第四章 光的衍射

第二节
费涅耳圆孔衍射和圆屏衍射

第二节 菲涅耳圆孔衍射和圆屏衍射

2.1 实验现象

2.2 半波带法

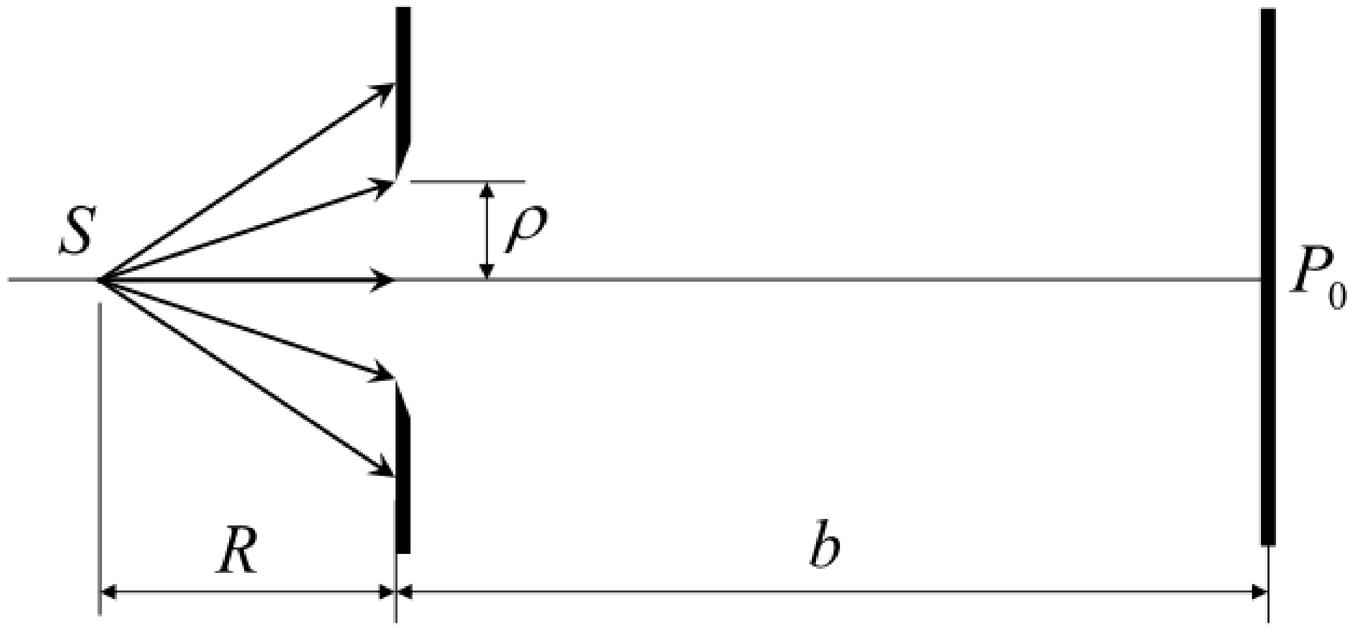
2.3 矢量图解法和菲涅耳积分

2.4 菲涅耳波带片

2.1 实验现象

一般参数：

圆孔半径：ρ~1mm
源屏距离：R~1m
屏屏距离：b~3-5m



2.1 实验现象

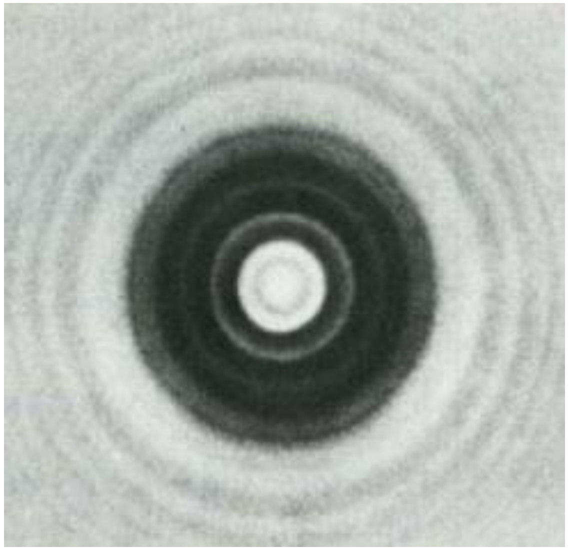
现象：

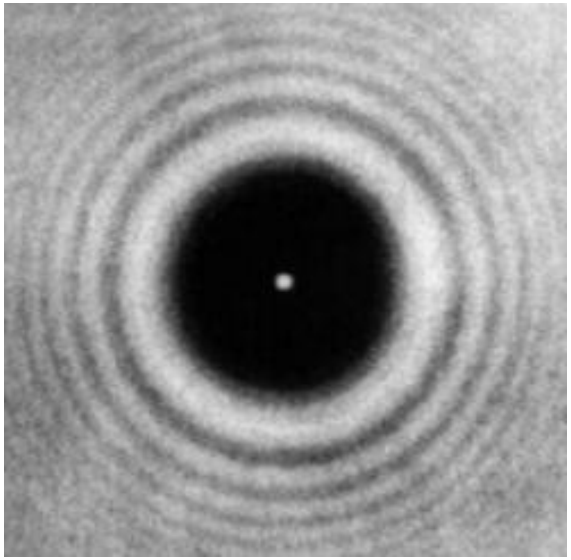
i）圆孔衍射

一套亮暗相间的同心圆环，中心可亮可暗，由 ρ、R、b 的具体参数决定。接收屏沿轴向移动，圆环中心明暗交替变化。

ii）圆屏衍射

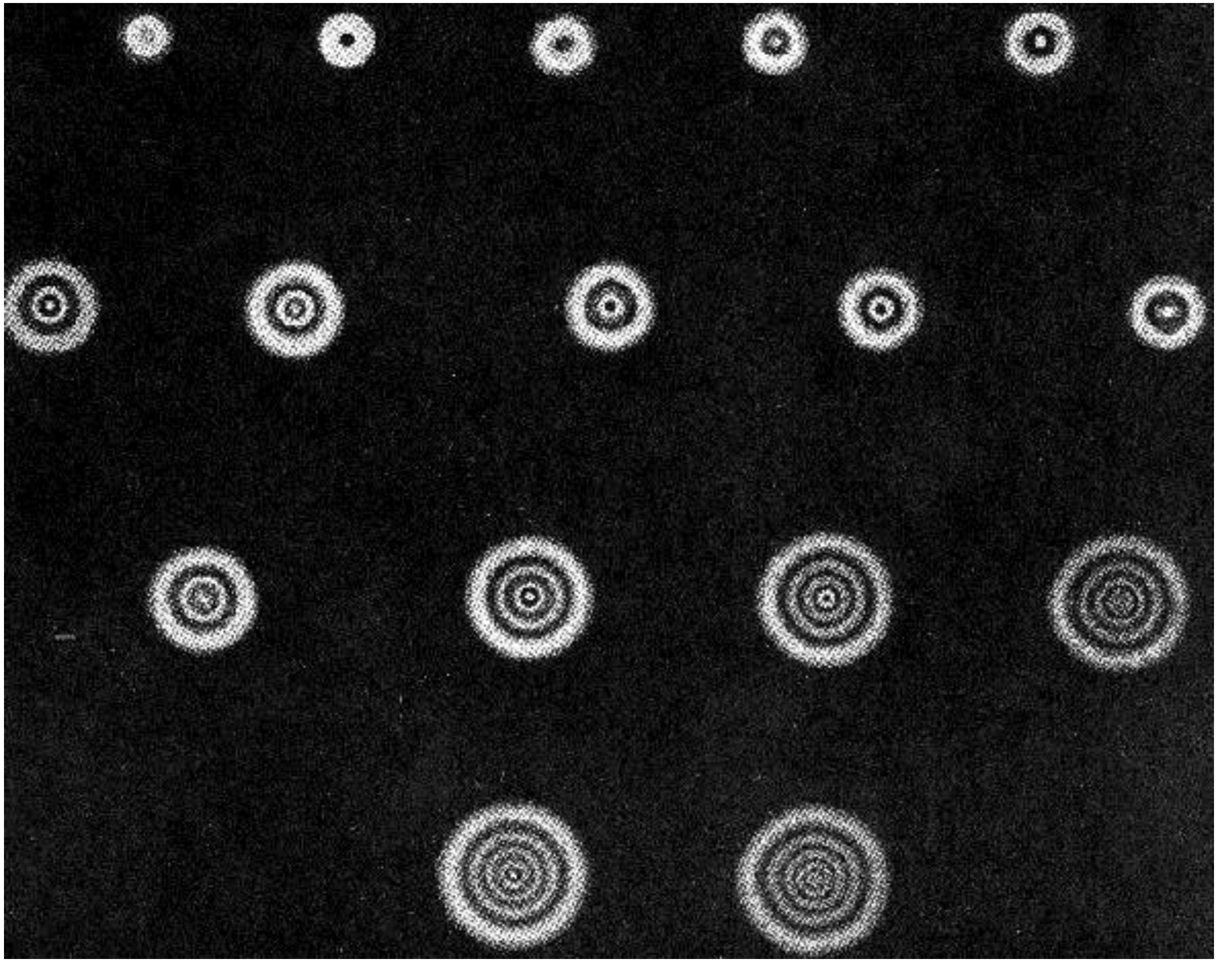
基本同圆孔，但中心总是亮点





2.1 实验现象

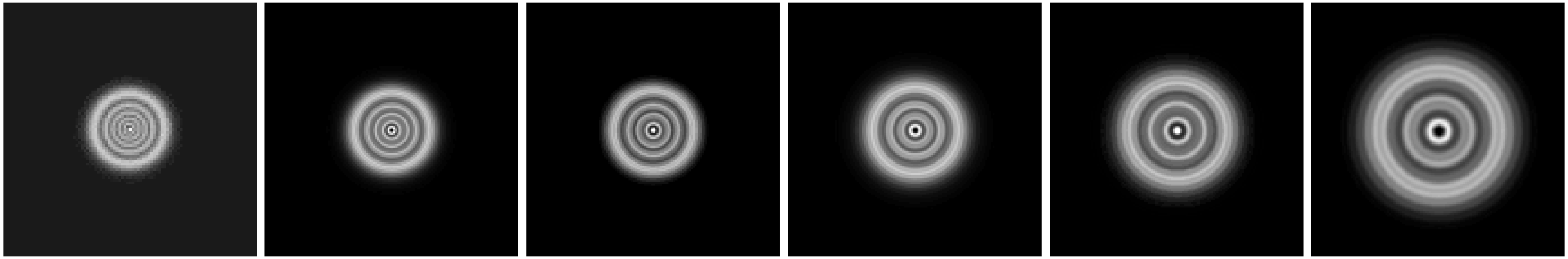
圆孔的菲涅耳衍射图样：



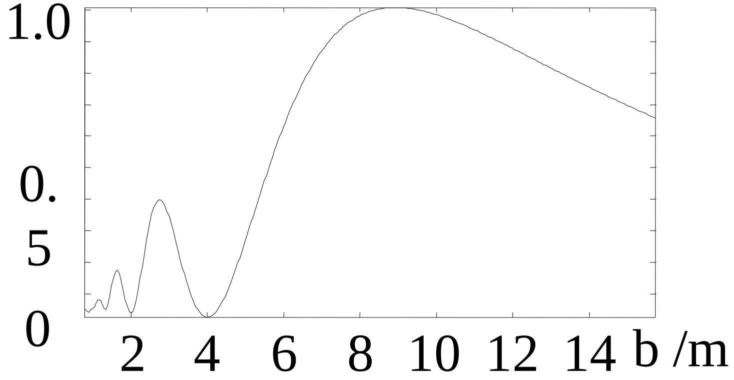
圆孔依次增大时的衍射图样

2.1 实验现象

圆孔的菲涅耳衍射图样：



(a) b=1.14m (b) b=1.35m (c) b=1.60m (d) b=2.00m (e) b=2.70m (f) b=4.00m

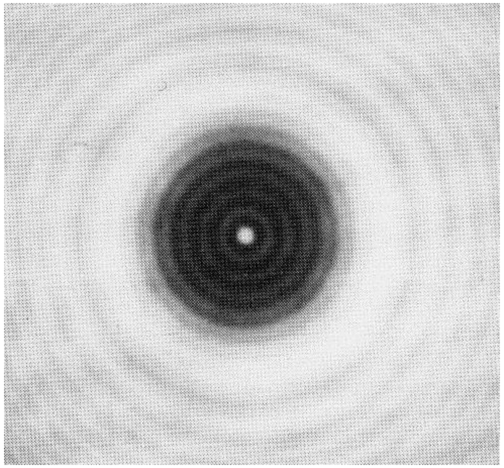


衍射图样中心的相对强度

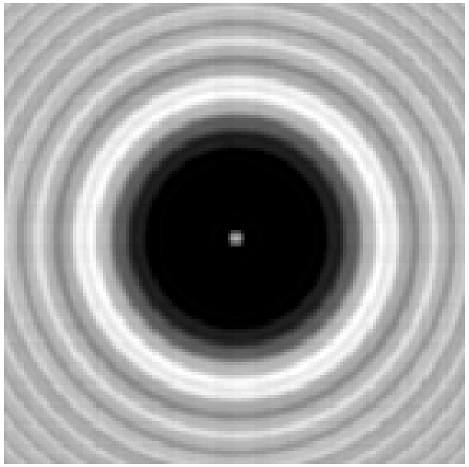
