第四章 光的衍射

第三节
夫琅禾费单缝和矩孔衍射

第三节 夫琅禾费单缝和矩孔衍射

3.1 实验装置

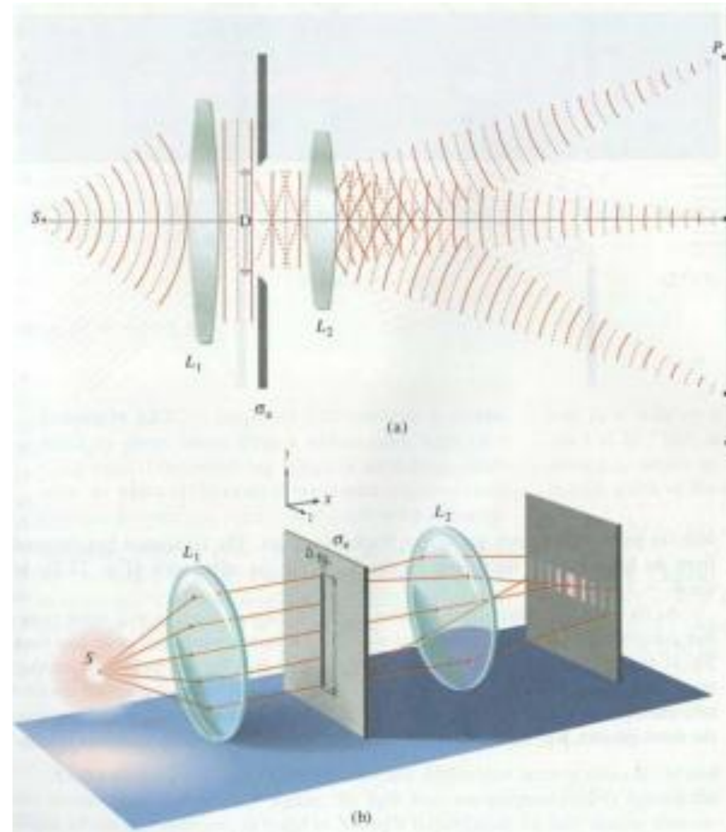
3.2 单缝衍射的强度公式和衍射图案

3.3 矩孔衍射的强度公式和衍射图案

3.4 单缝衍射因子的特点

3.5 衍射反比关系的意义

3.1 实验装置



夫琅和费

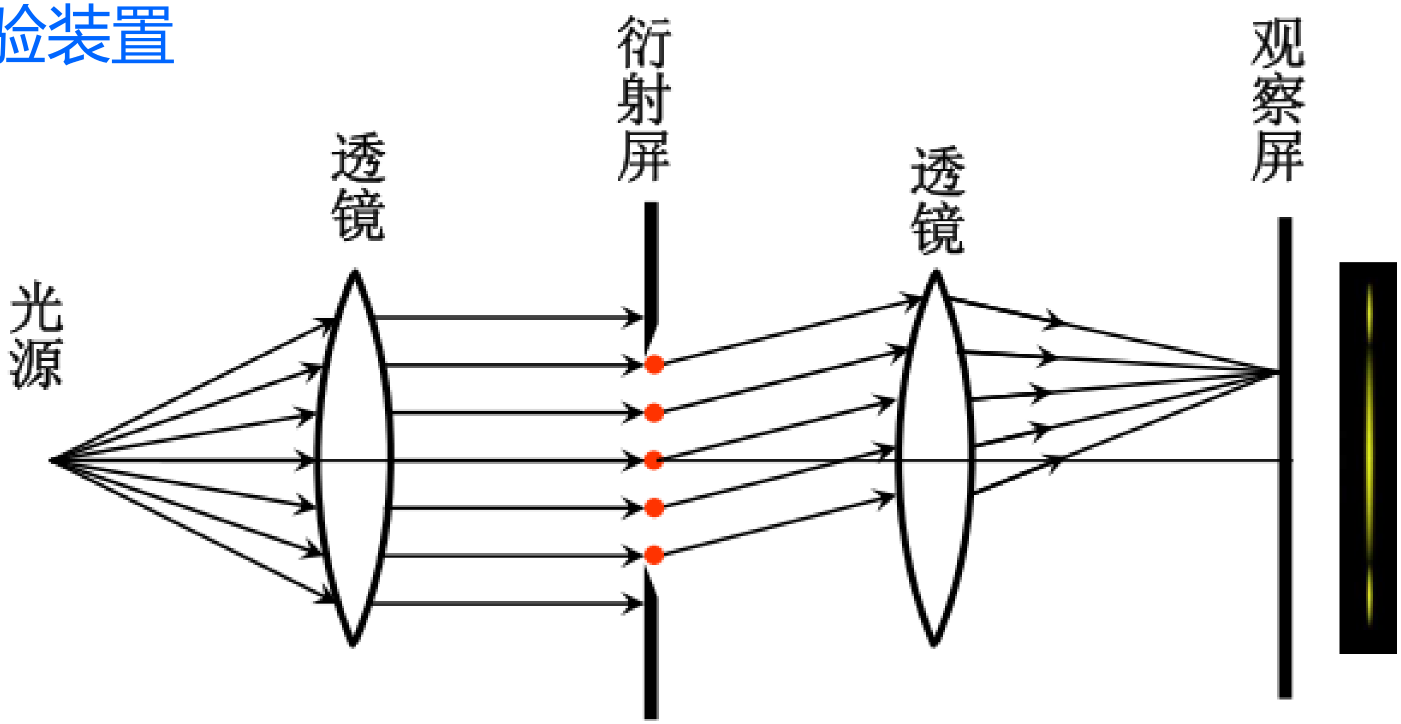
(Joseph von Fraunhofer 1787—1826)

德国物理学家

- 发现并研究了太阳光谱中的暗线
- 设计和制造了消色差透镜
- 首创用牛顿环方法检查光学表面加工精度及透镜形状
- 首先定量地研究了衍射光栅，并用其测量光的波长
- 给出了光栅方程。

3.1 实验装置

实验装置

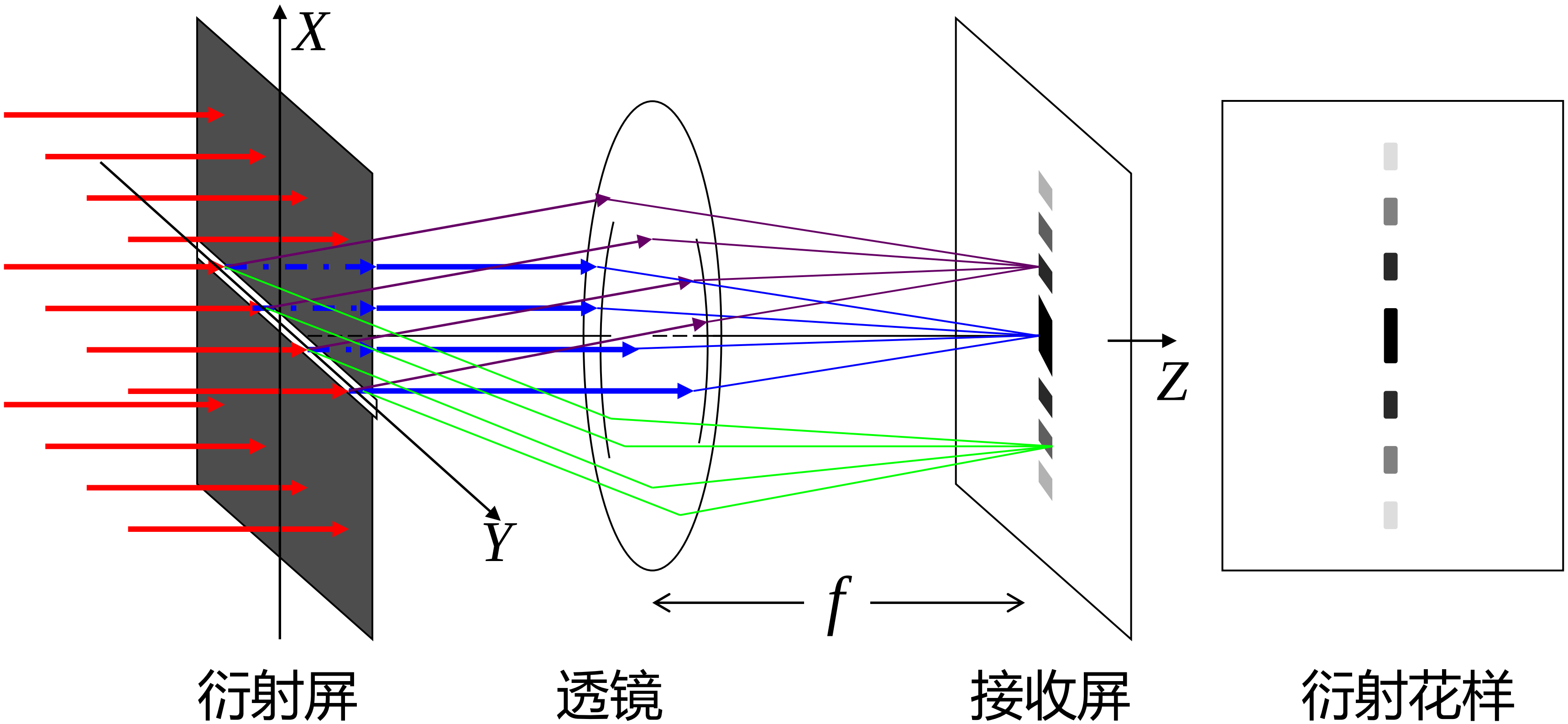


- 平行光入射，用凸透镜成像于像方焦平面。
- 相当于各点发出的次波汇聚于无穷远处。即是平行光的相干叠加。

3.1 实验装置

衍射图样

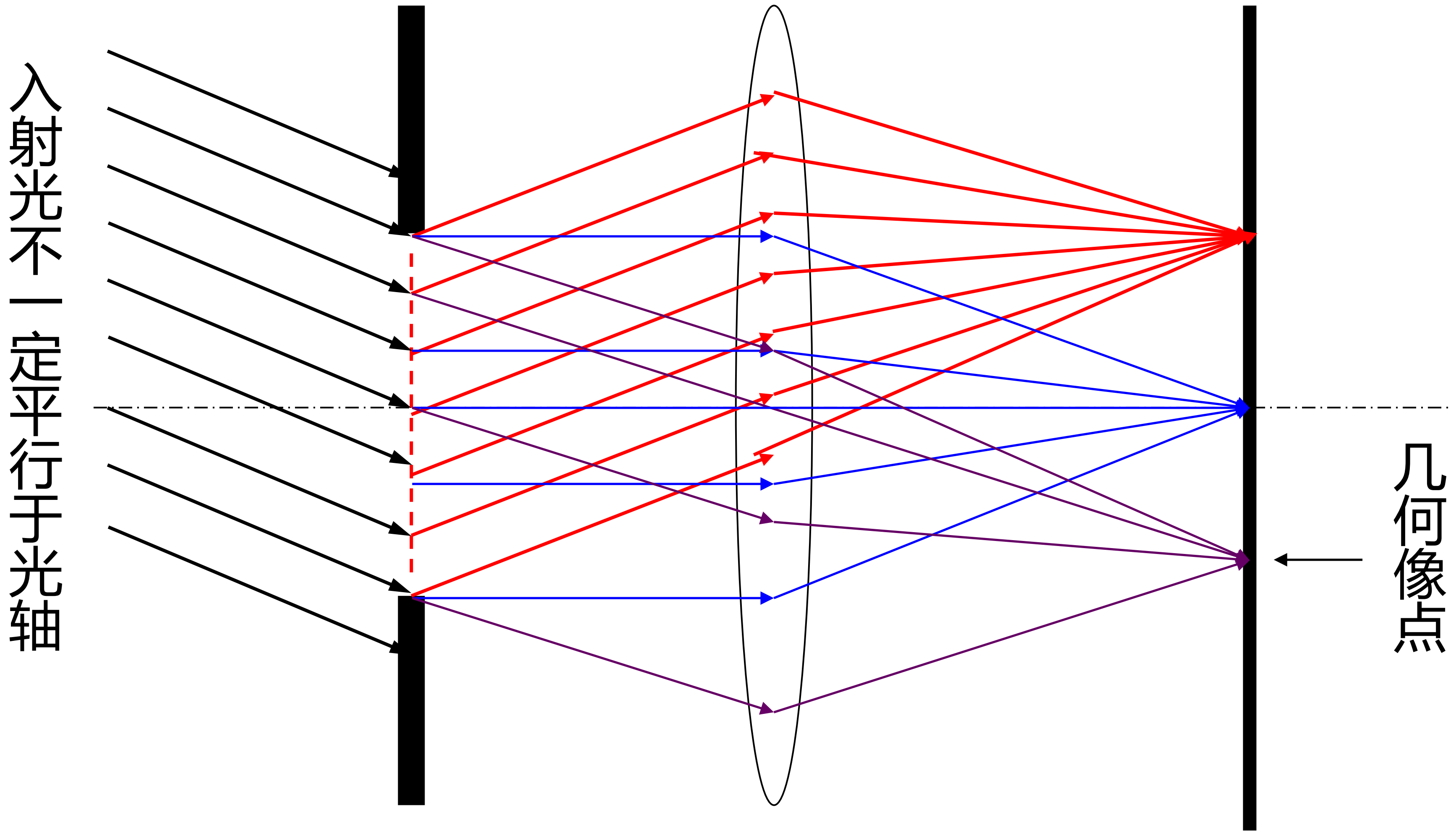
- 在**焦平面**上汇聚（相遇）的光，是从狭缝发出的**相互平行**的**次波**



