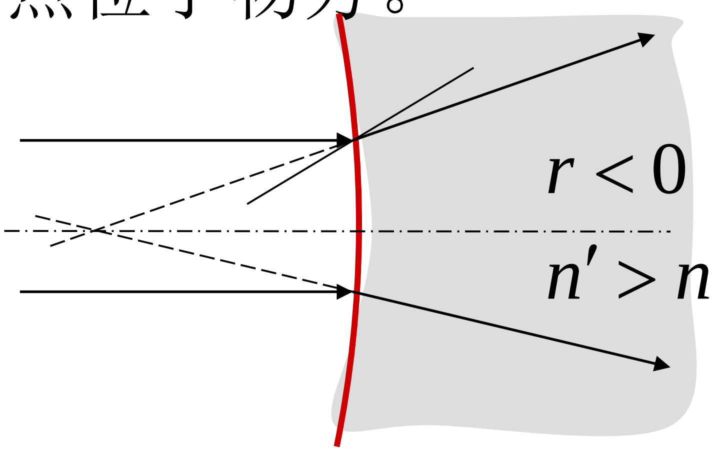
根据这些光学参数，可以得到任意一条光线的折射光线

光焦度与焦距的讨论

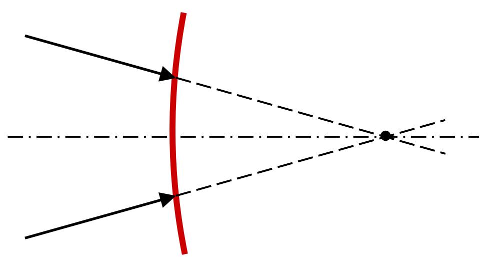
$$\Phi = \frac{n'-n}{r} \qquad f = \frac{nr}{n'-n} \qquad f' = \frac{n'r}{n'-n}$$

- 显然，上述三个物理量既可以是正值，也可以是负值。
- 若$r>0$，$n'<n$，f，$f'<0$；
- 若$r<0$，$n'>n$，f， $f'<0$。
- 平行光入射，折射光发散。反向延长后，会聚点在物方，即$f'<0$表示像方焦点位于物方。

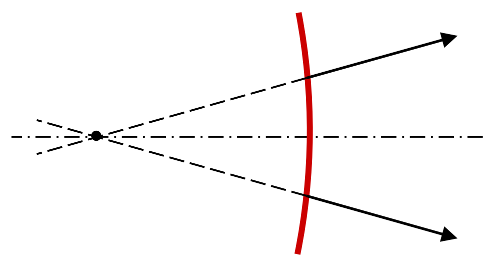




- 由于物、像间的共轭关系，f<0表示物方焦点位于像方。
- 焦距为负值，表示像方焦点实际上在物方，物方焦点实际上在像方。
- 由于焦距也是像距或物距，所以，如果物点位于像方（虚物），则其物距为负值；像点在物方（虚像），则其像距为负值。