圆孔的菲涅耳衍射仿真图样（不同观察平面上，b: 观察平面到衍射屏平面的距离）

2.1 实验现象

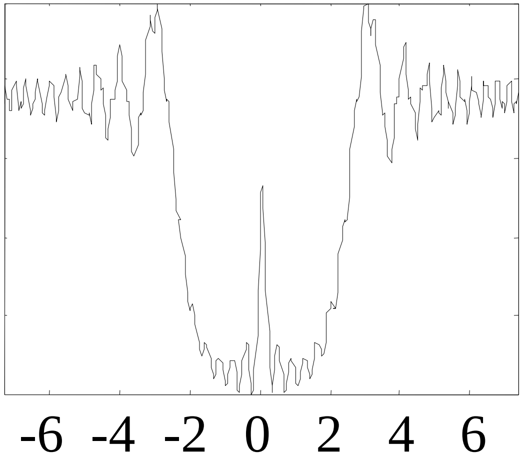
圆盘的菲涅耳衍射图样：



(a) 实验图样



(b) 仿真图样



(c) 相对强度分布

圆盘的菲涅耳衍射

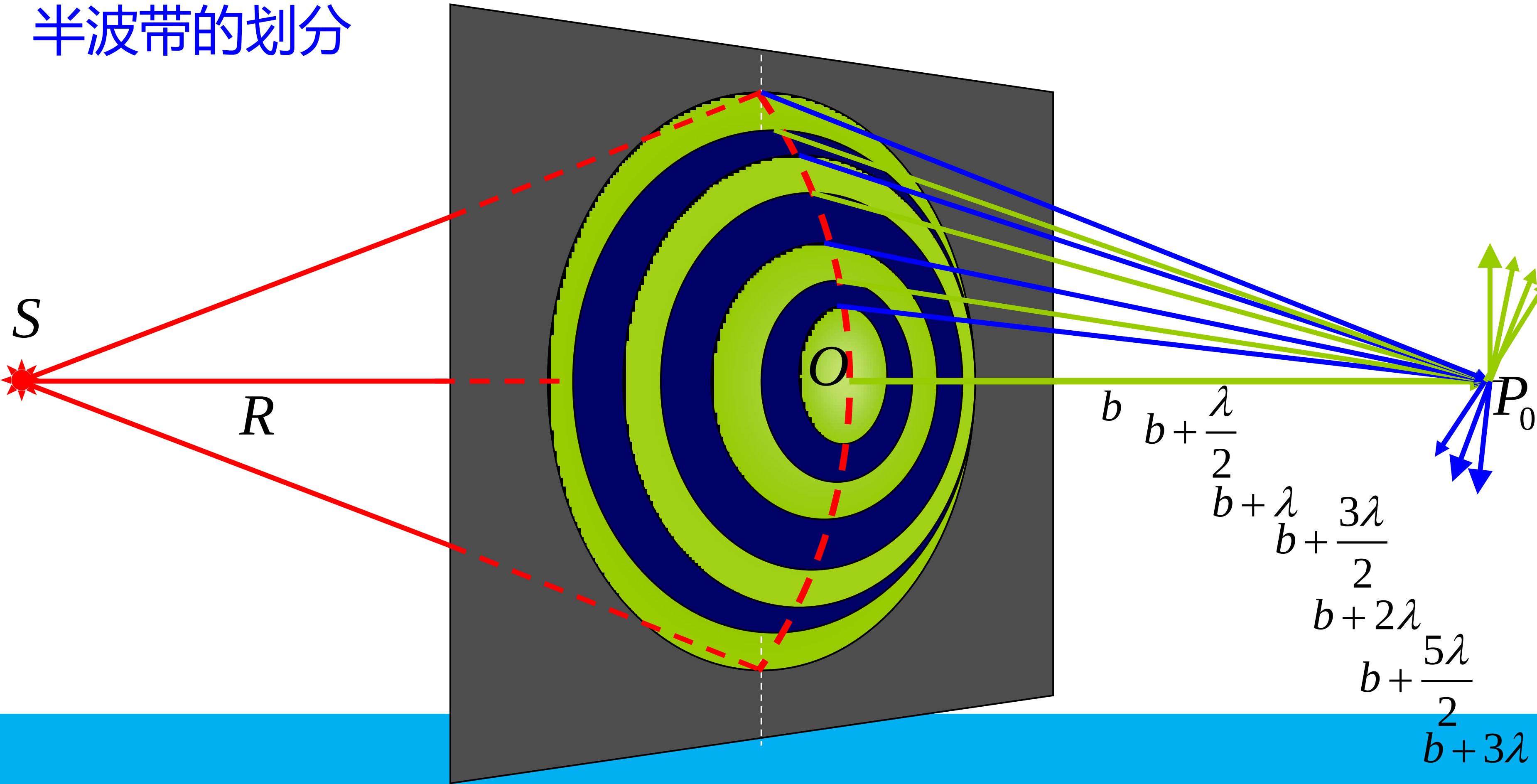
2.2 半波带法

目标：设法求解菲涅耳—基尔霍夫衍射积分公式。

思路：将积分近似化为求和。

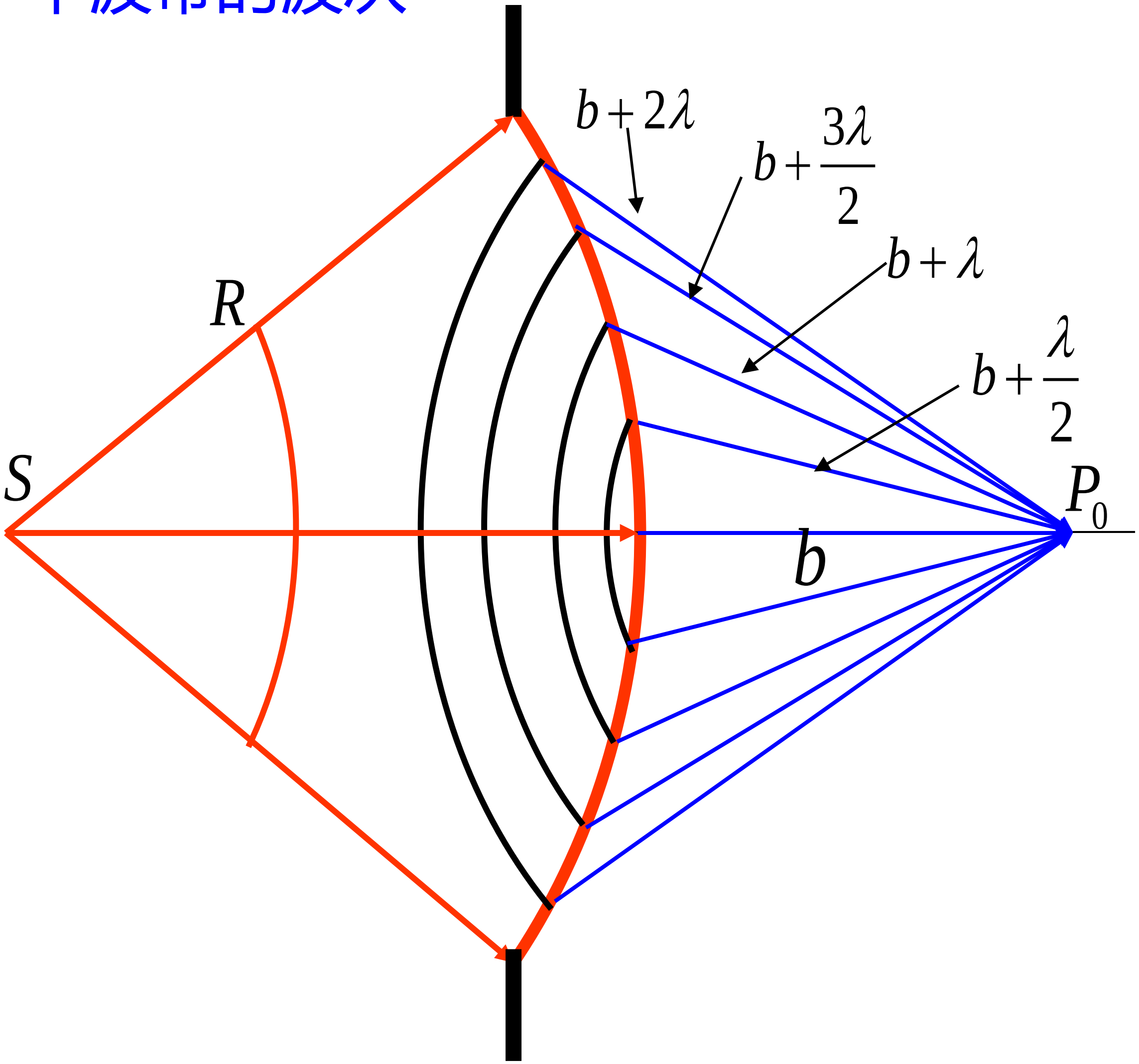
做法：将波前（球面）划分为一系列的同心圆环带，每一带的边缘到 P_0 点的距离依次相差半个波长。这些圆环带称为半波带。

半波带的划分



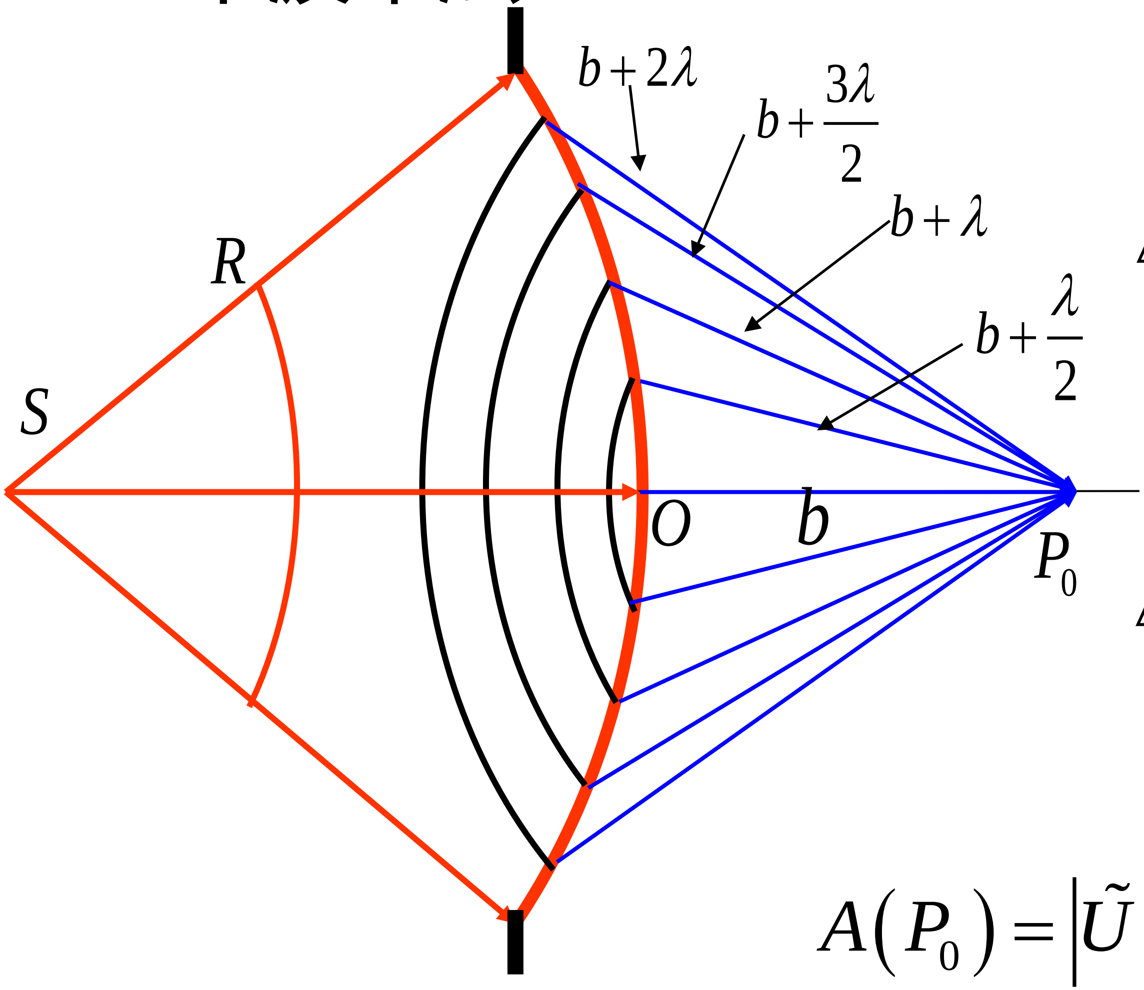
2.2 半波带法

半波带的波次



- 在球面上，各次波波源的初相位相等。相邻半波带发出的次波，到达P_0点时，光程差为λ/2，相位差为π，相位相反，振动方向相反，且振幅依次减小
- 复振幅叠加的效果：相互抵消

2.2 半波带法



$$\Delta\tilde{U}_1(P_0)=A_1(P_0)e^{i\varphi_1}$$

$$\Delta\tilde{U}_2(P_0)=A_2(P_0)e^{i(\varphi_1+\pi)}$$

$$\Delta\tilde{U}_3(P_0)=A_3(P_0)e^{i(\varphi_1+2\pi)}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