一系列亮斑。中心为亮斑，亮度大于两侧的亮斑。中心亮斑宽度是两侧的二倍，亮斑的宽度随狭缝的变窄而展宽。

3.1 实验装置

衍射图样



3.2 单缝衍射的强度公式和衍射图案

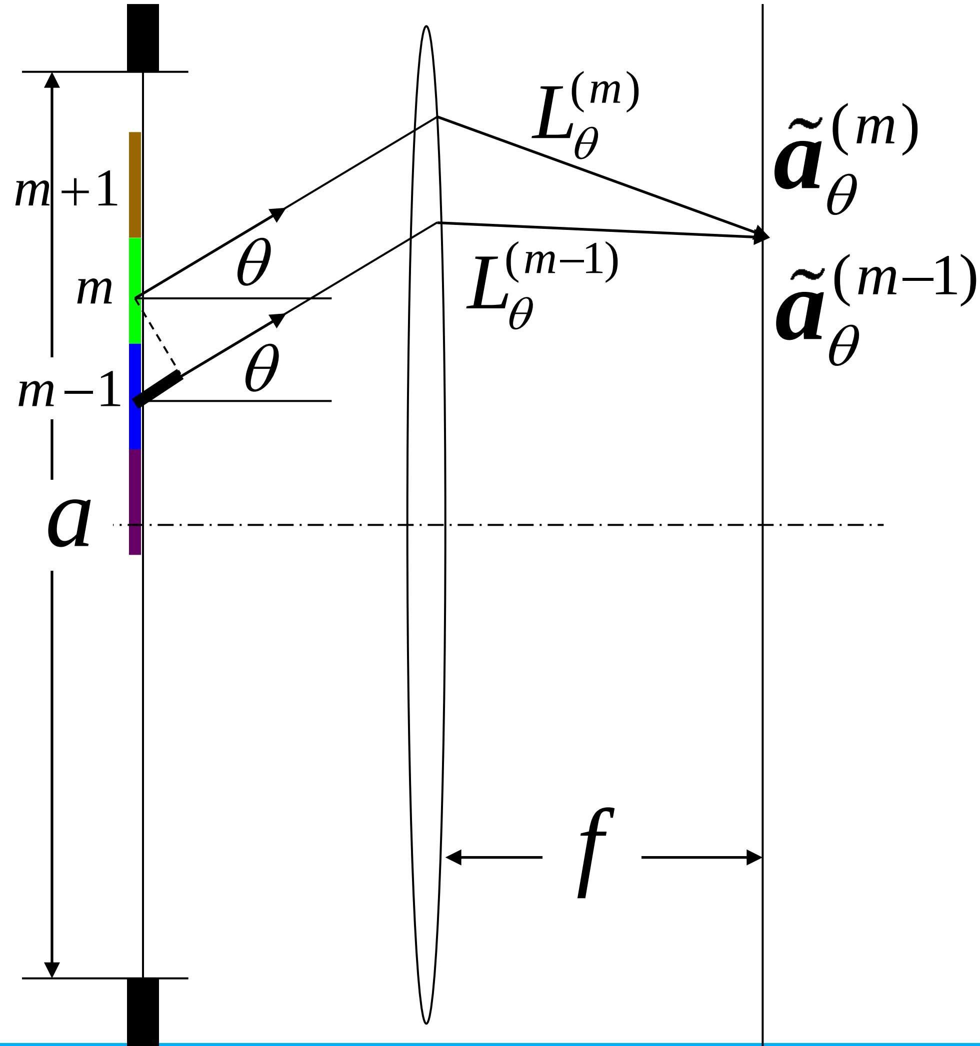
1. 矢量图解法

衍射强度的分布

将波前N等分，每个面元的宽度为a/N

$\tilde{a}_\theta^{(m)}$ ：第m个面元发出的次波的复振幅

$L_\theta^{(m)}$ ：第m个面元发出的次波的光程

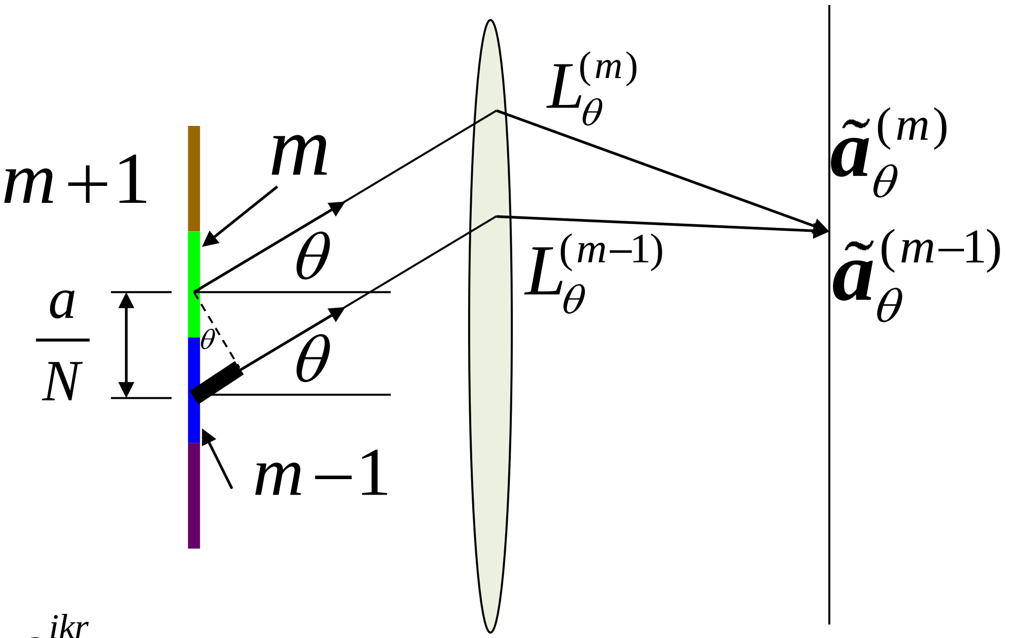


3.2 单缝衍射的强度公式和衍射图案

1. 复振幅矢量法

相邻两单元次波的光程差

$$\Delta L = \frac{a\sin\theta}{N}$$



相邻两单元次波的相位差

$$\Delta\varphi = k\Delta L = \frac{ka\sin\theta}{N} = \frac{2\pi a\sin\theta}{N\lambda}$$

求解 $\tilde{U}(P) = K\iint_\Sigma \tilde{U}(Q)F(\theta_0,\theta)\frac{e^{ikr}}{r}\mathrm{d}\Sigma$ 关键是如何合理的简化？

- 沿θ方向的次波在接收屏上的合振动 $\tilde{A}_\theta = \sum_{m=1}^{N}\tilde{a}_\theta^{(m)}$
- 在近轴条件下，忽略倾斜因子的影响 $\frac{F(\theta_0,\theta)}{r} = \frac{1}{L_0}$

各个单元沿不同方向的次波振幅相等

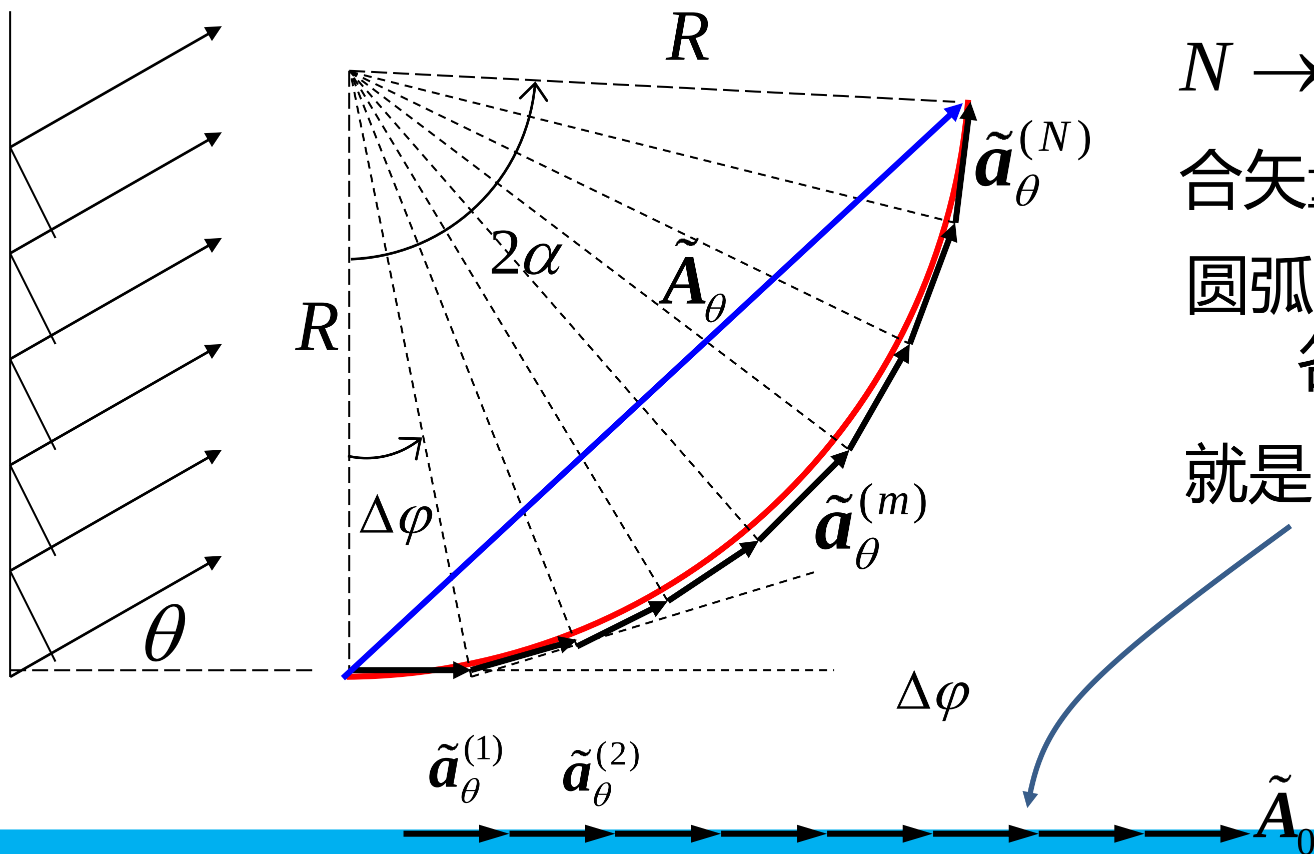
- 近轴条件下，球面波次波源上的各个面元的瞳函数相等

3.2 单缝衍射的强度公式和衍射图案

1. 复振幅矢量法

N个矢量，每个依次转过 $\Delta\varphi$

共转过 $2\alpha = N\Delta\varphi$ 构成一段圆弧的N条弦



$N \to \infty$ 成为圆弧

合矢量 $\tilde{A}_\theta$

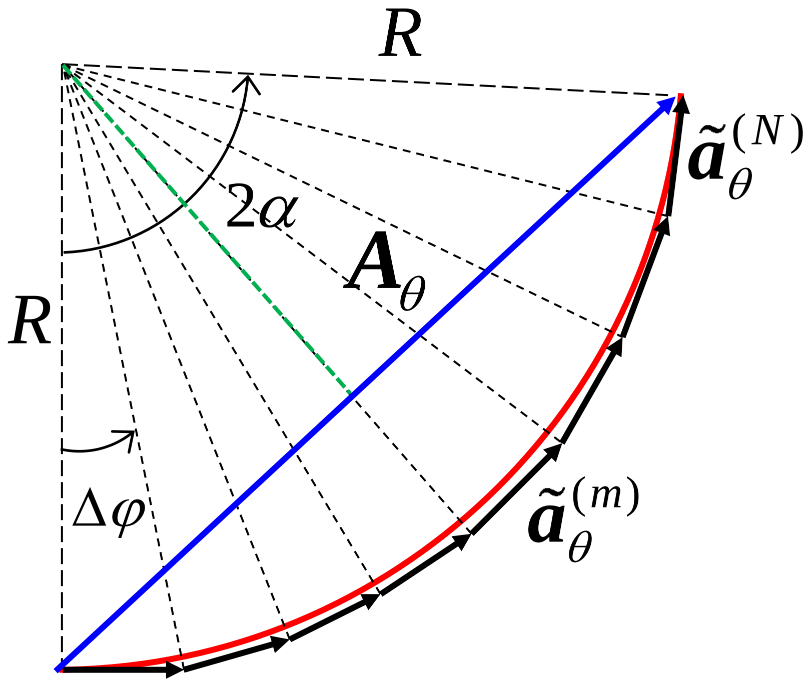
圆弧长度 = 各矢量长度之和

就是θ=0时的合矢量

$$R = \frac{A_0}{2\alpha}$$

3.2 单缝衍射的强度公式和衍射图案

1. 复振幅矢量法



$$R = \frac{A_0}{2\alpha}$$

$$A_\theta = 2R\sin\alpha$$

$$A_\theta = \frac{A_0}{\alpha}\sin\alpha = A_0\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