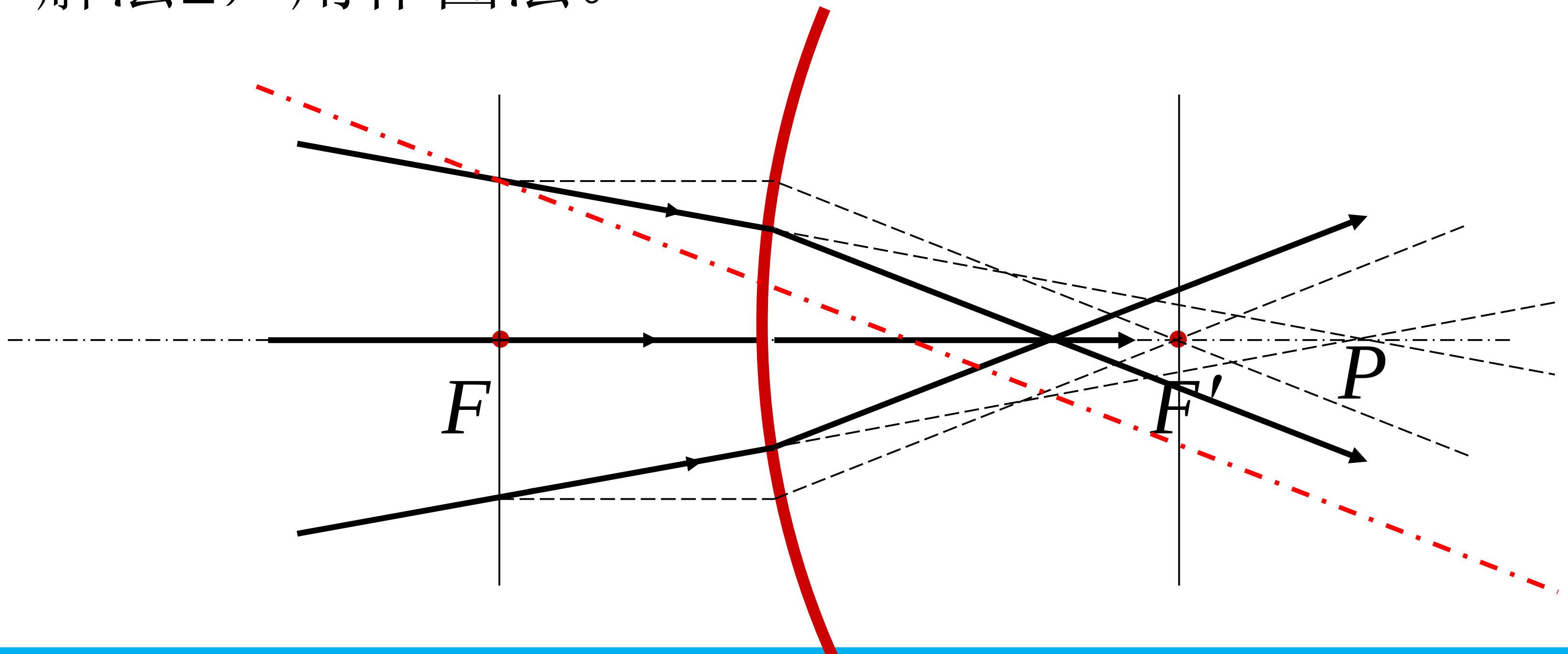
虚物，物距为负值



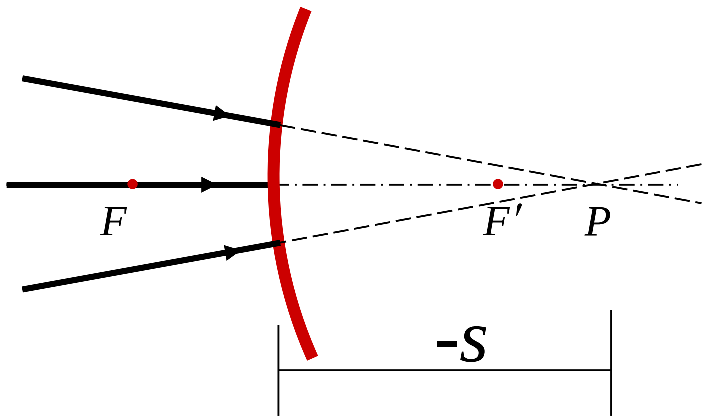
虚像，像距为负值

例题

- 一束汇聚光射向球面，如果将入射光线延长，则汇聚在P点处，求这束光经球面折射后实际的汇聚点。
- 解法1，用作图法。



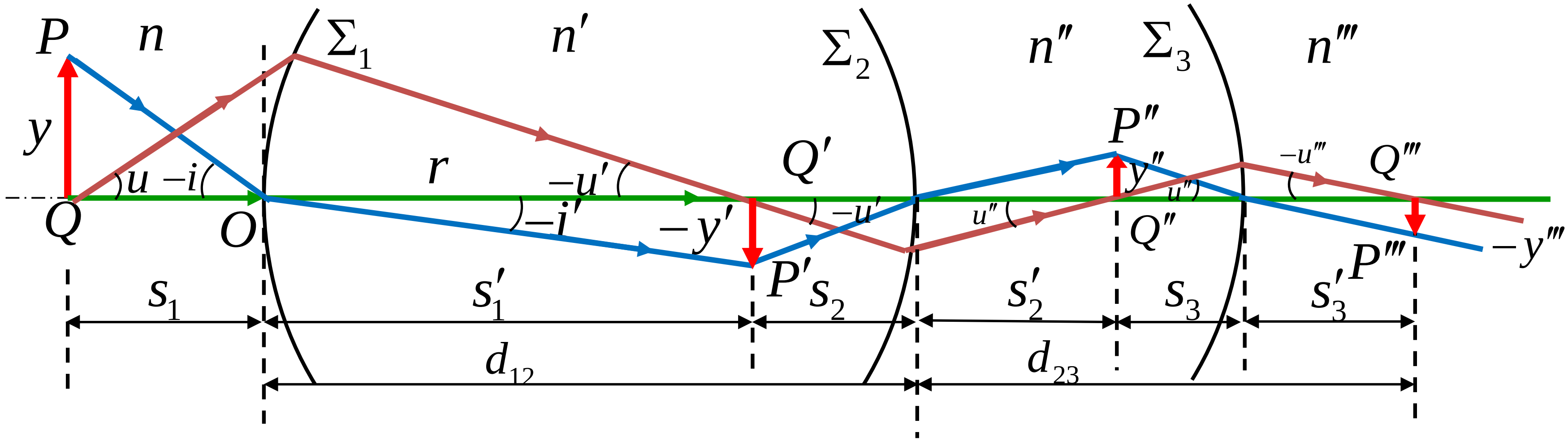
- 解法二，用计算法
- 将物距以P点到球面的距离的负值带入即可



$$\frac{f'}{s'}+\frac{f}{s}=1 \qquad s'=\frac{f'}{1-\dfrac{f}{s}}$$

5.4 共轴球面组的逐次成像