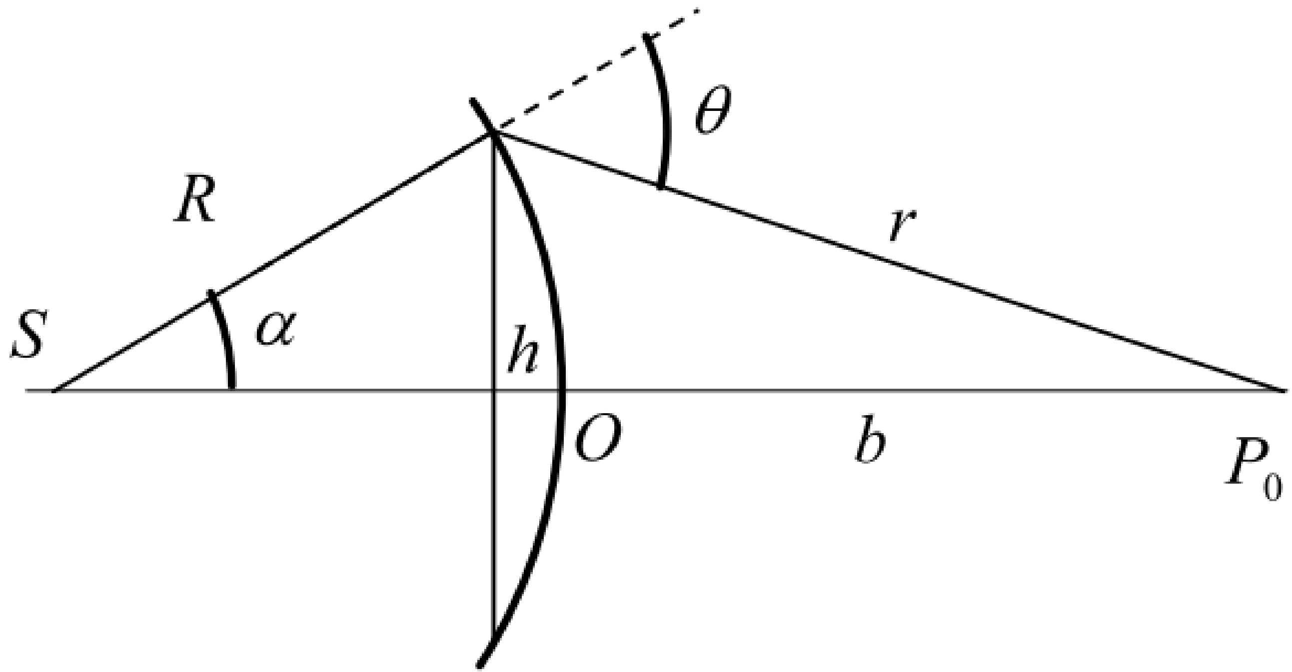
$$A(P_0)=\left|\tilde{U}(P_0)\right|=\left|\sum_{j=1}^{n}\Delta\tilde{U}_j(P_0)\right|$$

$$=A_1(P_0)-A_2(P_0)+A_3(P_0)-\cdots+(-1)^{n+1}A_n(P_0)$$

2.2 半波带法

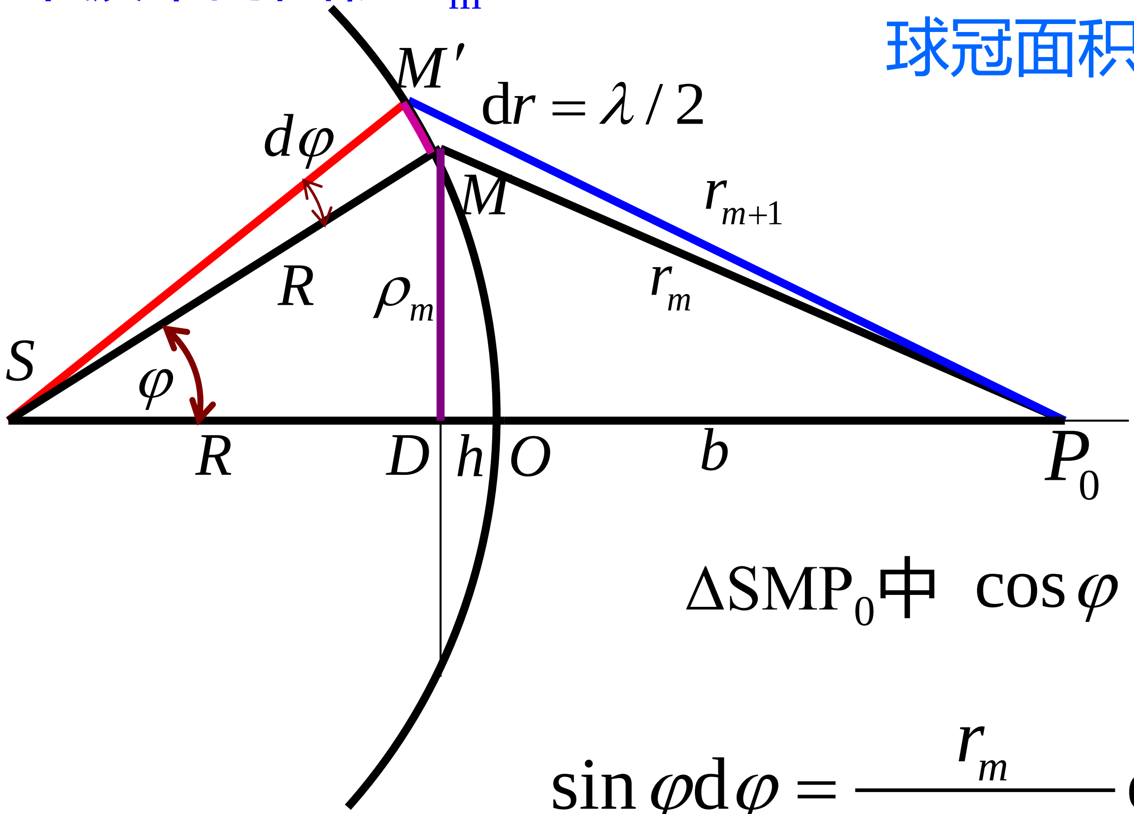
半波带复振幅和半波带面积的关系

$$A_k \propto F\left(0,\theta_k\right)\frac{\Delta\Sigma_k}{r_k}$$



2.2 半波带法

半波带的面积 S_m



球冠面积

$$S = 2\pi Rh$$

$$= 2\pi R^2(1-\cos\varphi)$$

$$\mathrm{d}S = 2\pi R^2 \sin\varphi \mathrm{d}\varphi$$

$\Delta \mathrm{SMP_0}$中 $\cos\varphi = \dfrac{R^2+(R+b)^2-r_m{}^2}{2R(R+b)}$

$$\sin\varphi \mathrm{d}\varphi = \frac{r_m}{R(R+b)}\mathrm{d}r_m \qquad \mathrm{d}S = \frac{2\pi R r_m}{R+b}\mathrm{d}r_m$$

$$\mathrm{d}r_m = \lambda/2 \qquad \mathrm{d}S = S_m$$

第 m 个半波带的面积 $\dfrac{S_m}{r_m} = \dfrac{\Delta\Sigma_m}{r_m} = \dfrac{\pi R}{R+b}\lambda$

2.2 半波带法

以半波带法求解菲涅耳衍射积分

$$\tilde{U}(P_0)=K\iint_{\Sigma}\tilde{U}(Q)F(\theta_0,\theta)\frac{e^{ikr}}{r}d\Sigma$$

$$\frac{\Delta\Sigma_m}{r_m}=\frac{\pi R}{R+r_0}\lambda$$

$$=K\sum_{m=1}^{n}\tilde{U}(Q)F(0,\theta_m)e^{ikr_m}\frac{\Delta\Sigma_m}{r_m}$$

常数

$$=K\tilde{U}\frac{\Delta\Sigma_m}{r_m}\sum_{m=1}^{n}F(0,\theta_m)e^{i[\varphi_0+(m-1)\pi]}$$

$$=K\tilde{U}e^{i\varphi_0}\frac{\Delta\Sigma_m}{r_m}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{2}(1+\cos\theta_m)e^{i(m-1)\pi}$$

$$=\tilde{A}\sum_{m=1}^{n}(-1)^{m-1}(1+\cos\theta_m)$$

$$(\tilde{A}=\frac{K\tilde{U}e^{i\varphi_0}}{2}\frac{\Delta\Sigma_m}{r_m})$$

2.2 半波带法

以半波带法求解菲涅耳衍射积分

$$\tilde{U}(P_0) = \tilde{A}\sum_{m=1}^{n}(-1)^{m-1}(1+\cos\theta_m) = \sum_{m=1}^{n}\tilde{U}_m = \sum_{m=1}^{n}A_m(-1)^{m-1}$$

$$\tilde{U}_m = \tilde{A}(1+\cos\theta_m)(-1)^{m-1}$$

为第m个半波带发出的次波在P点的复振幅

$$A_m = |\tilde{A}|(1+\cos\theta_m)$$

取孔中心次波相位为0，A_m为第m个半波带发出的次波在P_0点的振幅。

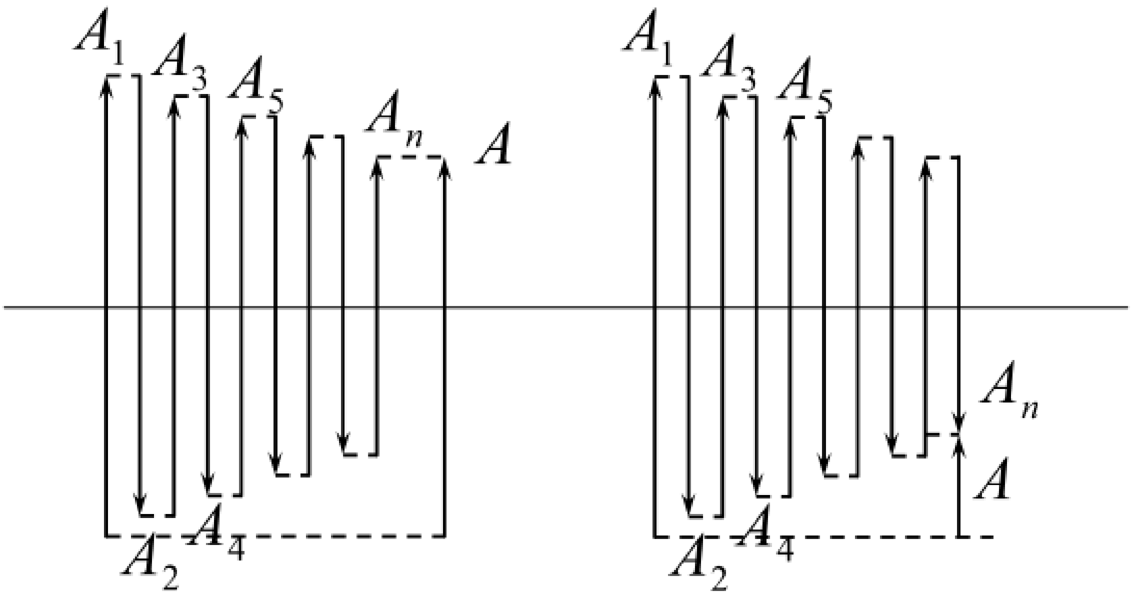
可见，在P_0点处：（1）相邻波带次波的位相相反；（2）m越大的波带，振幅越小。

$$A_{n-1} > A_n > A_{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

2.2 半波带法

以半波带法求解菲涅耳衍射积分

$$\tilde{U}(P_0)=\sum_{m=1}^{n}(-1)^{m-1}A_m=\frac{1}{2}A_1+(\frac{1}{2}A_1-A_2+\frac{1}{2}A_3)+(\frac{1}{2}A_3-A_4+\frac{1}{2}A_5)+\cdots$$



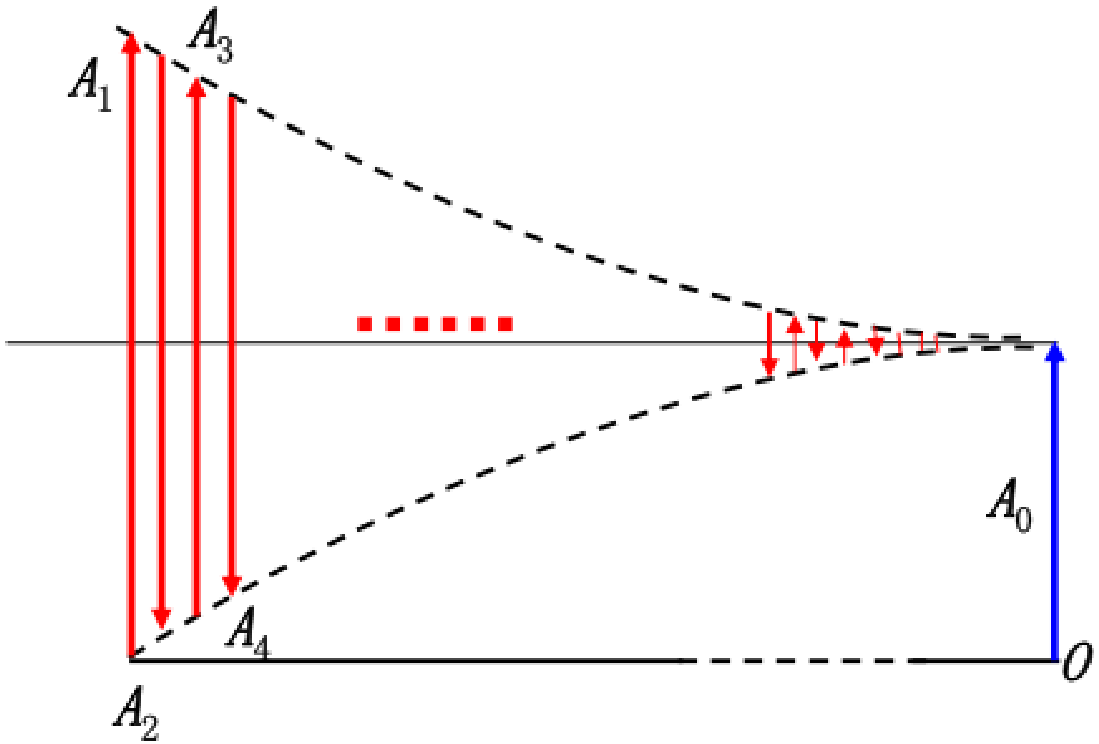
由于由于相邻两半波带之间的振幅相互抵消（n 较大时）：

$\tilde{U}(P_0)=\frac{1}{2}[A_1+(-1)^{n-1}A_n]$　　波带数n：奇数，亮点；偶数，暗点

2.2 半波带法

以半波带法求解菲涅耳衍射积分

(1) 自由传播 $\begin{matrix} n \to \infty \\ A_n \to 0 \end{matrix} \Rightarrow A(P_0) = \dfrac{1}{2} A_1(P_0)$ 始终亮点