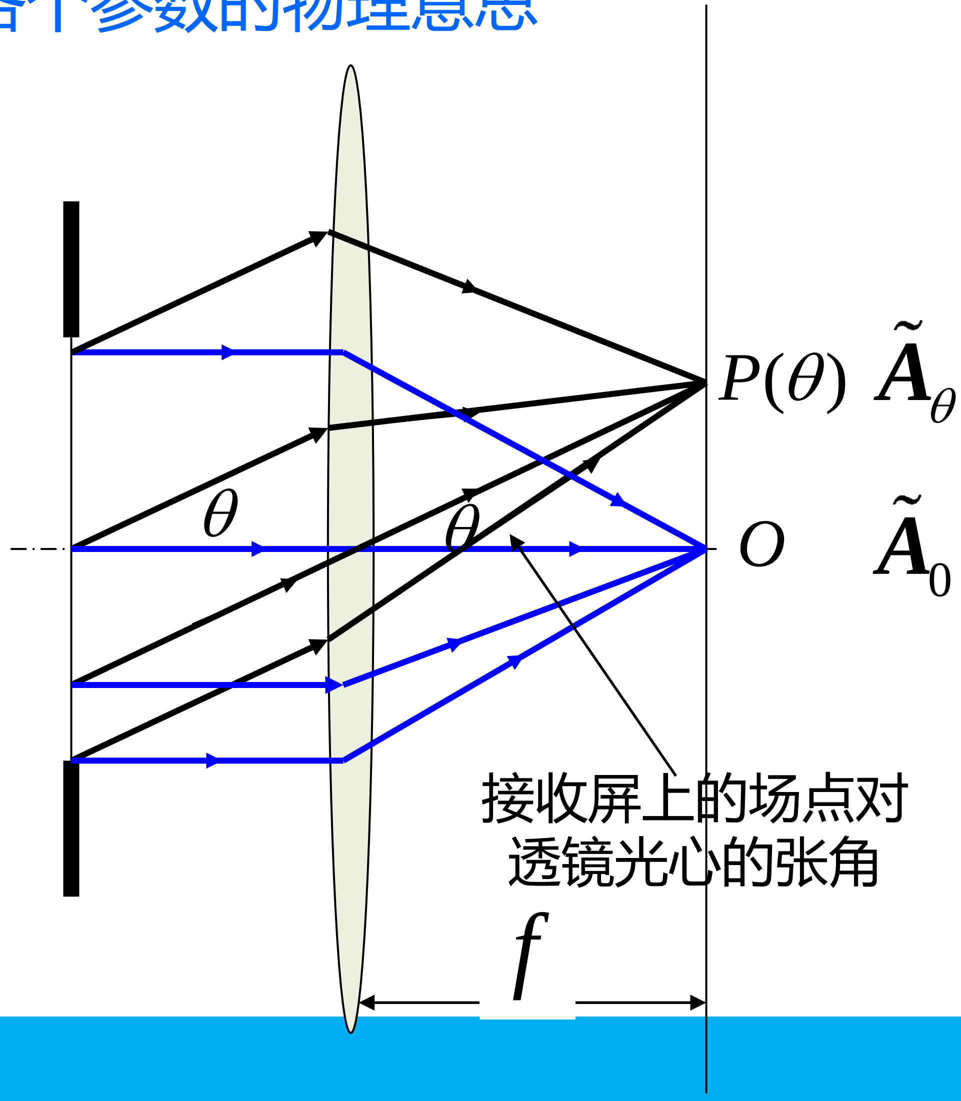
$$2\alpha = N\Delta\varphi = N\frac{ka\sin\theta}{N} = \frac{2\pi a\sin\theta}{\lambda}$$

$$A_\theta = A_0\frac{\sin\dfrac{\pi a\sin\theta}{\lambda}}{\dfrac{\pi a\sin\theta}{\lambda}} = A_0\frac{\sin u}{u} \qquad (u = \frac{\pi a\sin\theta}{\lambda})$$

3.2 单缝衍射的强度公式和衍射图案

1. 复振幅矢量法

各个参数的物理意思



$$\tilde{A}_\theta = \tilde{A}_0 \frac{\sin u}{u}$$

$\tilde{A}_0$ 是平行光轴分量的复振幅（几何像点处的复振幅）

$$I_\theta = |\tilde{A}_\theta|^2 = A_0^2 \frac{\sin^2 u}{u^2}$$

$$= I_0 \frac{\sin^2 u}{u^2}$$

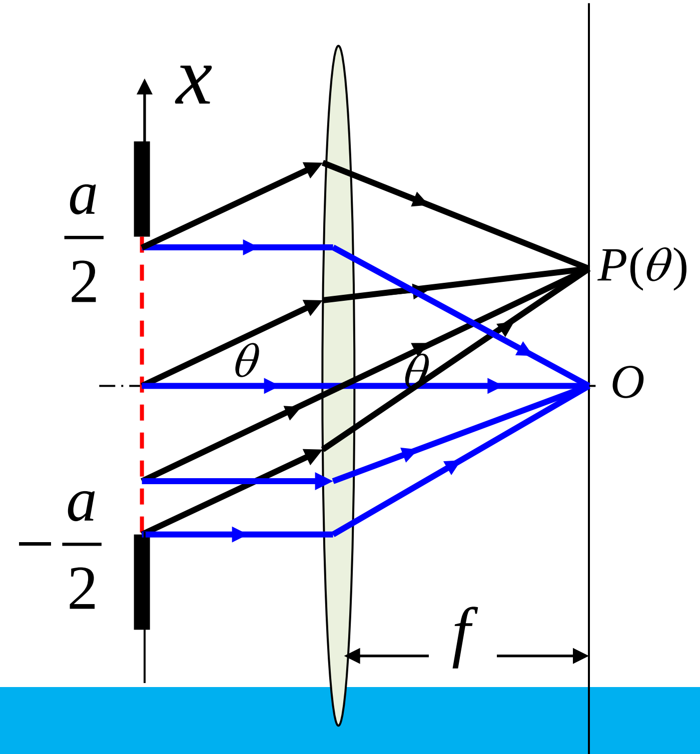
O点的光强

3.2 单缝衍射的强度公式和衍射图案

2. 积分方法

$$\tilde{U}(P)=K\iint\limits_{\Sigma}\tilde{U}(Q)F(\theta_0,\theta)\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r}\mathrm{d}\Sigma$$

- $P(\theta)$点的次波来自同一方向，倾斜因子相同。
- 不同方向的光，满足近轴条件，倾斜因子为常数1。
- 瞳函数为常数
- 积分简化

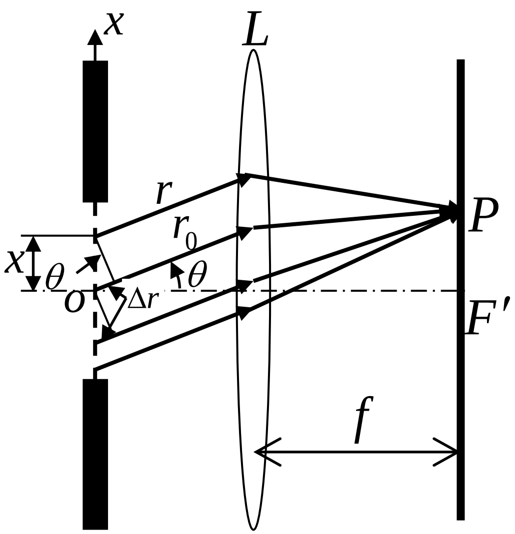


$$\tilde{U}(P)=K\frac{\tilde{U}(Q)F(\theta_0,\theta)}{L_0}\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{e}^{ikr}\mathrm{d}\Sigma$$

$$=\frac{K\tilde{U}(Q)}{L_0}\int_{-a/2}^{a/2}\mathrm{e}^{ikr}\mathrm{d}x$$

3.2 单缝衍射的强度公式和衍射图案

2. 积分方法



$$\tilde{U}(P)=K\iint_{\Sigma}\tilde{U}_0(Q)\frac{e^{ikr}}{r}d\Sigma=\frac{\tilde{K}_0}{L_0}\int_{-a/2}^{a/2}e^{ikr}dx$$

$$F(\theta_0,\theta)=1 \quad \tilde{K}_0=K\tilde{U}_0(Q) \quad \boxed{r=r(x)=?}$$

$$\Delta r=-x\sin\theta \qquad r=r_0+\Delta r=r_0-x\sin\theta$$

$$\tilde{U}(P)=\frac{\tilde{K}_0}{r_0}e^{ikr_0}\int_{-a/2}^{a/2}e^{-ikx\sin\theta}dx=\frac{\tilde{K}_0e^{ikr_0}}{r_0}\frac{1}{-ik\sin\theta}[e^{-ik\frac{a}{2}\sin\theta}-e^{ik\frac{a}{2}\sin\theta}]$$

$$=\frac{\tilde{K}_0e^{ikr_0}}{r_0}\frac{-2i\sin(\frac{ka}{2}\sin\theta)}{-ik\sin\theta}=aK\tilde{U}_0(Q)\frac{e^{ikr_0}}{r_0}\frac{\sin(\frac{1}{2}ka\sin\theta)}{\frac{1}{2}ka\sin\theta}=\tilde{U}_0\frac{\sin u}{u}$$

$$(\tilde{U}_0=aK\tilde{U}_0(Q)\frac{e^{ikr_0}}{r_0}, \qquad u=\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda})$$