共轴球面组的要求：球心共线，且主光轴重合。



共轴球面光具组的逐次成像：

前一球面光具组的出射光束（像），作为后一球面光具组的入射光线（物）

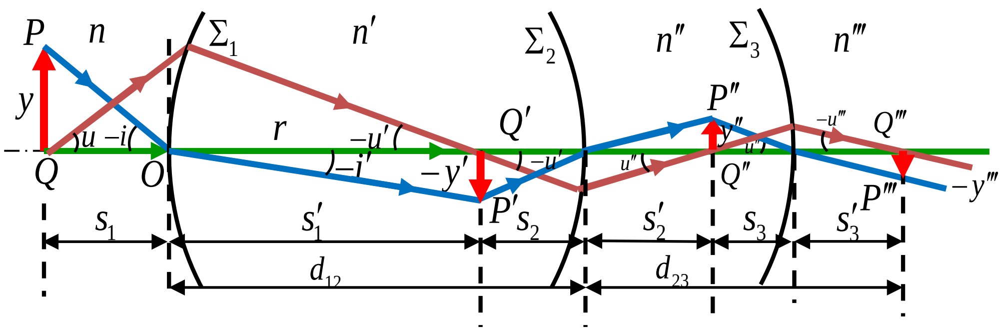
物像关系： $S_{i+1}=d_{i,i+1}-S'_i \qquad y_{i+1}=y'_i$

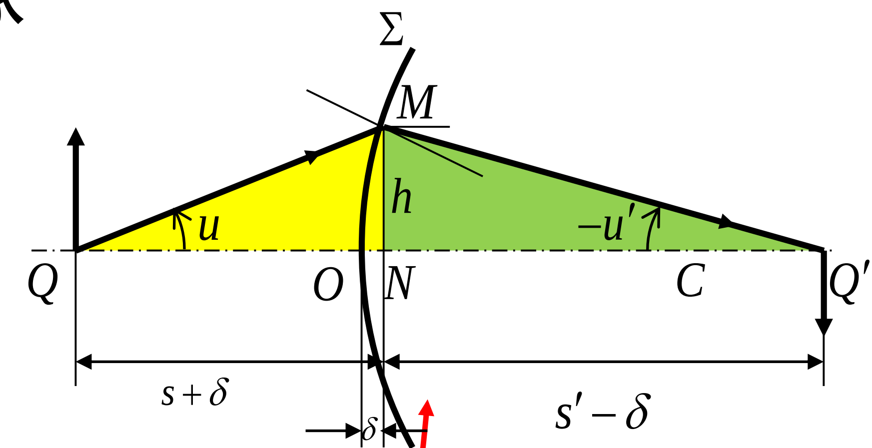
物像距公式： $\dfrac{n'}{s'_1}+\dfrac{n}{s_1}=\dfrac{n'-n}{r_1},\qquad \dfrac{n''}{s'_2}+\dfrac{n'}{s_2}=\dfrac{n''-n'}{r_2},\qquad \cdots$