2.2 半波带法

以半波带法求解菲涅耳衍射积分

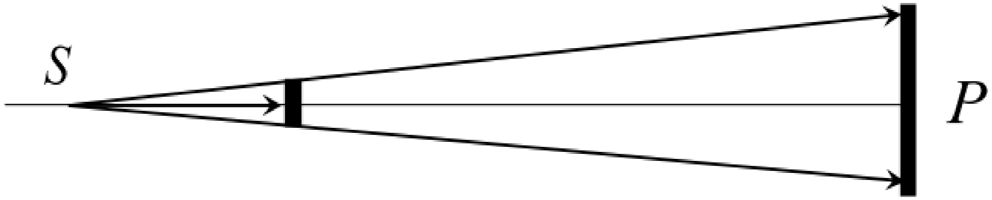
(2) 圆屏衍射　　　前n个半波带被遮住

$$A(P_0)=\sum_{n+1}^{\infty}A_j=\frac{1}{2}A_{n+1}(P_0)$$

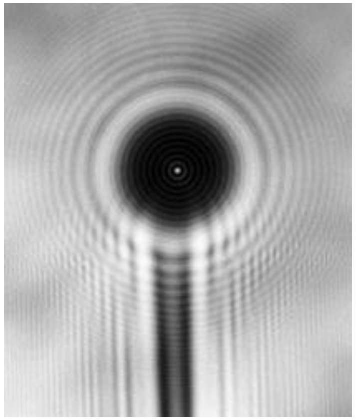
中心总是亮点。

2.2 半波带法

惠更斯-费涅耳原理1818巴黎科学院的一次科学竞赛中提出，倾向微粒说的评委泊松据此算出圆屏衍射的中心竟会是一亮斑（泊松亮斑），觉得十分荒谬，影子中间怎么会出现亮斑呢？但随后阿拉果的实验观察到了圆屏衍射的中心亮斑，位置亮度和理论符合得相当完美。



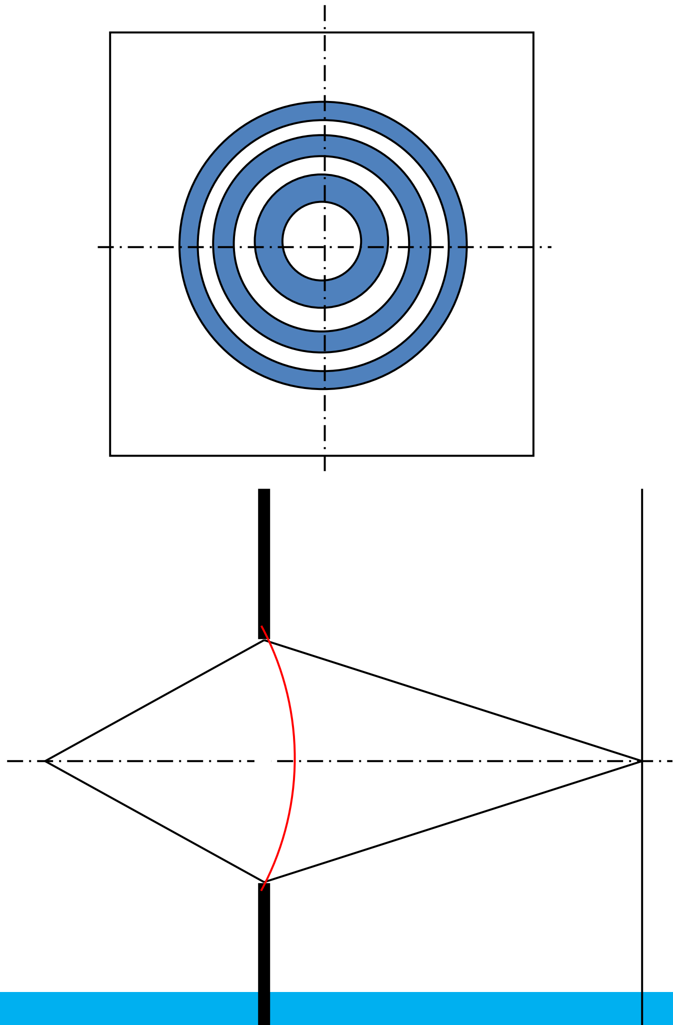
泊松

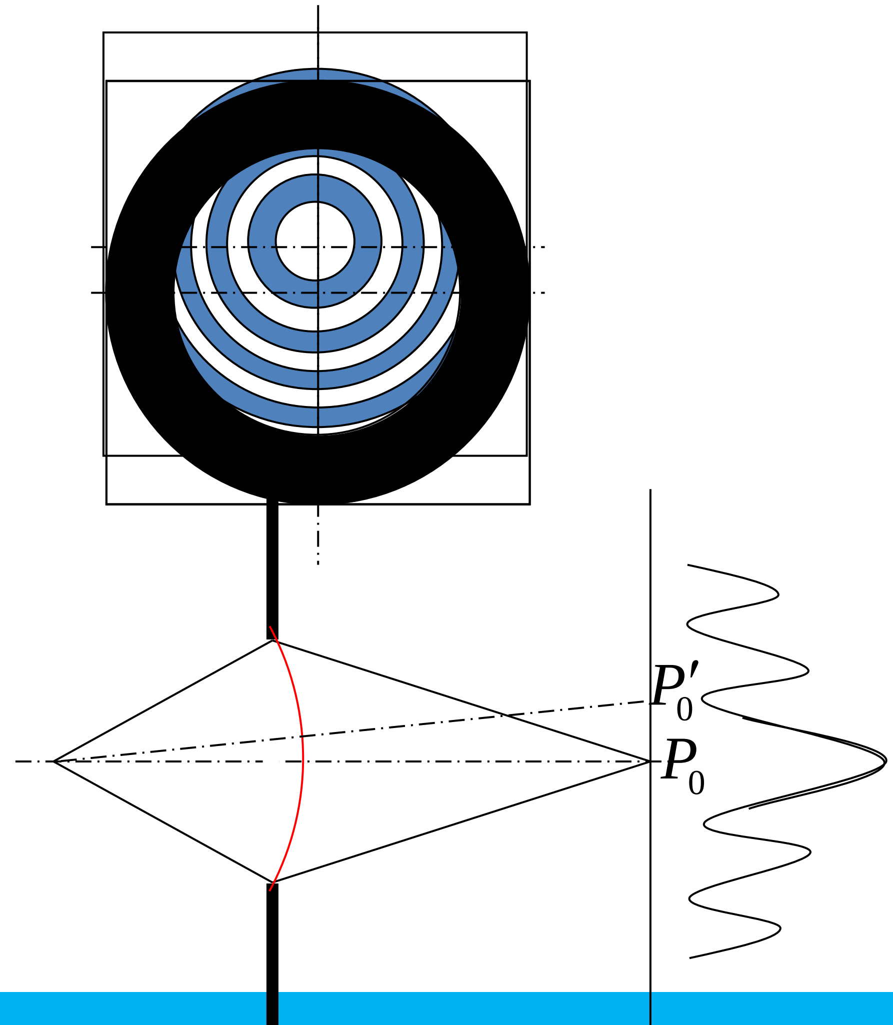


Francois Arago

2.2 半波带法

轴外情况下的圆孔衍射花样：





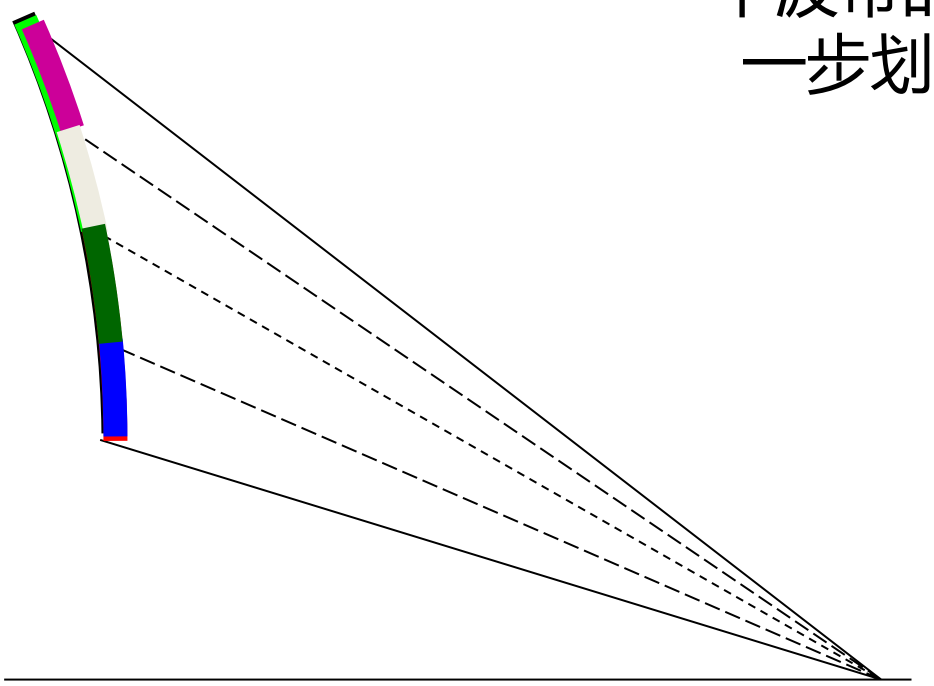
2.3 矢量图解法和菲涅耳积分

半波带的进一步细分——一般情况下的波带

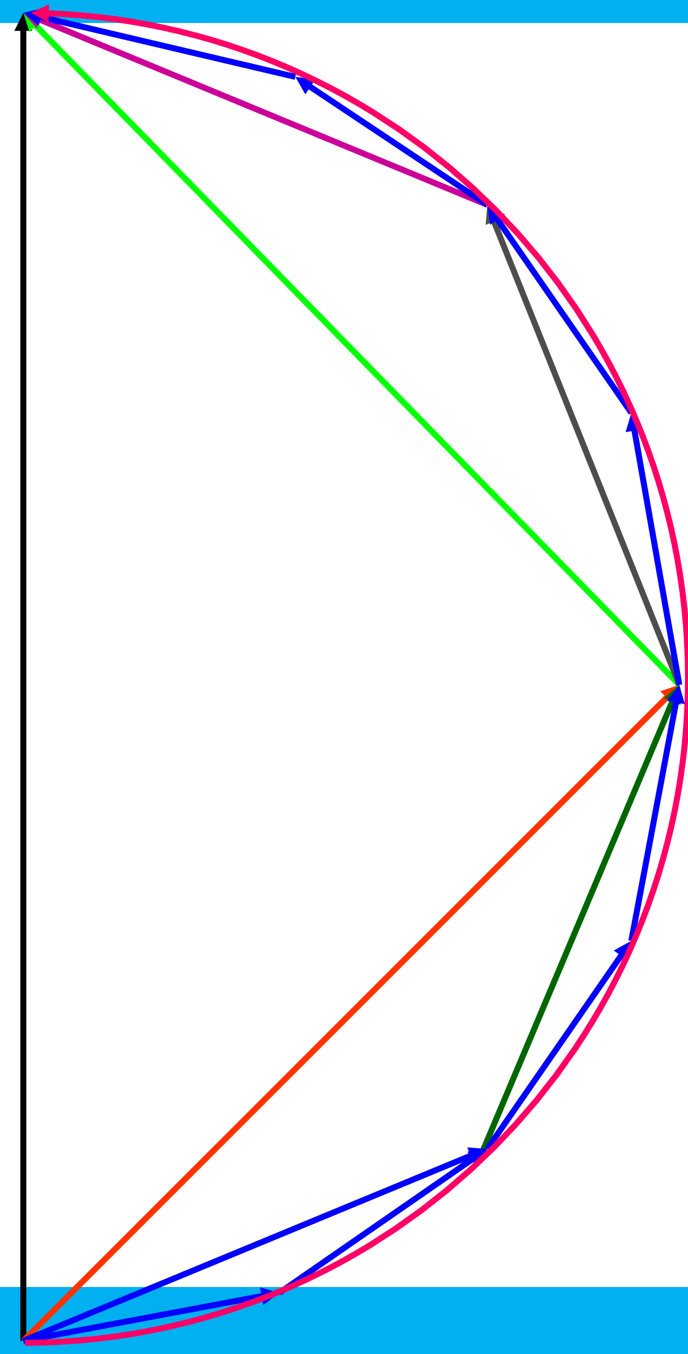
- 两分：将每一个半波带划分为两个，则相邻波带发出的次波在P点位相差为$\pi/2$，即第一个半波带中的第一个波带和第二个波带的位相分别为$\pi/4$和$3\pi/4$；
- 四分：再将每一个进一步细分，第一个半波带中的四个波带的位相差为$\pi/4$，位相依此为$\pi/16$，$5\pi/16$，$9\pi/16$，$13\pi/16$，……。
- 无限分：可以将任何一个半波带进一步细分为n个，得到更多的波带，相邻波带间光程差为$\lambda/2n$，位相差为π/n。n很大时，位相差很小，用振幅矢量法，原来的每个半波带的波矢变为由n个小波矢组成的半圆。