3.2 单缝衍射的强度公式和衍射图案

2. 积分方法

$$\tilde{U}(P)=aK\tilde{U}_0(Q)\frac{\mathrm{e}^{ikr_0}}{r_0}\frac{\sin(\frac{1}{2}ka\sin\theta)}{\frac{1}{2}ka\sin\theta}=\tilde{U}_0\frac{\sin u}{u}$$

$$K\tilde{U}_0(Q)\frac{\mathrm{e}^{ikr_0}}{r_0}$$

狭缝上Q点单位面源发出的次波在几何像点所引起的复振幅

$$\tilde{U}_0=aK\tilde{U}_0(Q)\frac{\mathrm{e}^{ikr_0}}{r_0}$$

通过整个狭缝的次波在几何像点上的复振幅

$$u=\frac{1}{2}ka\sin\theta=\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta$$

$$\tilde{U}_0\frac{\sin u}{u}$$

称作单缝（单元）衍射因子

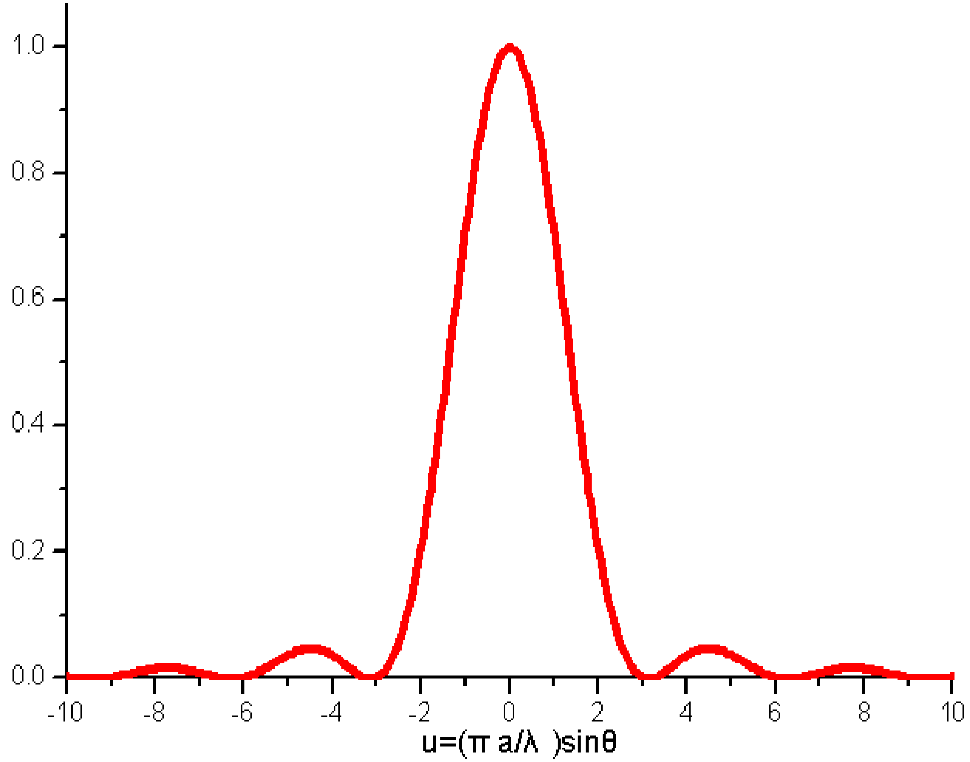
强度分布 $$I(P)=I_0\frac{\sin^2 u}{u^2}$$

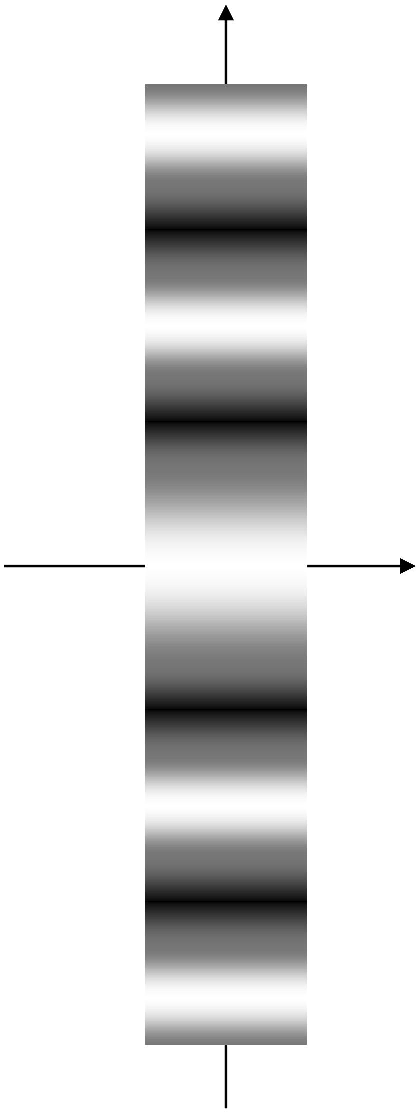
$$I_0=\tilde{U}_0\tilde{U}_0^*$$

几何像点处的光强

3.2 单缝衍射的强度公式和衍射图案

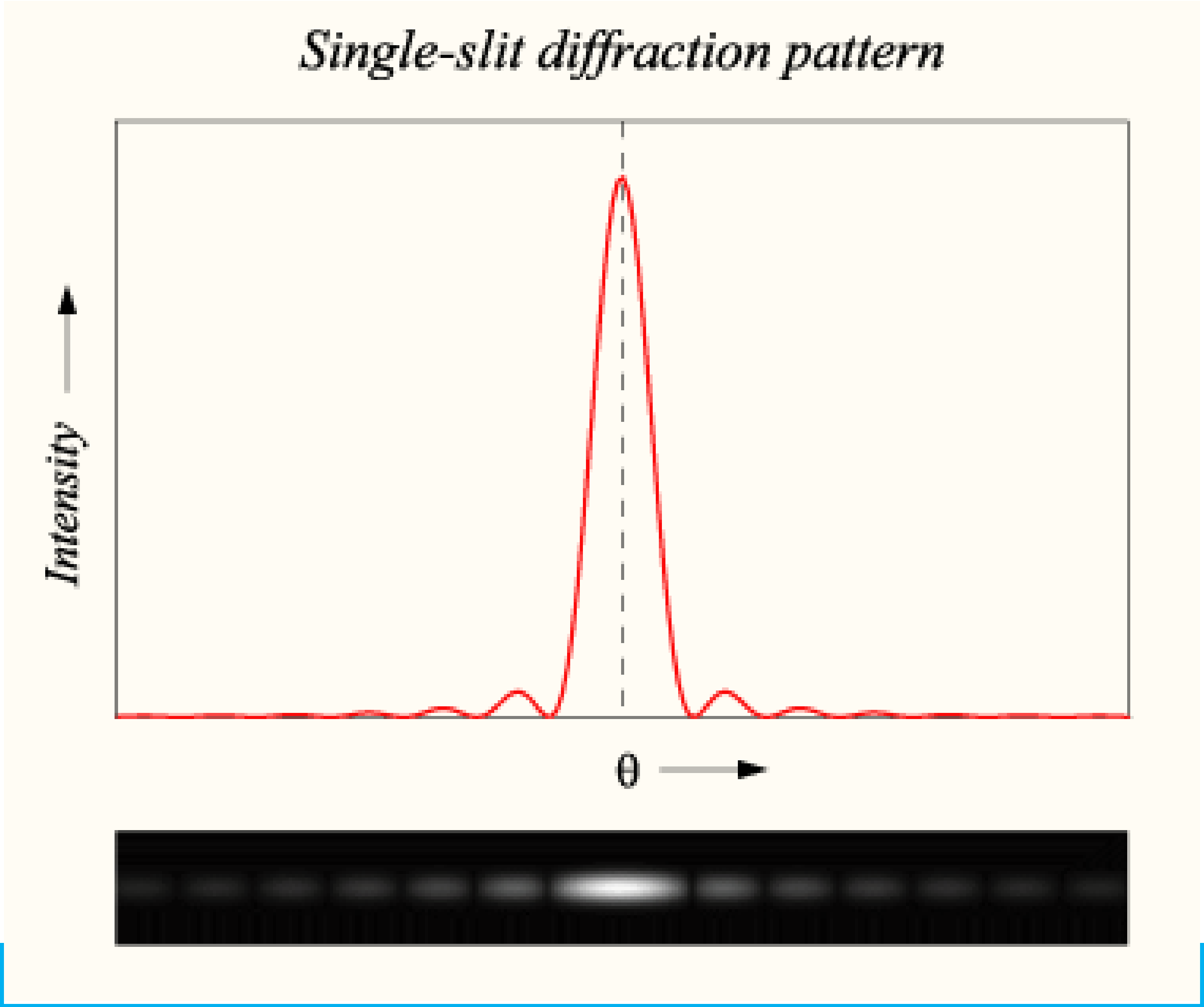
衍射图样





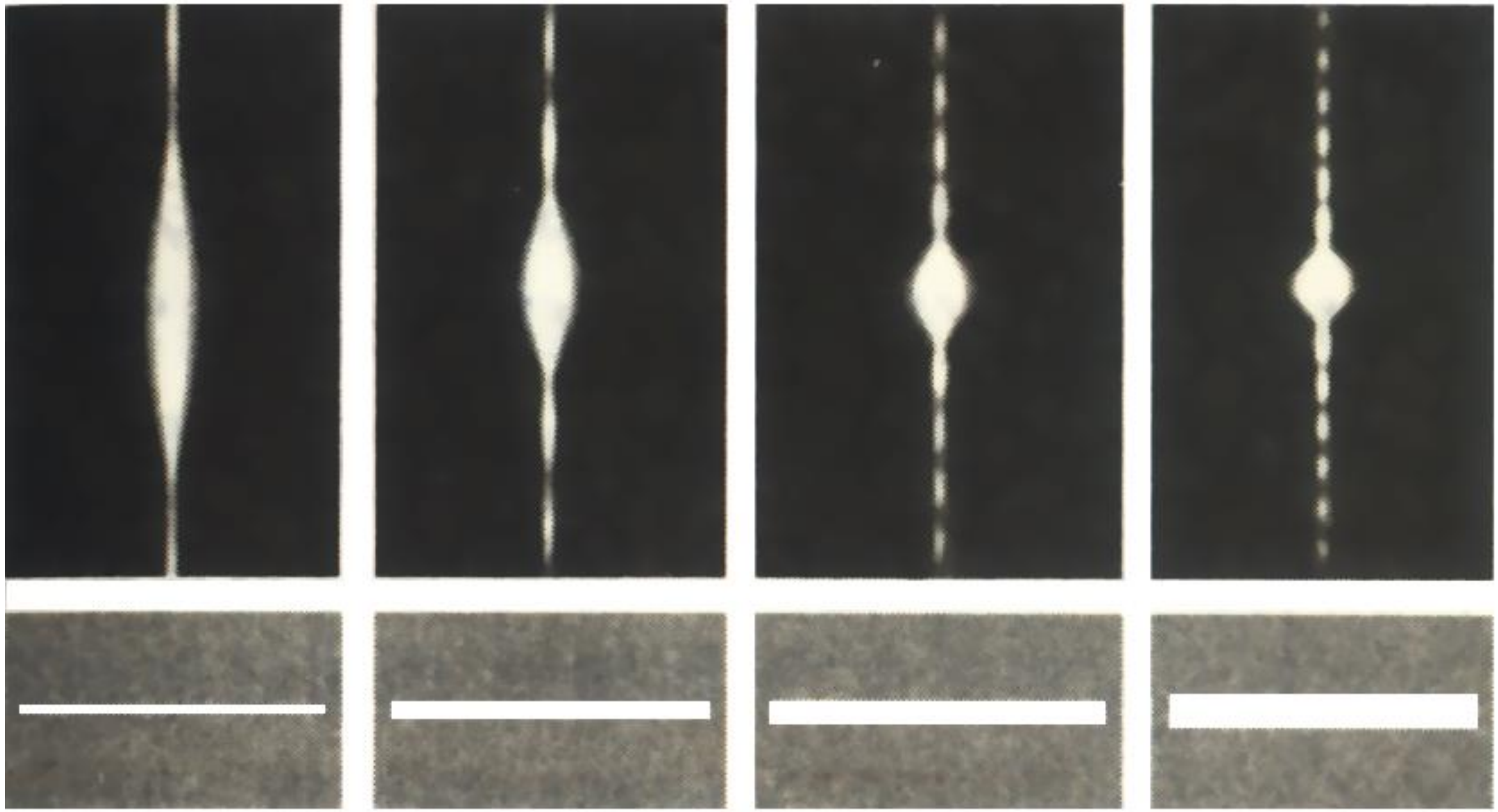
3.2 单缝衍射的强度公式和衍射图案

衍射图样



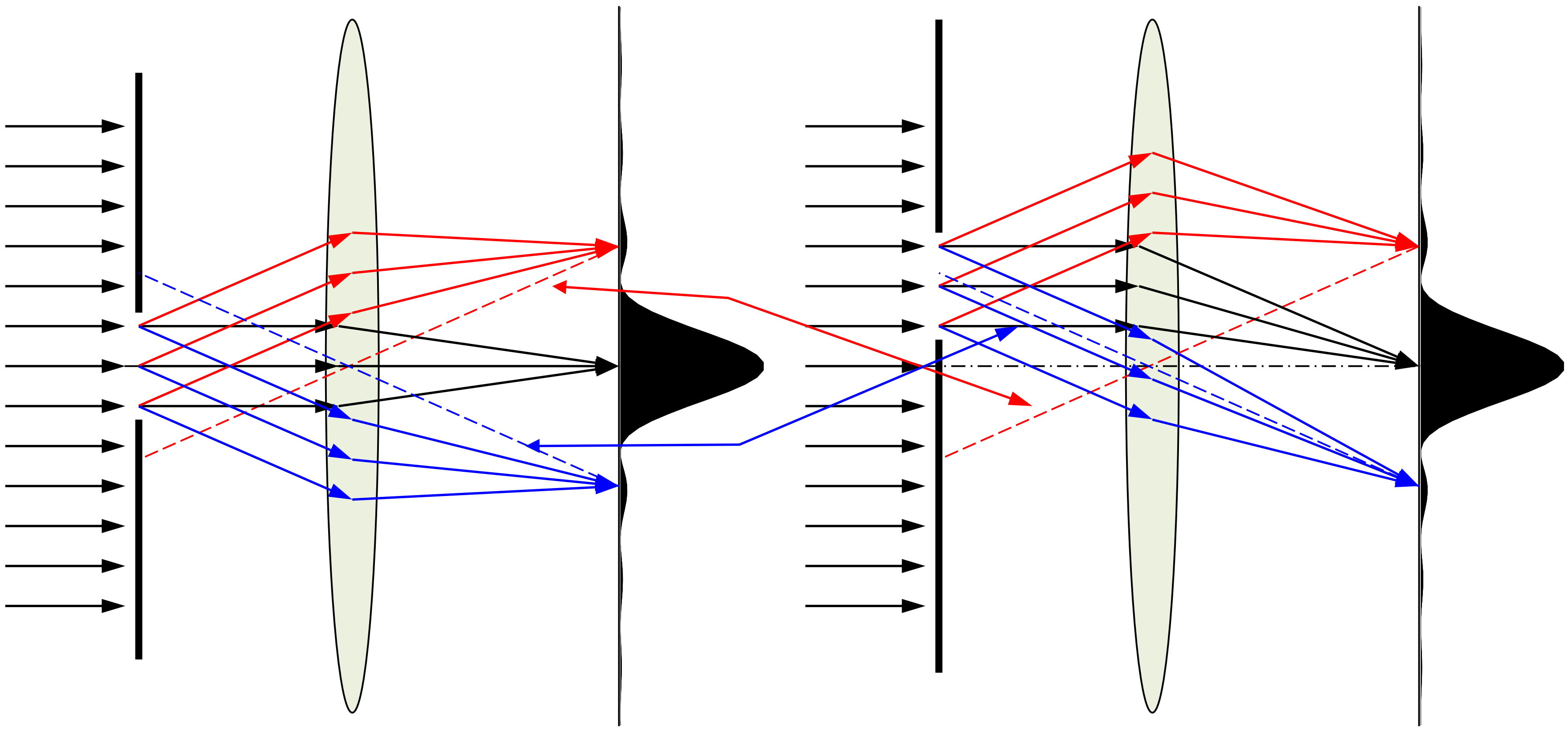
3.2 单缝衍射的强度公式和衍射图案

不同宽度狭缝的衍射图样



3.2 单缝衍射的强度公式和衍射图案

狭缝移动的影响



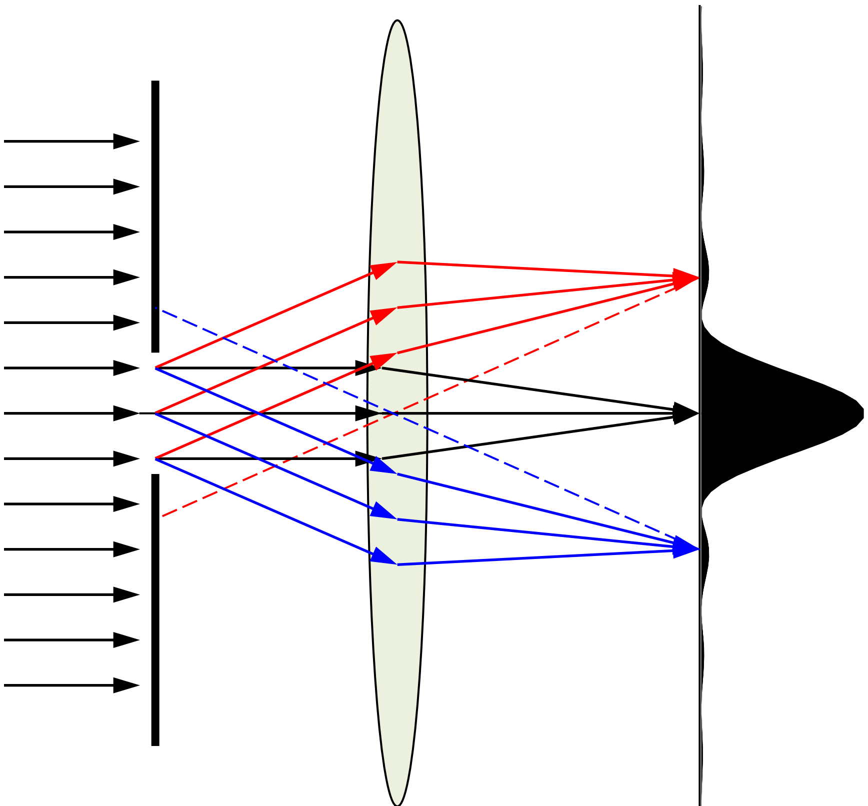
相位差由波列方向决定

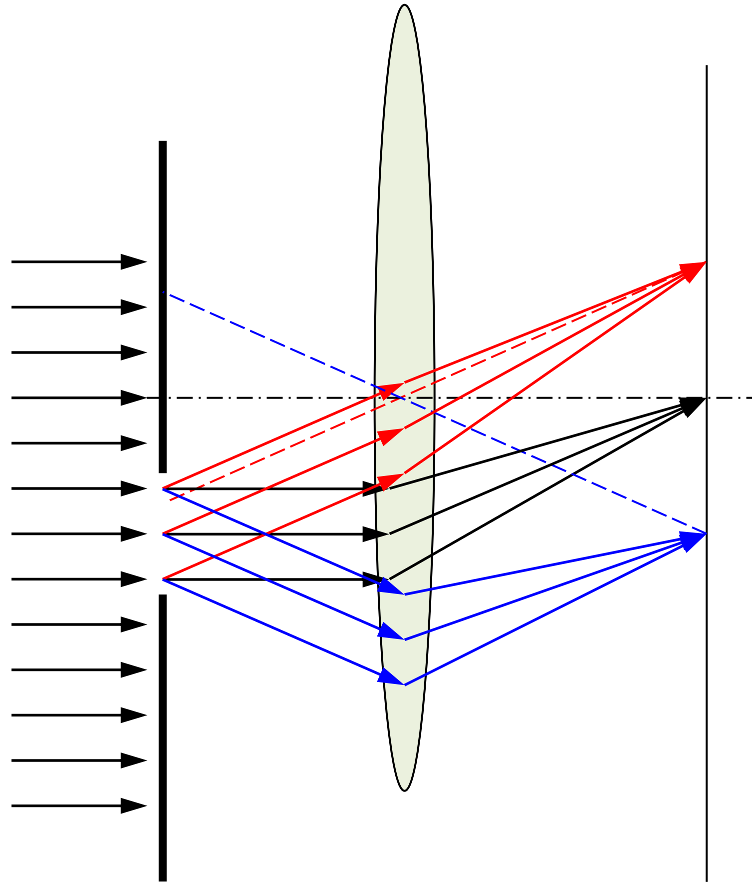
狭缝上下移动，衍射花样不变

焦平面上衍射强度也由波列方向决定

3.2 单缝衍射的强度公式和衍射图案