横向放大率公式： $V=\dfrac{y'_n}{y_1}=\dfrac{y'_n}{y'_{n-1}}\times\dfrac{y'_n}{y'_{n-1}}\times\cdots\times\dfrac{y'_1}{y_1}=V_{n-1}\times V_{n-2}\times\cdots V_1$

5.4 共轴球面组的逐次成像

拉格朗日—亥姆霍兹定理





角放大率：折射光线（出射光线）和主光轴夹角u'的正切与对应共轭入射光线和主光轴夹角u的正切之比，用W表示。即 $W=\dfrac{\tan u'}{\tan u}$

$$W=\frac{\tan u'}{\tan u}\approx\frac{u'}{u}=\frac{-h/(s'-\delta)}{h/(s+\delta)}\approx-\frac{s}{s'}$$

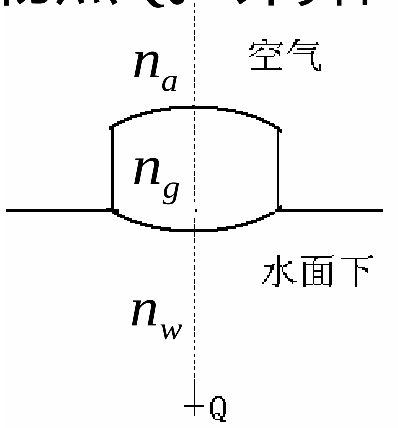
带入 $V\equiv\dfrac{y'}{y}=-\dfrac{ns'}{n's}$ 得到Lagrange-Helmhotz恒等式 $ynu=y'n'u'$

Lagrange-Helmhotz恒等式的意义：给出了物方物理量和像方物理量之间独立于过程之外的的恒定关系。

5.4 共轴球面组的逐次成像

例题

1、一个等曲率双凸透镜，放在水面上。球面半径为3cm，中心厚度2cm，玻璃和水的折射率分别为1.50和1.33。透镜下4cm处物点Q。计算两曲面的光焦度，并计算Q点像的位置。



$$\Phi_1=\frac{n_g-n_w}{r_1}=\frac{1.50-1.33}{0.03}=5.67\mathrm{m}^{-1}$$

$$\Phi_2=\frac{n_a-n_g}{r_2}=\frac{1.00-1.50}{-0.03}=16.67\mathrm{m}^{-1}$$

Q第一次成像 $\quad \dfrac{n_g}{s_1}+\dfrac{n_w}{s}=\Phi_1$

$$s_1=\frac{n_g}{\Phi_1-\dfrac{n_w}{s}}=\frac{1.50}{5.67-\dfrac{1.33}{0.04}}=-0.054\mathrm{m}$$

第二次成像，物距 s_2=0.02+0.054=0.074m

$$\frac{n_a}{s'}+\frac{n_g}{s_2}=\Phi_2$$

$$s'=\frac{n_a}{\Phi_2-\dfrac{n_g}{s_2}}=\frac{1.00}{16.67-\dfrac{1.50}{0.074}}=-0.28\mathrm{m}$$

在前镜面下28cm处

作业

P55：-2,4,6,8,9,11,12

重排版 P38-2,4,6,8,9,11,12,

补充题目

1、一个等曲率双凸透镜，放在水面上。球面半径为3cm，中心厚度2.5cm，玻璃和水的折射率分别为1.60和1.33。透镜上4cm处物点Q。计算两曲面的光焦度，并计算Q点像的位置。