2.3 矢量图解法和菲涅耳积分

半波带的进一步细分——一般情况下的波带



半波带的进一步划分

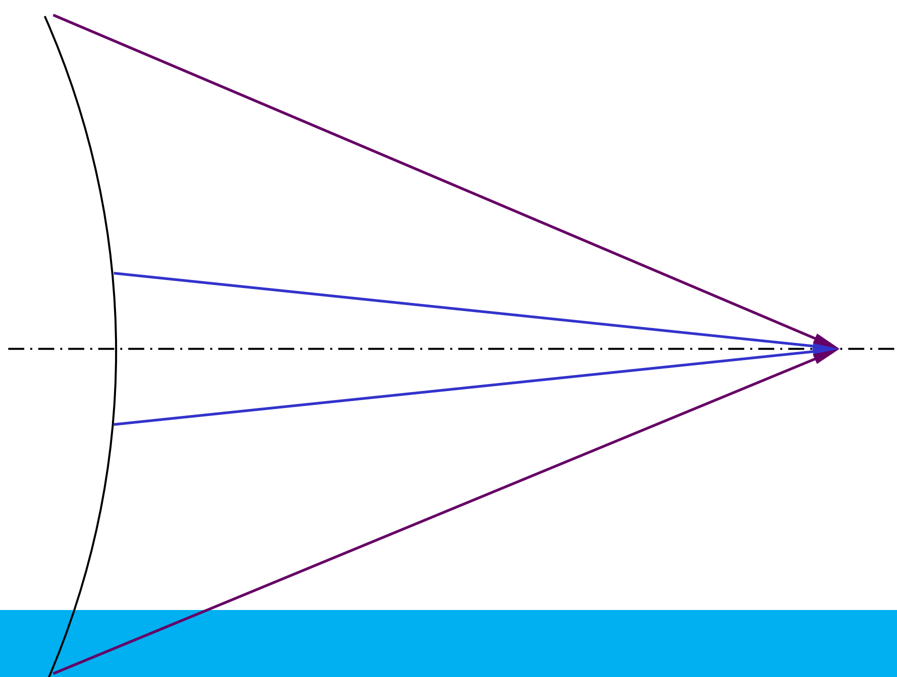


2.3 矢量图解法和菲涅耳积分

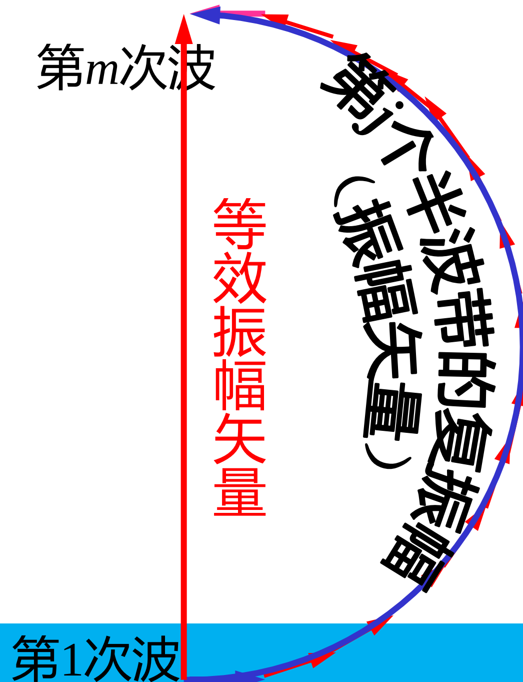
每个菲涅耳半波带的振幅矢量

使每个半波带发出的所有**次波**的振幅矢量进行相干叠加

- 将每一半波带m**等分**，相邻次波相位差π/m
- 满足傍轴条件（各列次波的倾斜因子相近），各次波振幅近似相等
- 进一步再处理各个半波带复振幅的相干叠加

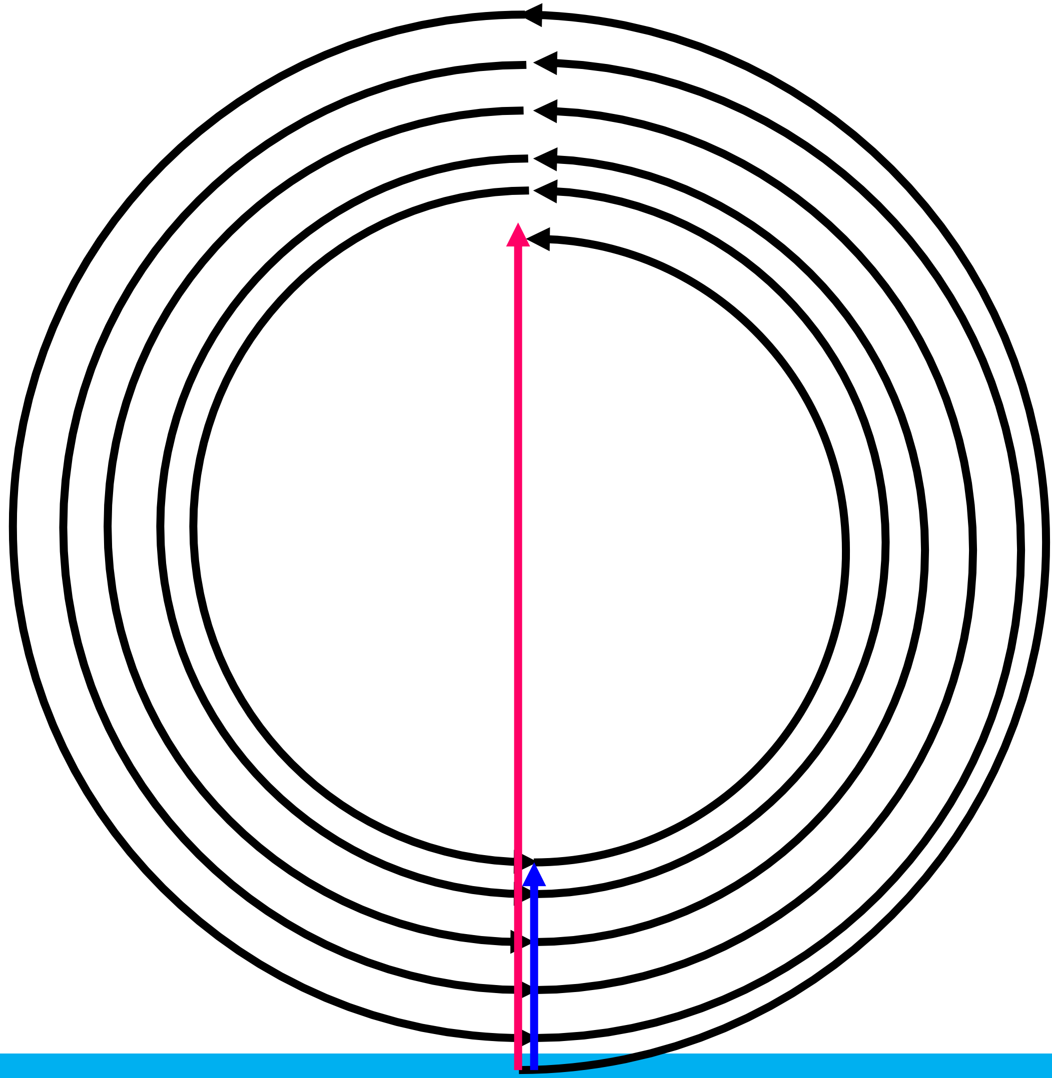


半波带无限细分



2.3 矢量图解法和菲涅耳积分

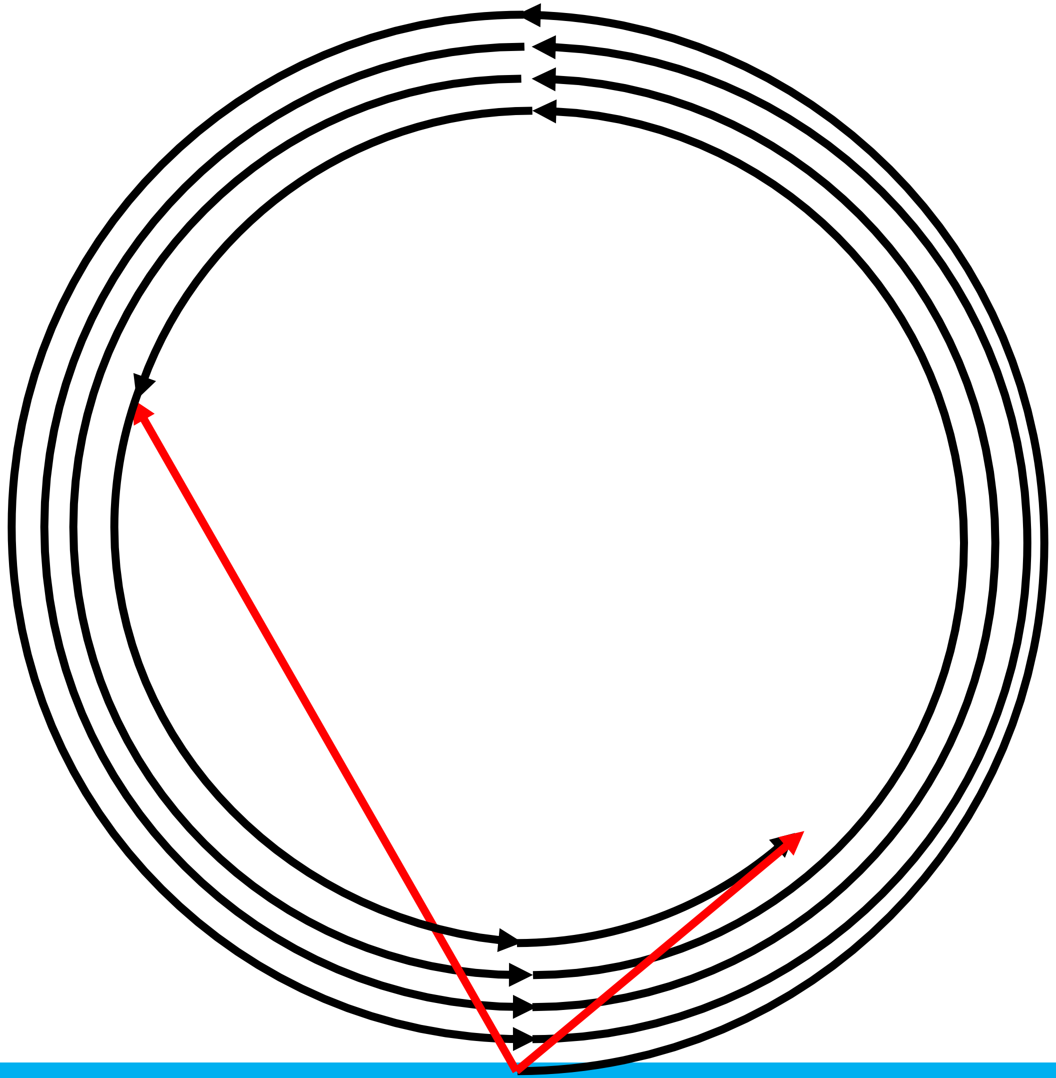
半波带的弧形振幅矢量



2.3 矢量图解法和菲涅耳积分

非整数个半波带

如果最后一个不是整数个半波带，也可以得到合振动。



2.3 矢量图解法和菲涅耳积分

例：圆孔包含1/2个半波带时轴上的衍射强度

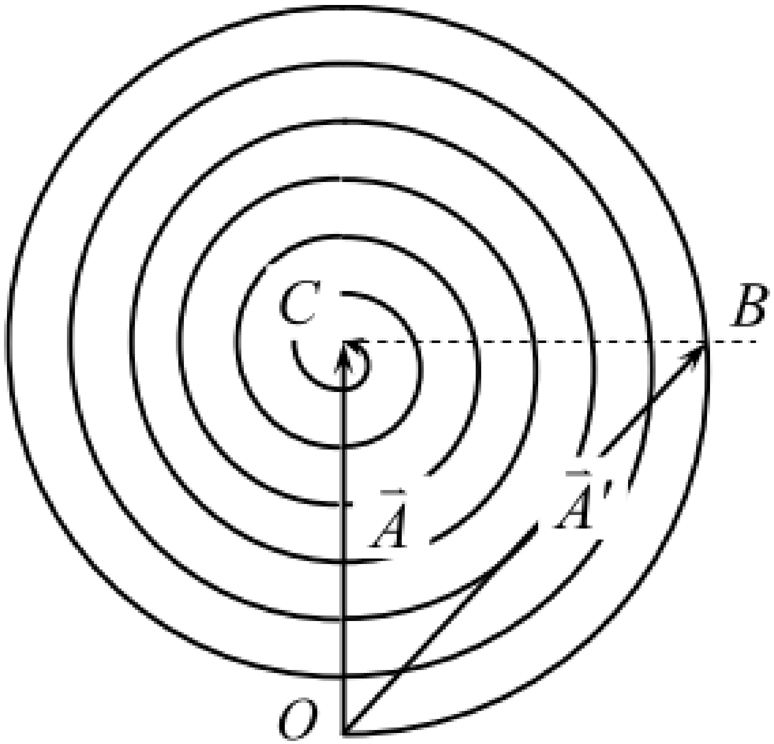
边缘与中心光程差

λ/4，位相差π/2，振

动曲线为OB

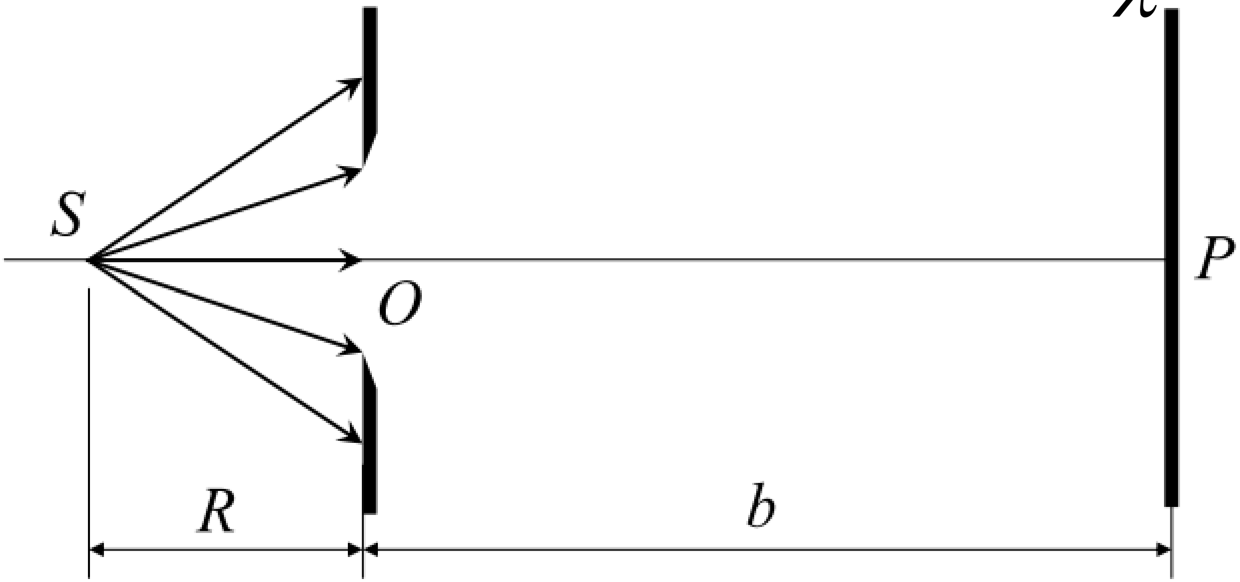
$$A' = \overline{OB} = \sqrt{2}A$$

$$I' = 2A^2$$



2.3 矢量图解法和菲涅耳积分

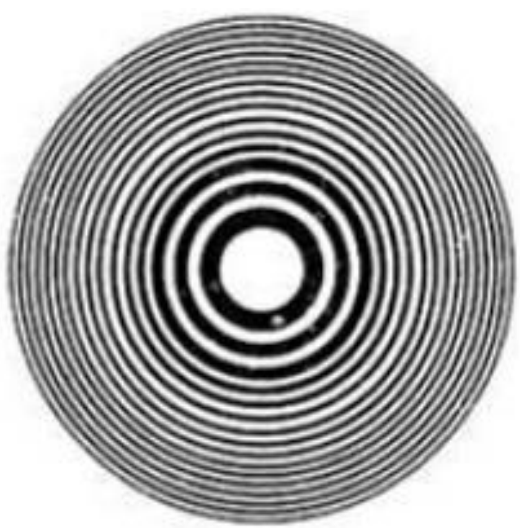
例：利用光场的自由传播，验证比例系数 $K = \dfrac{-i}{\lambda}$