透镜移动的影响





相位差由波列方向决定

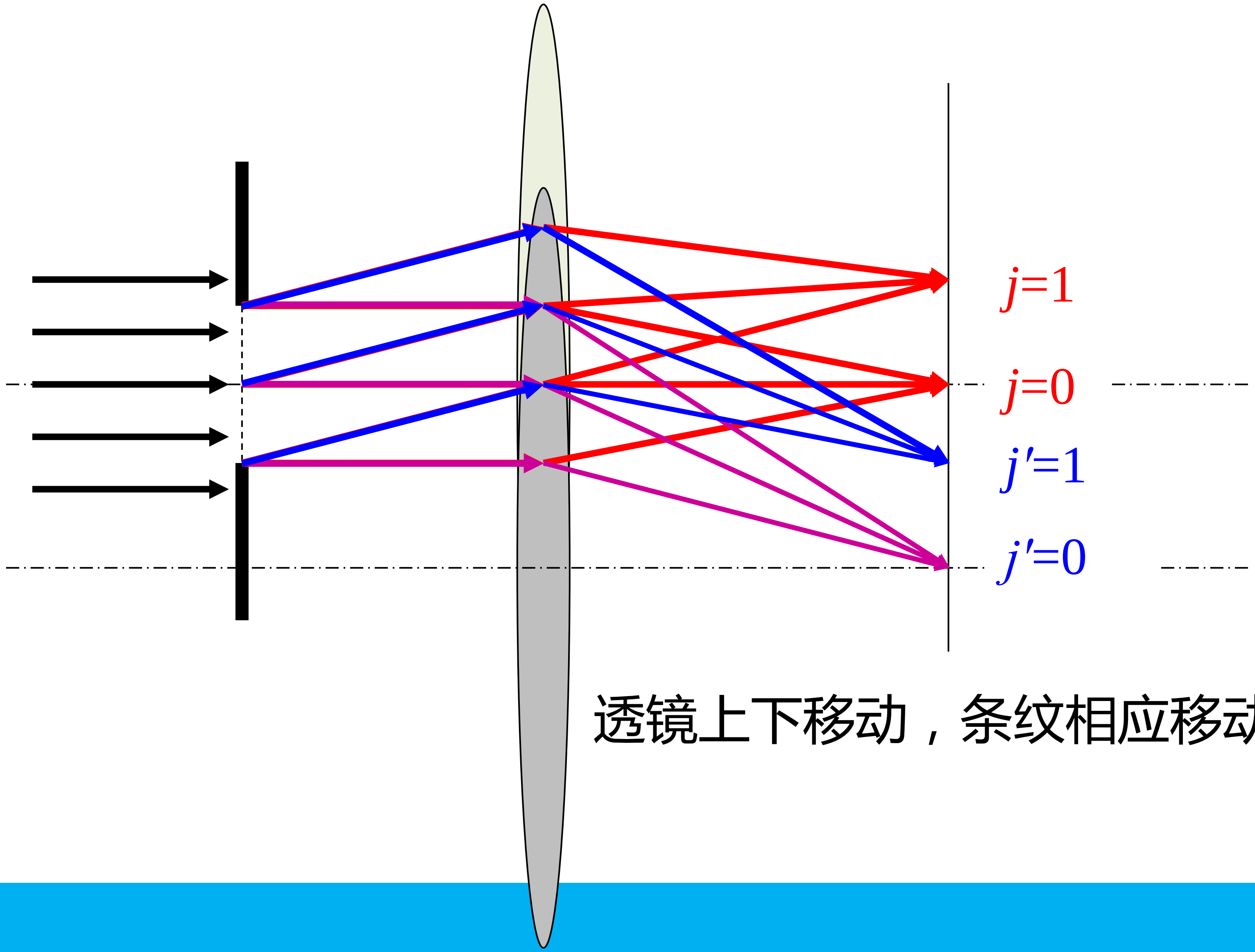
透镜光轴是系统的对称轴

焦平面上衍射强度也由波列方向决定

衍射花样随光轴移动

3.2 单缝衍射的强度公式和衍射图案

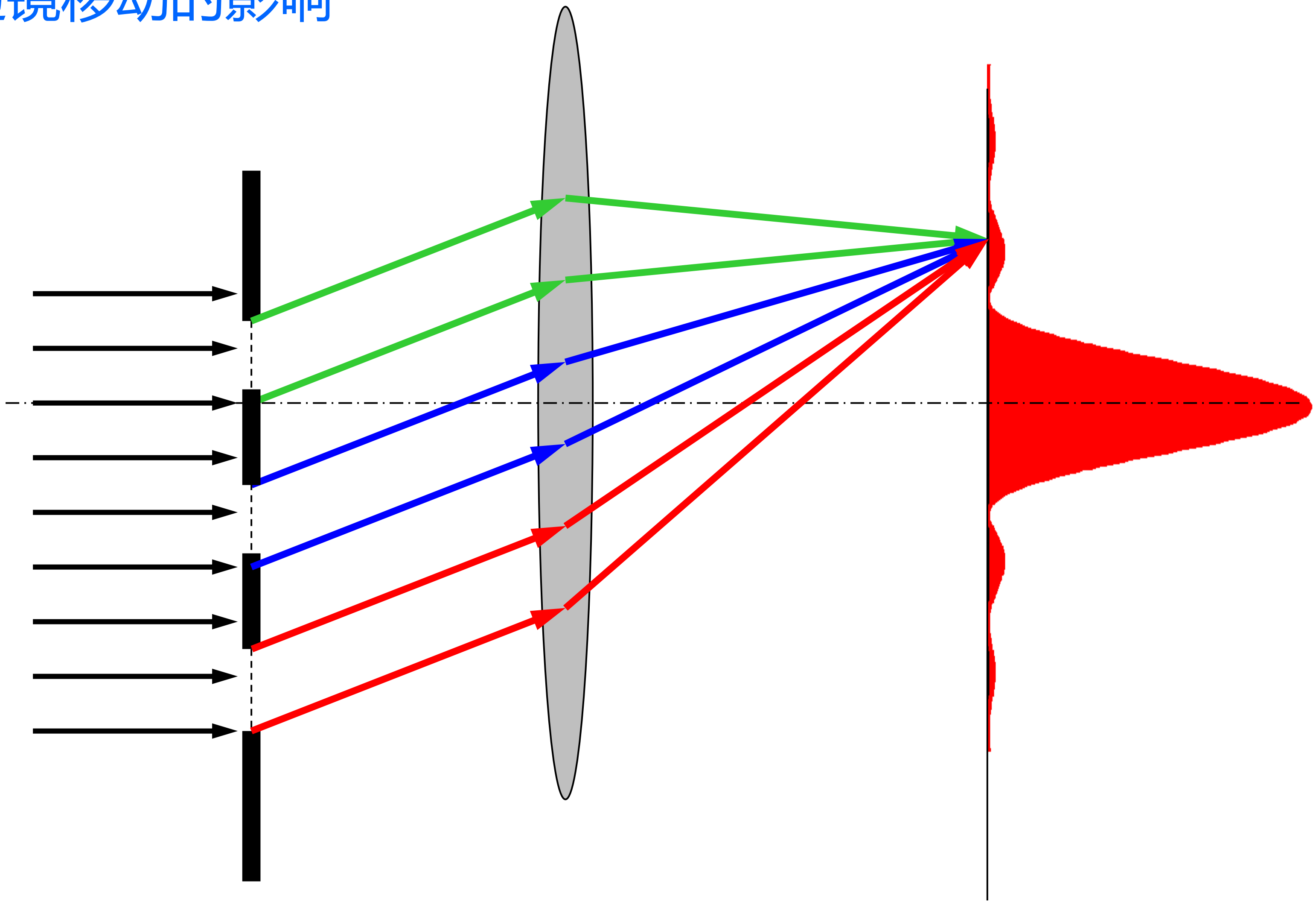
透镜移动的影响



透镜上下移动，条纹相应移动

3.2 单缝衍射的强度公式和衍射图案

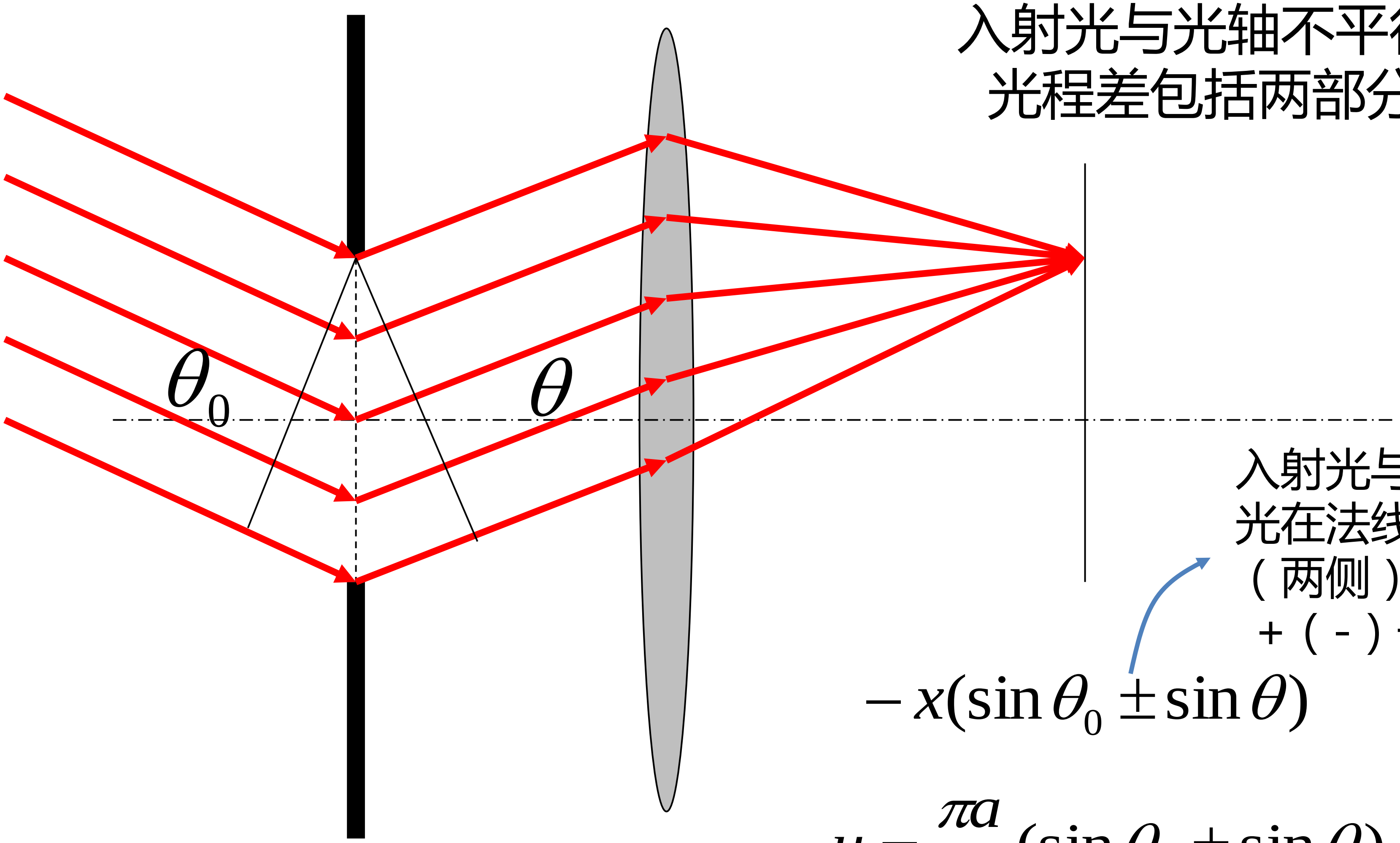
透镜移动的影响



相互平行的狭缝，衍射条纹完全重合

3.2 单缝衍射的强度公式和衍射图案

透镜移动的影响



入射光与光轴不平行，光程差包括两部分

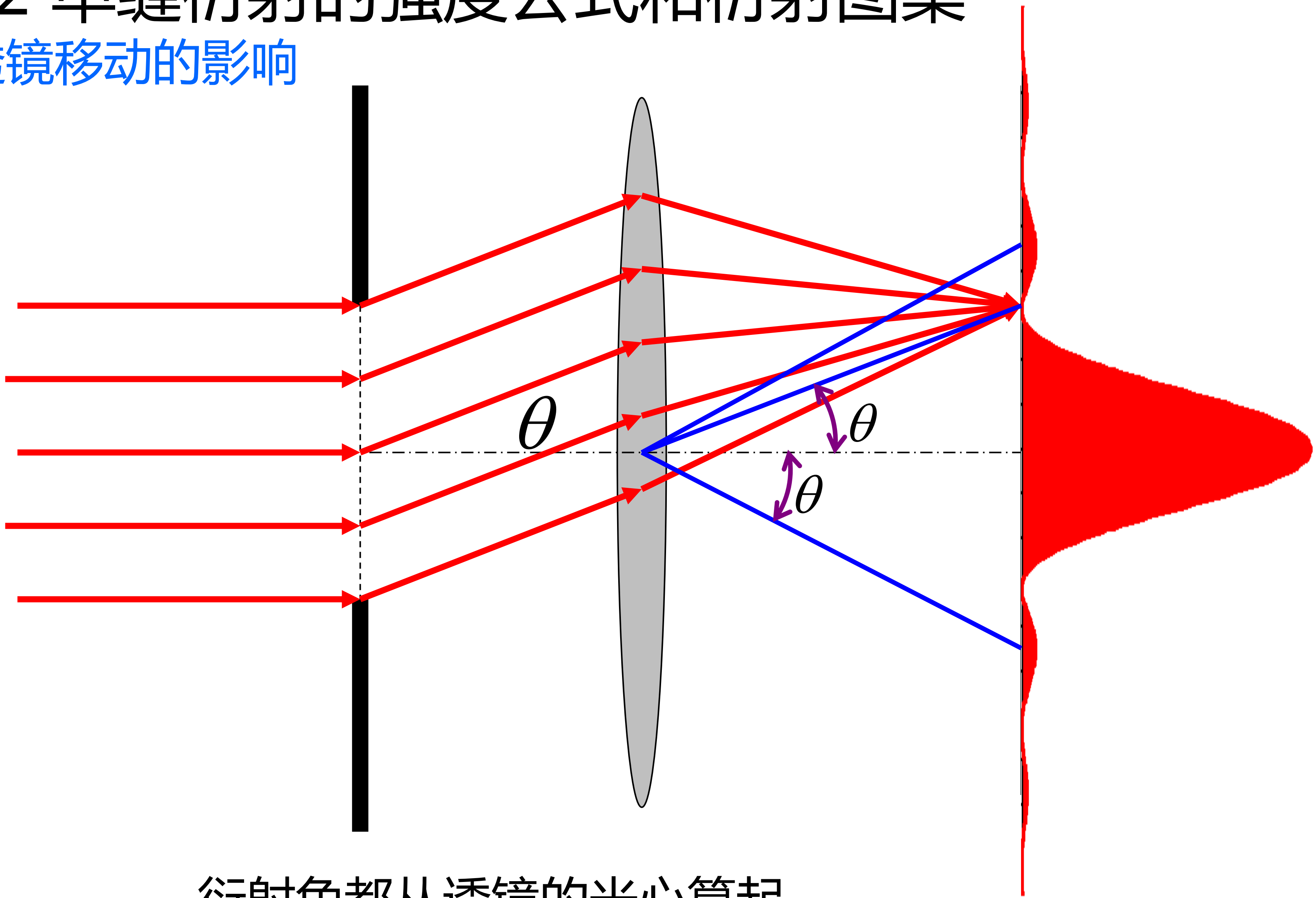
入射光与衍射光在法线同侧（两侧），取+（-）号。

$$-x(\sin\theta_0 \pm \sin\theta)$$

$$u = \frac{\pi a}{\lambda}(\sin\theta_0 \pm \sin\theta)$$

3.2 单缝衍射的强度公式和衍射图案

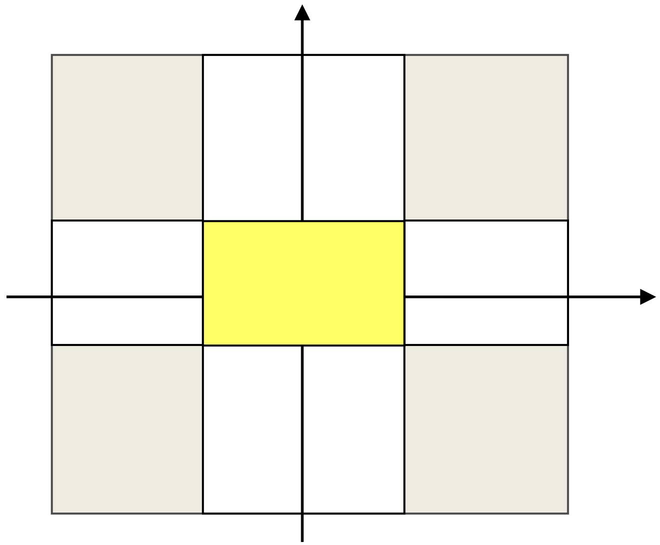
透镜移动的影响



衍射角都从透镜的光心算起

3.3 矩孔衍射的强度公式和衍射图案

夫琅禾费矩孔衍射的基本特性



矩孔：
两个正交狭缝的交集

矩孔衍射：
两个正交单狭缝衍射
的交集

- 同单缝相比，矩孔在两个相互垂直的方向上对光的传播进行限制。
- 两个方向的参数是相互独立的。
- 最后的结果应该是两个方向的单元衍射因子的乘积。

$$\tilde{U}(x,y)=\tilde{U}(x)\tilde{U}(y)$$

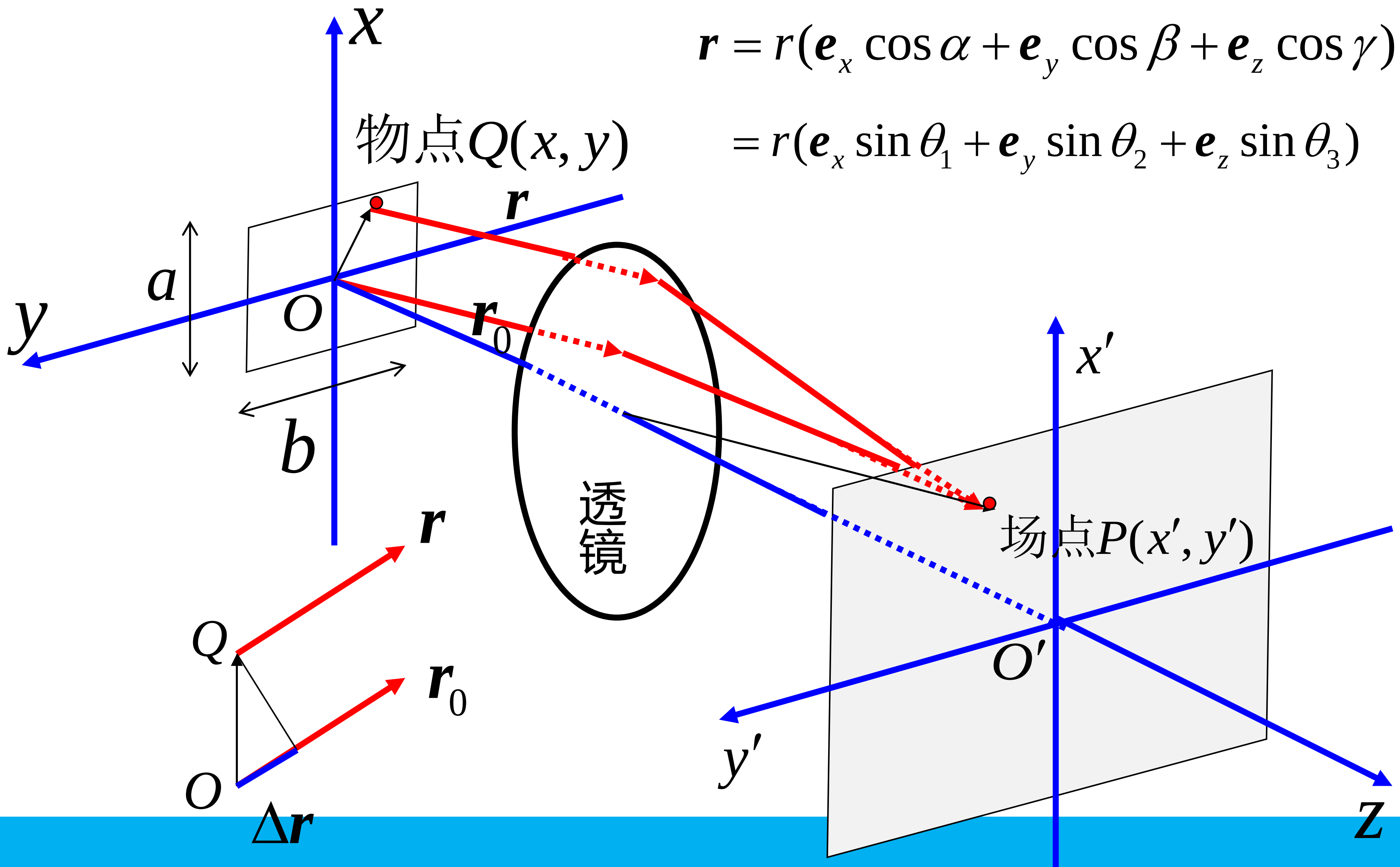
$$\tilde{U}(x)=\tilde{U}_x\frac{\sin u_x}{u_x}\qquad \tilde{U}(y)=\tilde{U}_y\frac{\sin u_y}{u_y}$$

3.3 矩孔衍射的强度公式和衍射图案

夫琅禾费矩孔衍射的分析

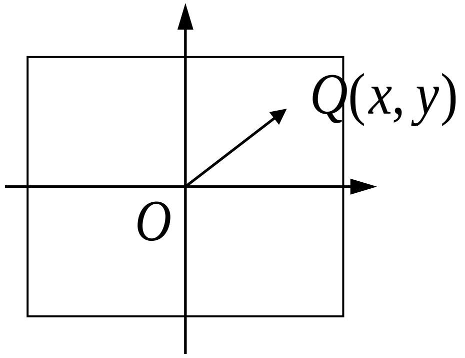
$$\boldsymbol{r} = r(\boldsymbol{e}_x \cos\alpha + \boldsymbol{e}_y \cos\beta + \boldsymbol{e}_z \cos\gamma)$$

$$= r(\boldsymbol{e}_x \sin\theta_1 + \boldsymbol{e}_y \sin\theta_2 + \boldsymbol{e}_z \sin\theta_3)$$



3.3 矩孔衍射的强度公式和衍射图案

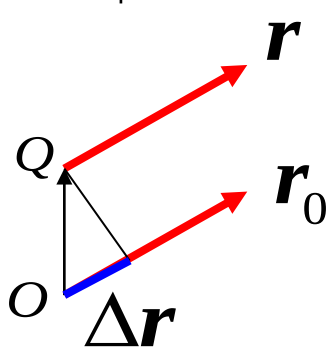
夫琅禾费矩孔衍射的分析



$$\Delta r = -\overline{OQ}\cdot\frac{\boldsymbol{r}_0}{r_0}$$

$$= -(x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y)\cdot(\boldsymbol{e}_x\sin\theta_1 + \boldsymbol{e}_y\sin\theta_2 + \boldsymbol{e}_z\sin\theta_3)$$

$$= -(x\sin\theta_1 + y\sin\theta_2)$$



$$r = r_0 + \Delta r = r_0 - (x\sin\theta_1 + y\sin\theta_2)$$

$$\tilde{U}(P) = K\iint \tilde{U}_0(x,y)F(\theta_0,\theta)\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

满足近轴条件，倾斜因子为1

$$\tilde{U}(P) = K\tilde{U}_0(0,0)\iint_{\Sigma}\frac{\mathrm{e}^{ikr_0 - ik(x\sin\theta_1 + y\sin\theta_2)}}{r_0}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$u_1 = \frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta_1 \quad u_2 = \frac{\pi b}{\lambda}\sin\theta_2$$