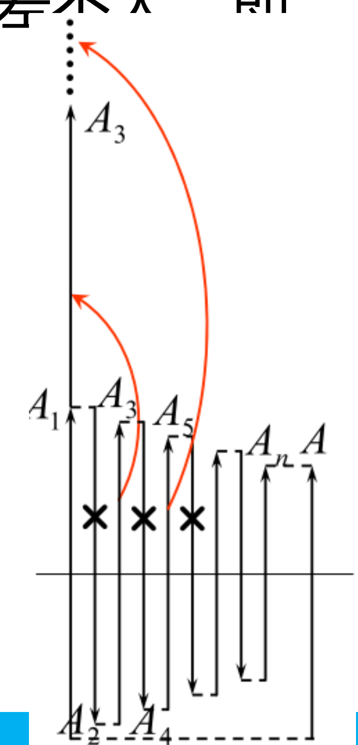


自由传播的球面波 $\tilde{U} = \dfrac{a}{r} e^{ikr}$

2.4 菲涅耳波带片

- 用半波带将波面分割，然后只让其中的奇数（或偶数）半波带透光，即制成波带片。
- 透过波带片的光，在场点P处光程差依次为λ，相位相同，振动方向也相同，合振动大大增强，衍射后的光强大大增强。
- 效果：相当于将光波汇聚到P点。
- 一般情况下，可以认为前面几个半波带的倾斜因子相差不大，即满足近轴条件，所以他们发出的次波的振幅近似相等。





2.4 菲涅耳波带片

例：一个波带片有20个半波带，求在P点的复振幅和光强

$$\tilde{U}(P) = A_1 + A_3 + A_5 + \cdots + A_{19} \approx 10A_1$$

光强

$$I(P) = U(P) \times U^*(P) = 100A_1^2$$

自由传播时

$$\tilde{U}_0(P) = \frac{1}{2}A_1 \Rightarrow I_0(P) = \frac{1}{4}A_1^2$$

相差400倍，可见波带片具有使光汇聚的作用。

2.4 菲涅耳波带片

半波带方程

- 半波带奇偶性的数量关系

$$r_m^2-b^2=(b+m\frac{\lambda}{2})^2-b^2=mb\lambda+(\frac{m}{2}\lambda)^2\approx m\lambda b$$

$$\rho_m^2=r_m^2-(b+h)^2=r_m^2-b^2-2bh-h^2$$

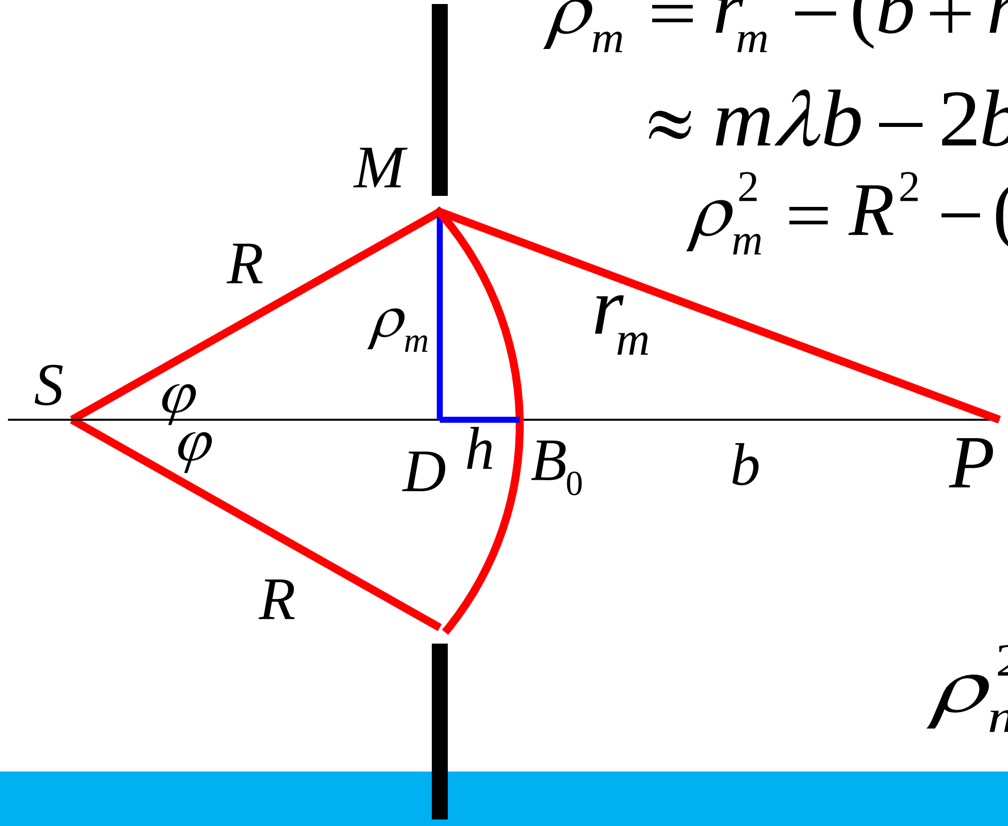
$$\approx m\lambda b-2bh$$

$$\rho_m^2=R^2-(R-h)^2=2Rh-h^2\approx 2Rh$$

$$m\lambda b-2bh=2Rh$$

$$h=\frac{mb}{2(R+b)}\lambda$$

$$\rho_m^2\approx 2Rh=\frac{mbR}{R+b}\lambda$$



2.4 菲涅耳波带片

半波带方程

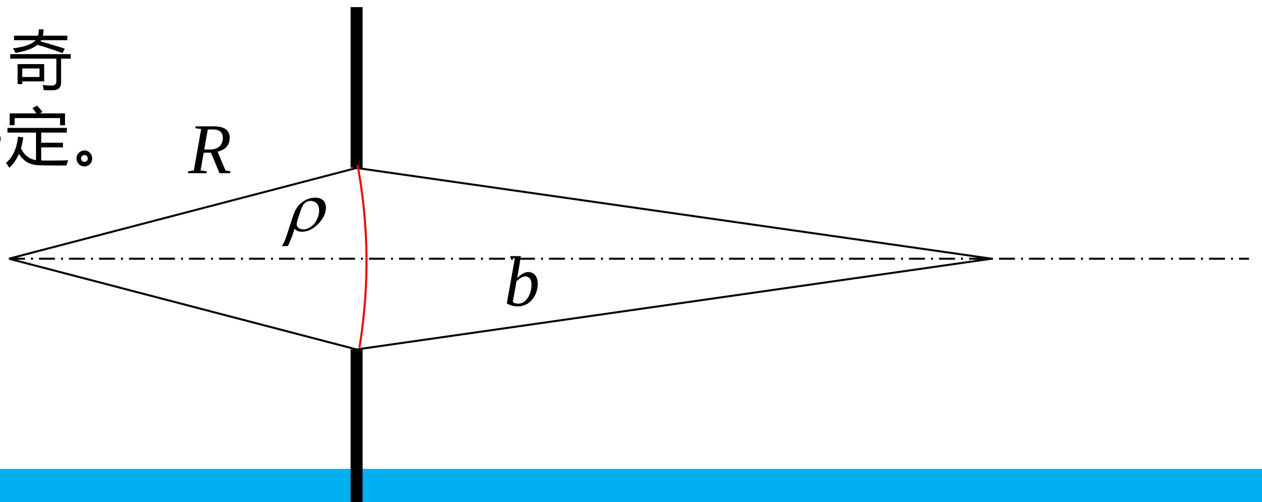
$$\rho_m^2 = \frac{mbR}{R+b}\lambda \qquad m = \frac{\rho_m^2}{\lambda}\frac{R+b}{Rb}$$

$$\rho_m = \sqrt{\frac{mbR}{R+b}\lambda} = \sqrt{m}\rho_1 \Rightarrow \frac{\rho_m^2}{m} = \rho_1$$

$$m = \frac{\rho_m^2}{\lambda}(\frac{1}{b}+\frac{1}{R})$$

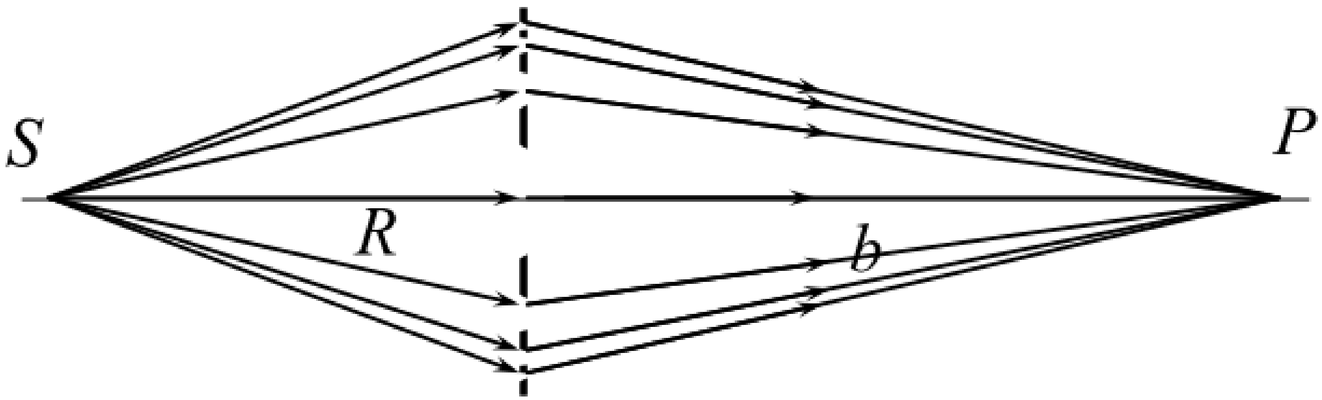
半波带方程 $$\frac{1}{R}+\frac{1}{b} = \frac{m\lambda}{\rho_m^2} = \frac{\lambda}{\rho_1^2}$$

m 的数值及奇偶性由 b 决定。



2.4 菲涅耳波带片

波带片方程



如果将S、P分别看成物点、像点，则构成了费涅耳透镜，其物象关系为：

物距　像距

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{b}=\frac{m\lambda}{\rho_m^{\ 2}}=\frac{\lambda}{\rho_1^{\ 2}}$$

焦距

等效于透镜的高斯公式

其中 $f=\dfrac{\rho_m^{\ 2}}{m\lambda}=\dfrac{\rho_1^{\ 2}}{\lambda}$ 为波带片的焦距。

2.4 菲涅耳波带片

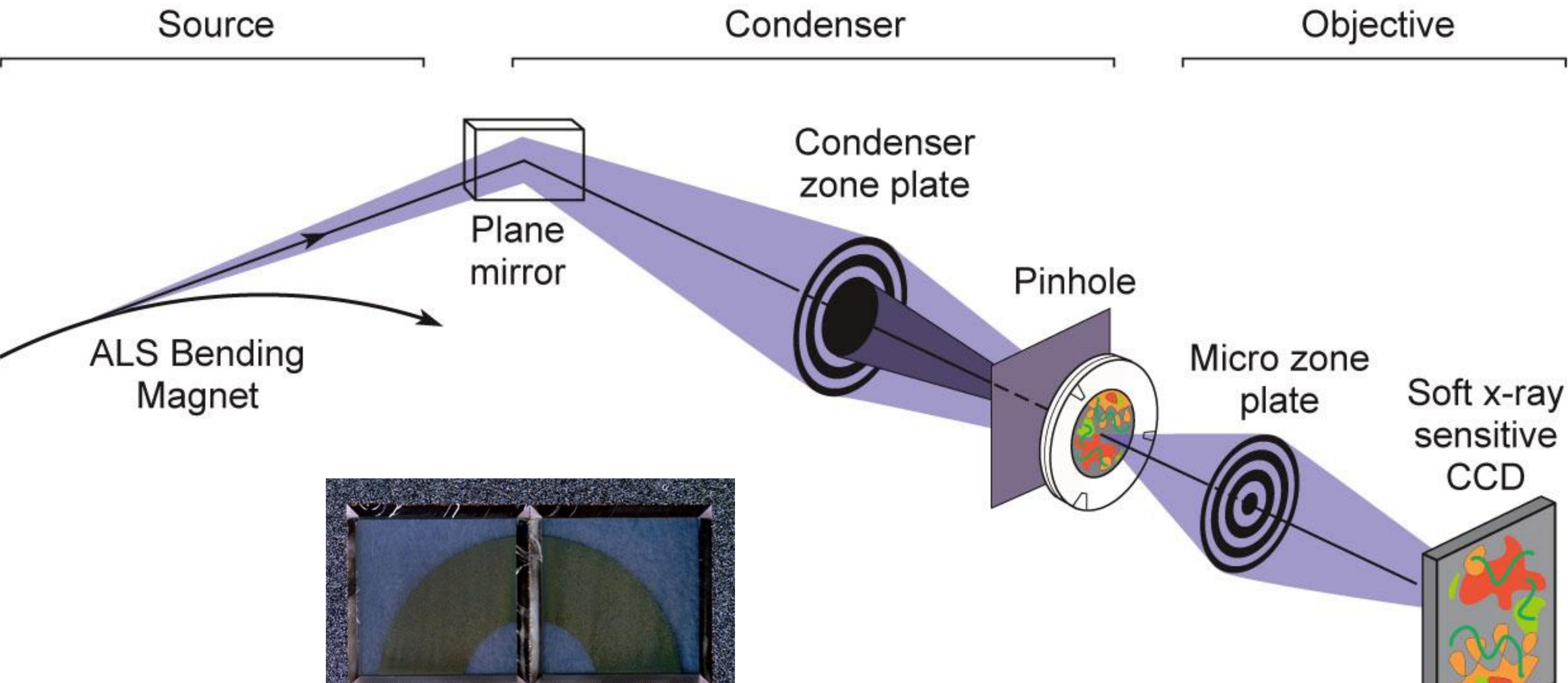
波带片方程的特点

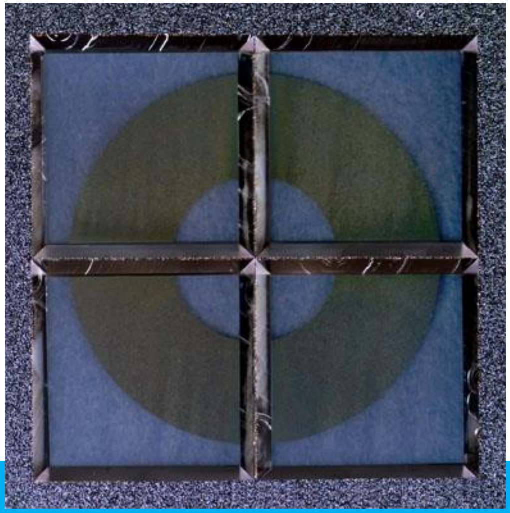
$$\frac{1}{R}+\frac{1}{b}=\frac{m\lambda}{\rho_m^2}=\frac{\lambda}{\rho_1^2} \qquad f=\frac{\rho_m^2}{m\lambda}=\frac{\rho_1^2}{\lambda} \qquad m=\frac{\rho_m^2}{\lambda}\frac{1}{b}$$

- 对于某一个波长，波带片的焦距是固定的。
- 对平行光，波带片为平面的。
- 在距离 b 处看来，半径为 ρ_m 的圆孔处是第 m 个半波带。
- 但除主焦点之外，还有许多个次焦点。
- 焦距随波长增加而缩短，这与普通玻璃透镜的色散结果相反，两者结合使用可以有效补偿色散。

2.4 菲涅耳波带片

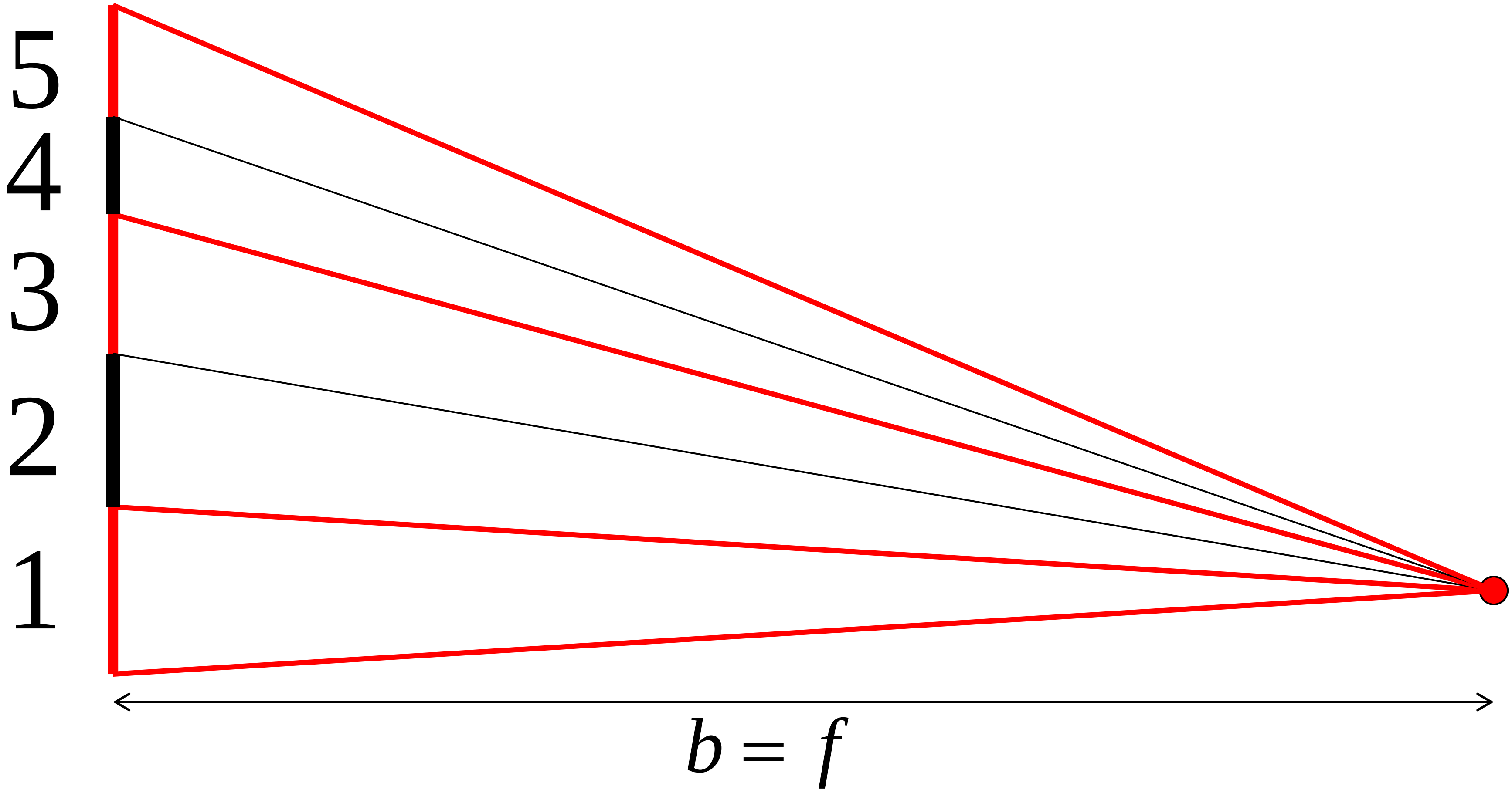
应用：用于同步辐射软x射线的波带片





2.4 菲涅耳波带片

波带片的次焦点



$$m=\frac{\rho_m{}^2}{\lambda}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{R}\right)$$

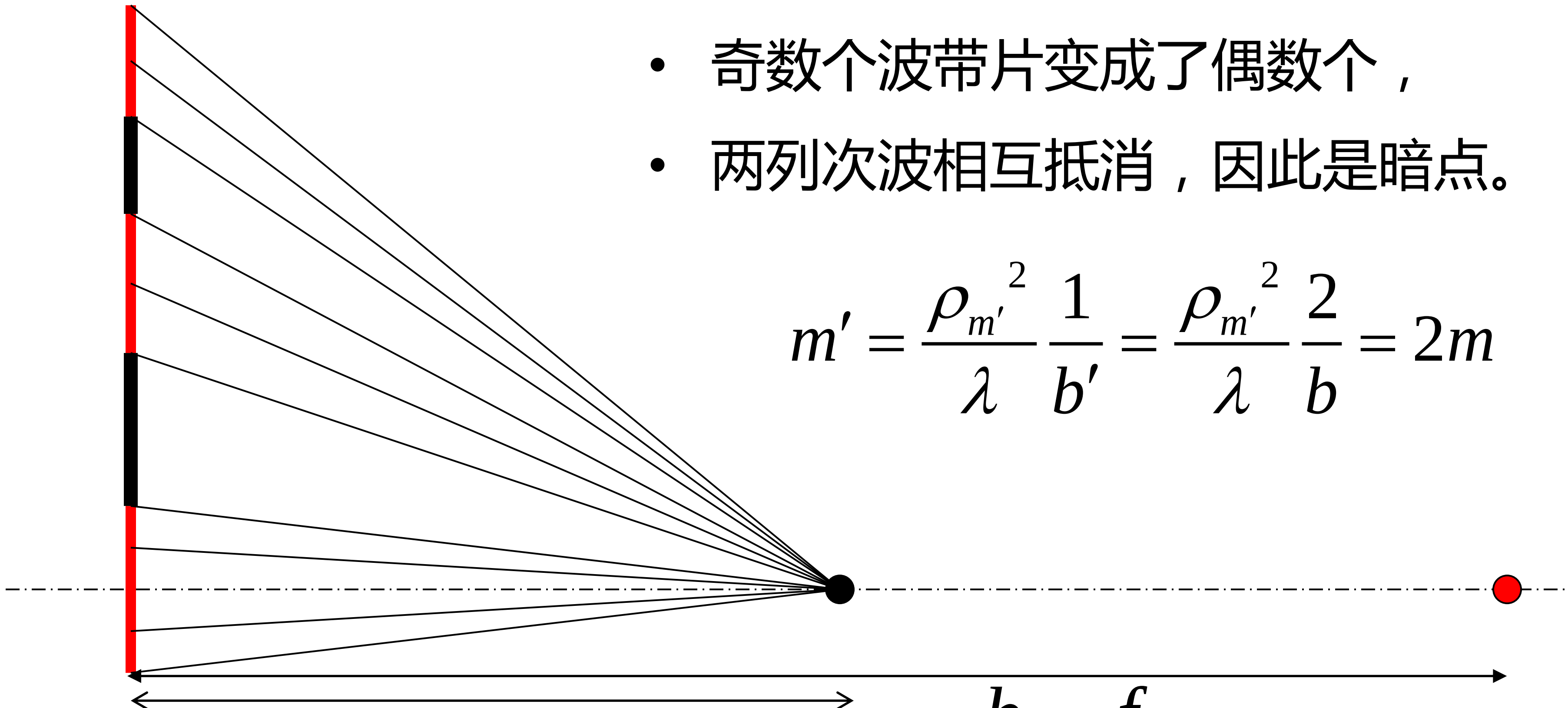
$$m=\frac{\rho_m{}^2}{\lambda}\frac{1}{b}$$

2.4 菲涅耳波带片

波带片的次焦点

- 原来的每一个半波带可以分为2个，
- 奇数个波带片变成了偶数个，
- 两列次波相互抵消，因此是暗点。

$$m' = \frac{\rho_{m'}{}^2}{\lambda}\frac{1}{b'} = \frac{\rho_{m'}{}^2}{\lambda}\frac{2}{b} = 2m$$



$$b = f$$

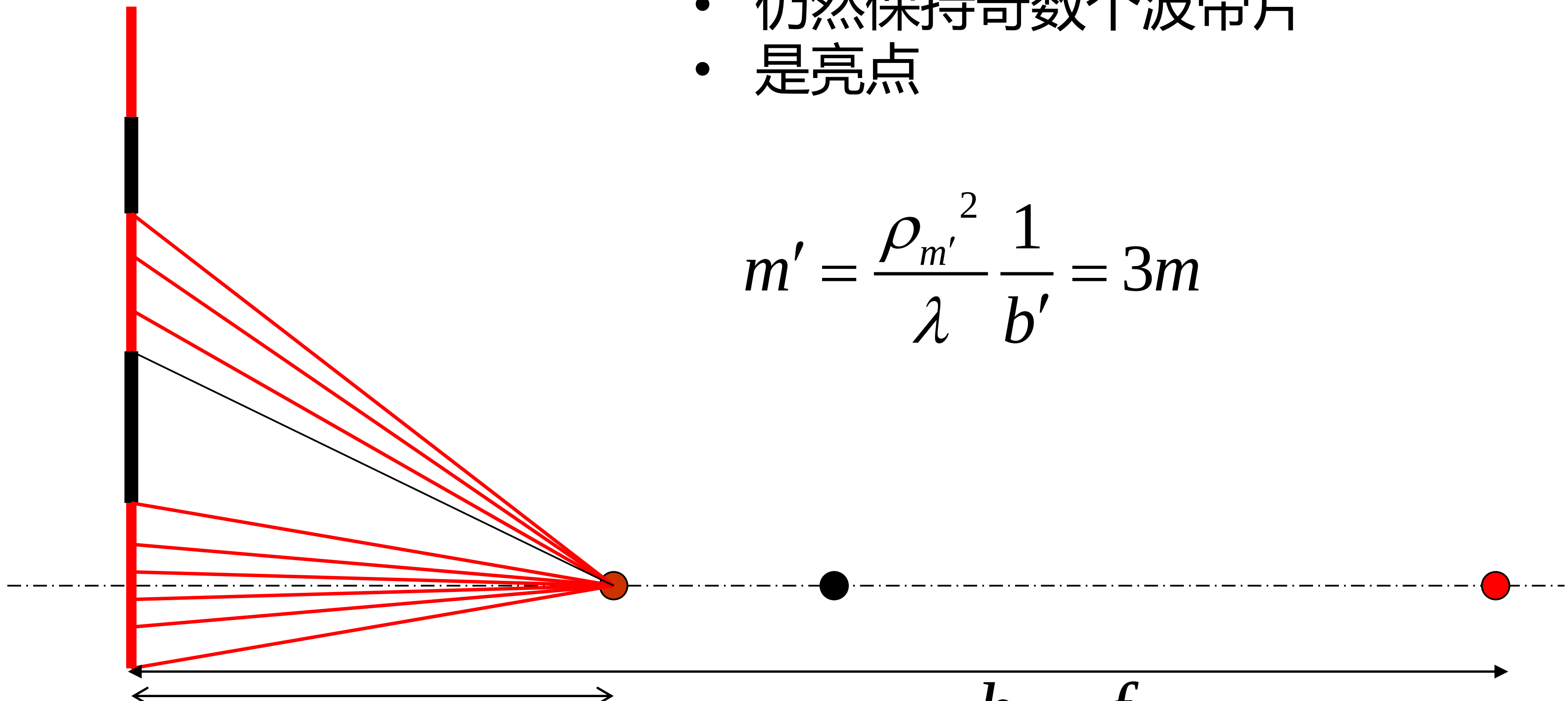
$$b' = \frac{f}{2}$$

2.4 菲涅耳波带片

波带片的次焦点

- 仍然保持奇数个波带片
- 是亮点

$$m' = \frac{\rho_{m'}{}^2}{\lambda}\frac{1}{b'} = 3m$$



$$b = f$$

$$b' = \frac{f}{3}$$

2.4 菲涅耳波带片

波带片的次焦点

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{b}=\frac{m\lambda}{\rho_m^{\ 2}}=\frac{\lambda}{\rho_1^2} \qquad m=\frac{\rho_m^{\ 2}}{\lambda}\frac{1}{b}$$