$$= K\tilde{U}_0(0,0)\frac{\mathrm{e}^{ikr_0}}{r_0}\int_{-a/2}^{a/2}\mathrm{e}^{-ikx\sin\theta_1}\mathrm{d}x\int_{-b/2}^{b/2}\mathrm{e}^{-iky\sin\theta_2}\mathrm{d}y = K\tilde{U}_0(0,0)ab\frac{\mathrm{e}^{ikr_0}}{r_0}\frac{\sin u_1}{u_1}\frac{\sin u_2}{u_2}$$

3.3 矩孔衍射的强度公式和衍射图案

夫琅禾费矩孔衍射的前强度和衍射图样

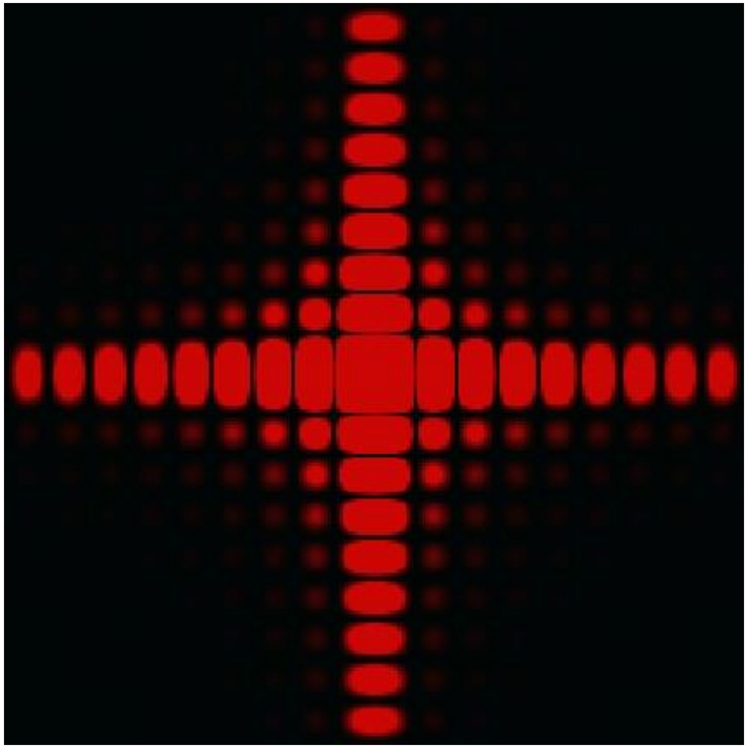
$$\tilde{U}(P) = K\tilde{U}_0(0,0)ab\frac{e^{ikr_0}}{r_0}\frac{\sin u_1}{u_1}\frac{\sin u_2}{u_2}$$

衍射强度分布

$$I(P) = I_0\left(\frac{\sin u_1}{u_1}\right)^2\left(\frac{\sin u_2}{u_2}\right)^2$$

$$I_0 = \left| K\tilde{U}_0(0,0)ab\frac{e^{ikr_0}}{r_0}\right|^2$$

矩孔发出的光波在焦点 F处产生的光强



3.4 单缝衍射因子的特点

1. 极值点

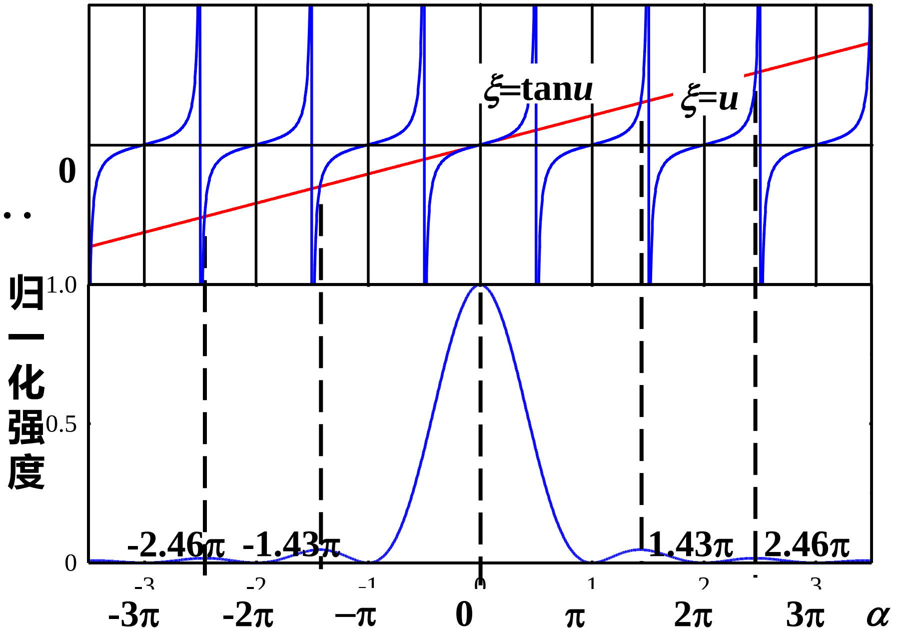
$$\tilde{U}(\theta)=\tilde{U}_0\frac{\sin u}{u} \qquad u=\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta$$

极大值

$$\left(\frac{\sin u}{u}\right)'=0 \qquad \frac{u\cos u-\sin u}{u^2}=0 \qquad \tan u=u$$

$$u=\pm1.43\pi,\pm2.46\pi,\pm3.47\pi,\cdots$$

$$\sin\theta=\pm1.43\frac{\lambda}{a},\pm2.46\frac{\lambda}{a},\pm3.47\frac{\lambda}{a},\cdots$$