- 当波带片不变时，b 改变，会引起 m 的改变，即：可划分的半波带数目改变。
- b减小，到$b/2$时，$m'=2m$，暗点；
- b减小，到$b/3$时，$m'=3m$，亮点，次焦点；
- b减小，到$b/4$时，$m'=4m$，暗点……

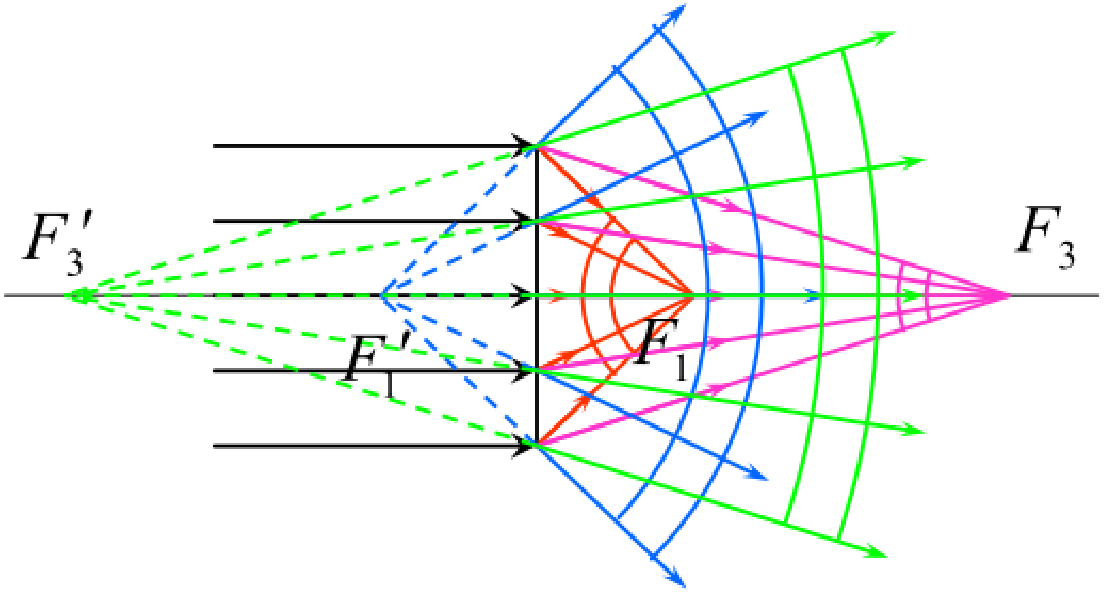
$$f'=\frac{f}{3},\frac{f}{5},\cdots,\frac{f}{2m+1}$$ 一系列次焦点

思考：次焦点的光强变化

2.4 菲涅耳波带片

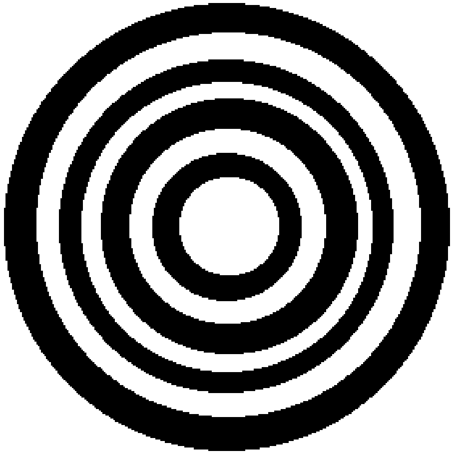
波带片的次焦点

次焦点（实焦点和虚焦点）：$f=\pm\frac{\rho_1^2}{\lambda},\pm 3\frac{\rho_1^2}{\lambda},\pm 5\frac{\rho_1^2}{\lambda},\cdots$

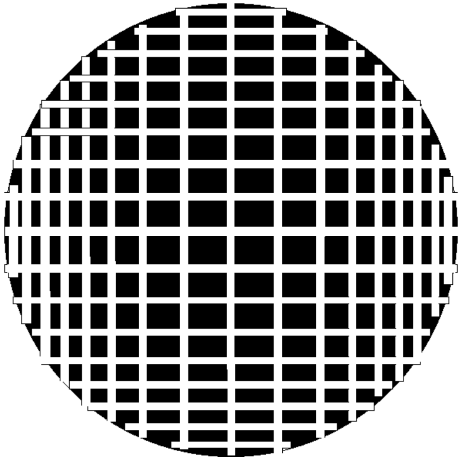


2.4 菲涅耳波带片

几种波带片的实例

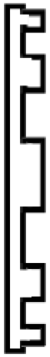


黑白波带片（圆形）



黑白波带片（十字交叉）

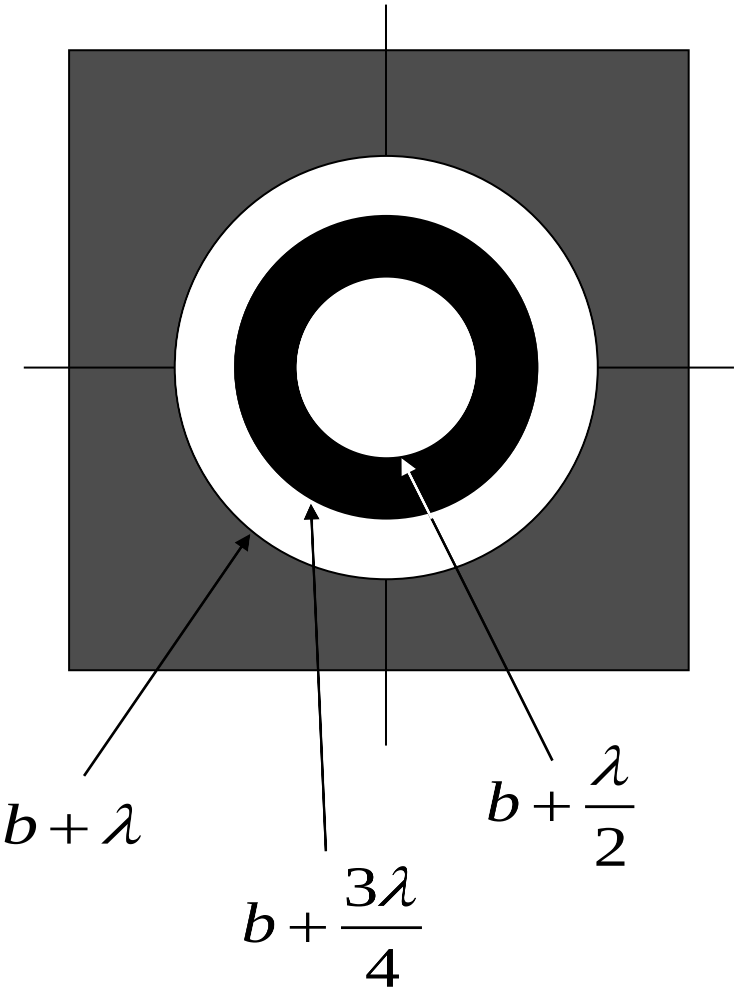
余弦波带片

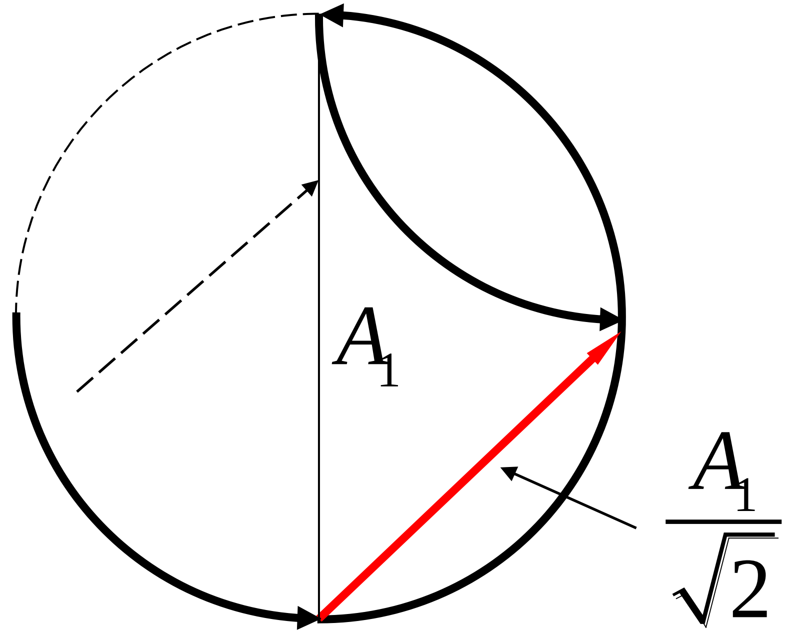


位相波带片（浮雕波带片）

2.3 矢量图解法和菲涅耳积分

例：利用矢量法求解波带片的菲涅耳衍射问题





本节重点

1. 矢量图解法
2. 波带片的原理和计算

作业

P207~209 -- 1,5,8,10

重排版：P151 -- 1,5,8,10

2.2 半波带法

以半波带法求解菲涅耳衍射积分

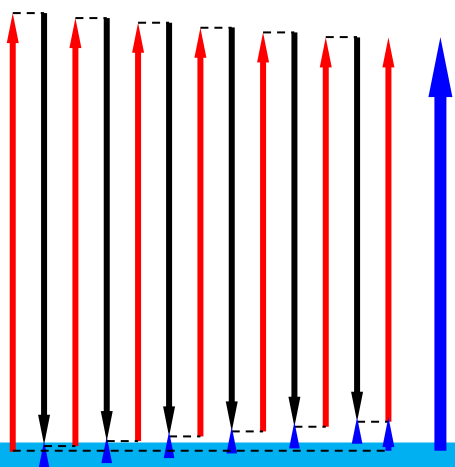
求解衍射都要利用衍射积分公式

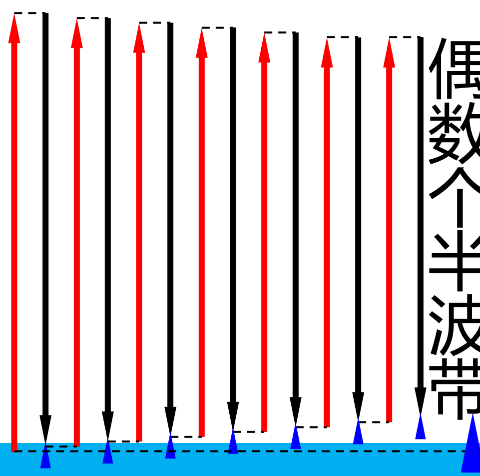
$$\tilde{U}(x,y)=\frac{\mathrm{e}^{-i\pi/2}}{\lambda}\iint_{\Sigma}\tilde{U}_0(x',y')\frac{\cos\theta_0+\cos\theta}{2}\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'$$

通过近似求解积分公式：划分半波带

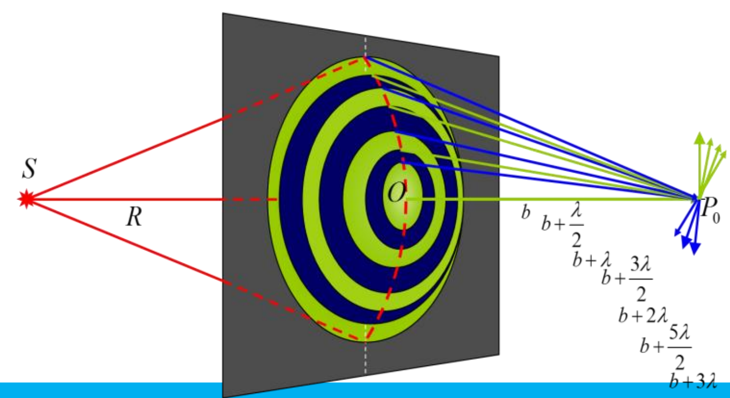
$$\tilde{U}(x,y)=\sum_{m=1}^{N}\frac{\mathrm{e}^{-i\pi/2}}{\lambda}\iint_{\Sigma_m}\tilde{U}_0(x',y')\frac{\cos\theta_0+\cos\theta}{2}\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'$$

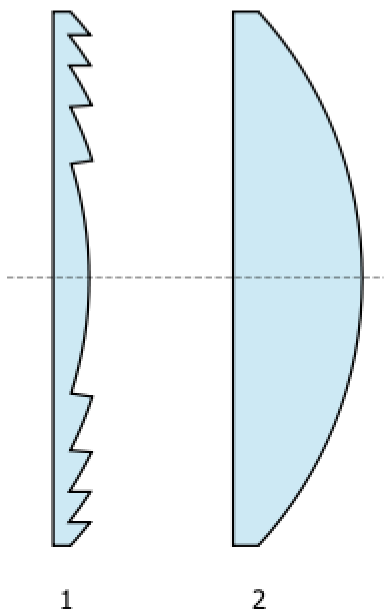
奇数个半波带

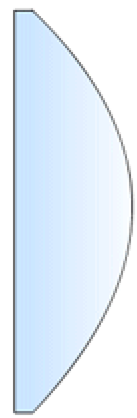




偶数个半波带







这是普通凸透镜

2.3 矢量图解法和菲涅耳积分

$$F(\theta_0,\theta)=\frac{1}{2}(1+\cos\theta)=\cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$\tilde{U}(P)=K\oiint_{(\Sigma)}U_0(Q)F(\theta_0,\theta)\frac{e^{ikr}}{r}d\Sigma$$

$$=K\int A_0F(\theta)e^{ikr}\frac{d\Sigma}{r}$$

$$=KA_0\int F(\theta)e^{ikr}\frac{2\pi R}{R+b}dr$$

$$=KA_0\frac{2\pi R}{R+b}\int F(\theta)e^{ikr}dr$$