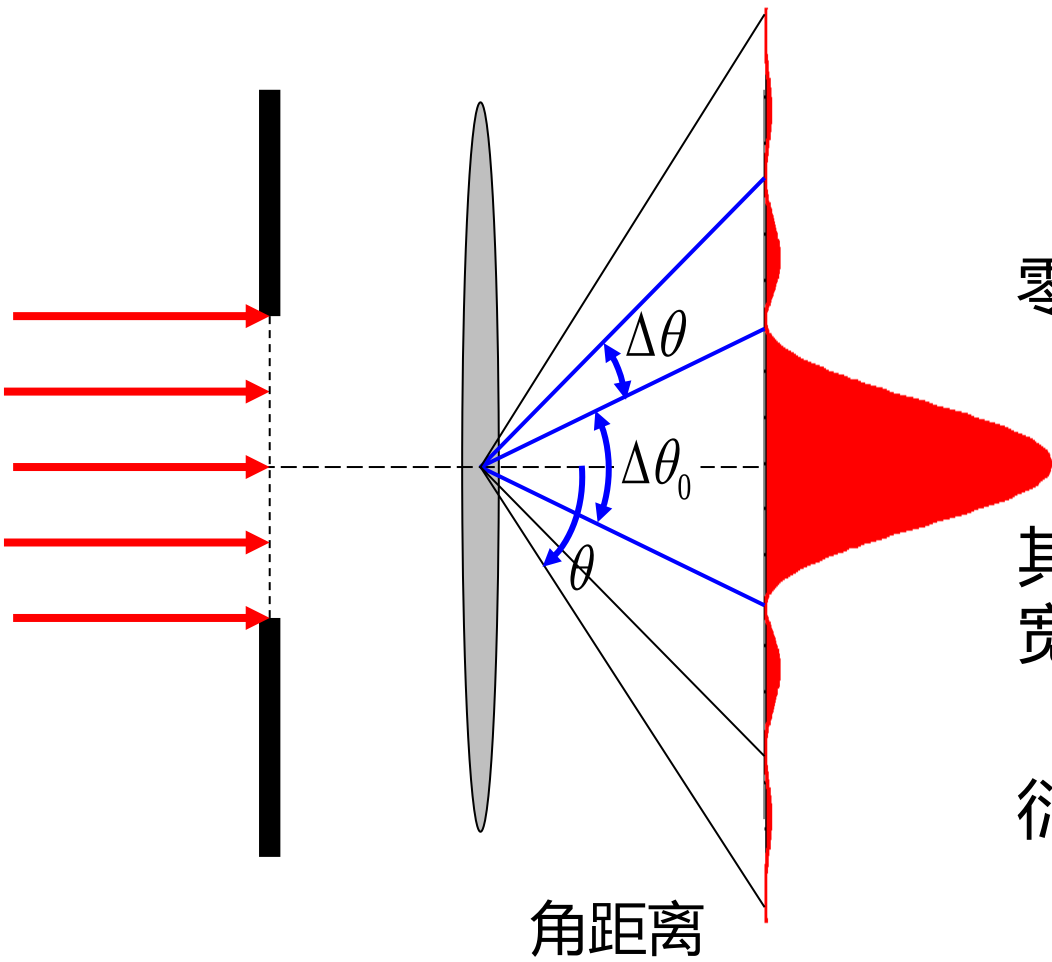
极小值

$$u=\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta=j\pi \quad j\neq0$$

$$\sin\theta=\pm1\frac{\lambda}{a},\pm2\frac{\lambda}{a},\pm\cdots,\pm j\frac{\lambda}{a},\pm(j+1)\frac{\lambda}{a},\cdots$$

3.4 单缝衍射因子的特点

2. 条纹角宽度（相邻暗条纹之间的角距离）



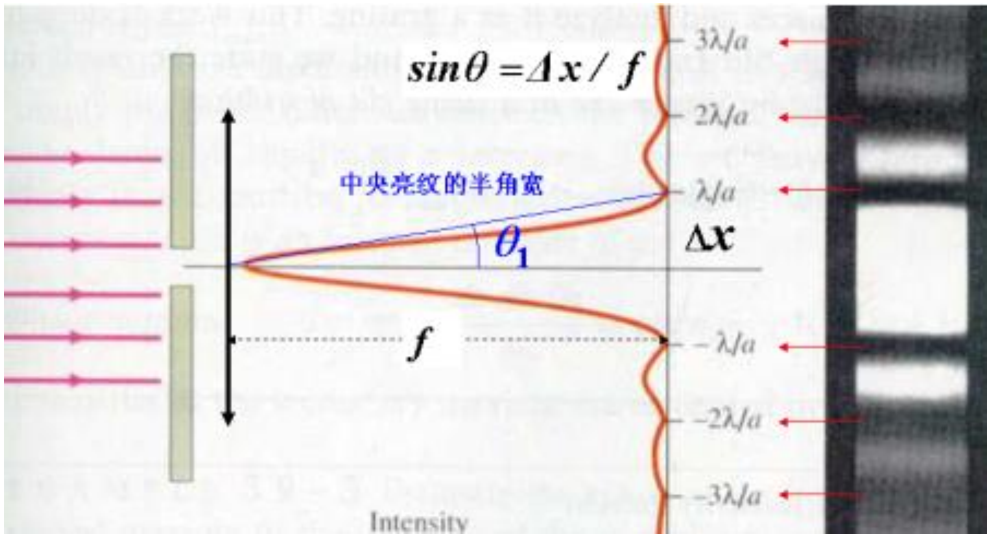
零级主极大角宽度 $\Delta\theta = 2\dfrac{\lambda}{a}$

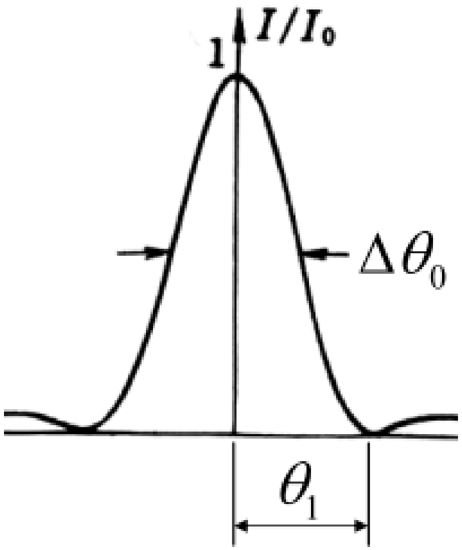
其它高级次条纹角宽度 $\Delta\theta = \dfrac{\lambda}{a}$

衍射的缝宽的反比关系

3.4 单缝衍射因子的特点

例：单缝夫琅和费衍射实验中，照明光波长为600nm，透镜焦距为200mm，单缝宽度为15μm，求零级衍射斑的半角宽度和屏幕上显示的零级斑的几何宽度。





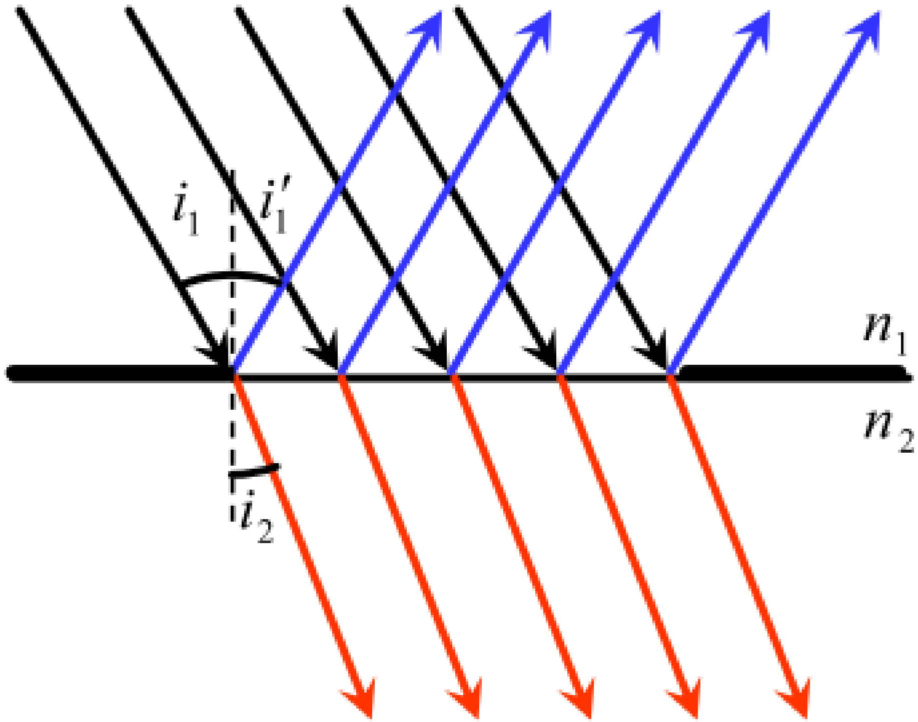
$$\Delta\theta_0 = \frac{\lambda}{a} = \frac{600\times10^{-9}}{15\times10^{-6}} = 0.04rad$$

$$l \approx 2f\Delta\theta_0 = 2\times200mm\times0.04 = 1.6mm$$

3.5 衍射反比关系的意义

1. 几何光学极限

反射波场、透射波场都是平行光斜入射的矩孔衍射，其零级主极大就是几何光学反射和透射光的方向。



3.5 衍射反比关系的意义

2. 波场中的能量分布与参与相干迭加波的数目（面积）有关：

一个点源：各向同性

两个点源：某些方向出现干涉极大

……

参与干涉的波源数目越多，出现干涉极大的条件越苛刻，能量也越集中在某个特定的方向上。

3. 衍射的放大作用

测量单缝或细丝的宽度或直径

本节重点

1. 夫琅禾费单缝衍射和矩孔衍射的强度计算。
2. 单缝衍射因子的特性。

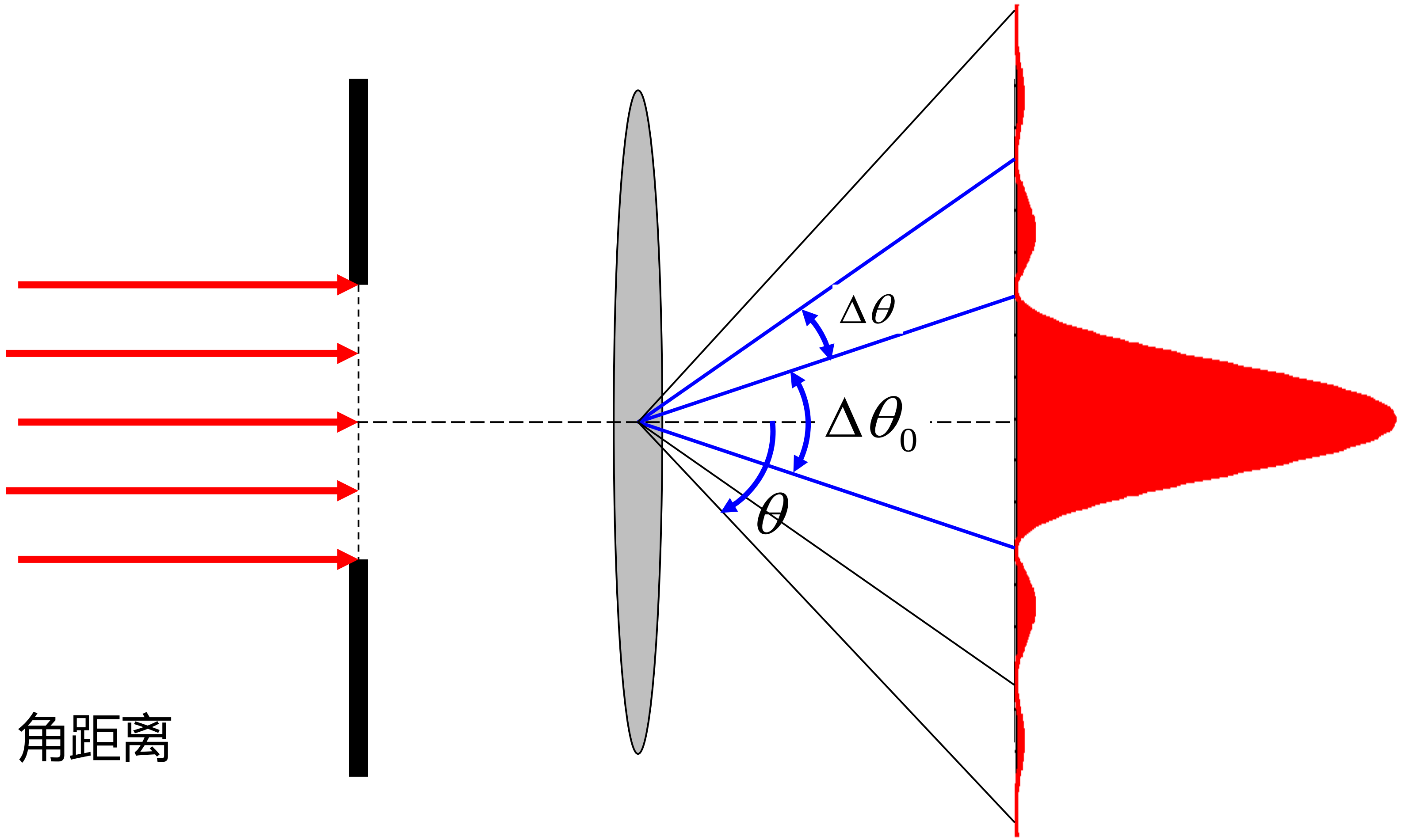
作业

P224-225：1，4

重排版：P164：1，4

3.4 单缝衍射因子的特点

2. 条纹角宽度（相邻暗条纹之间的角距离）



角距离