

第四章 光的衍射

第四节

光学仪器的像分辨本领

第四节 光学仪器的像分辨本领

4.1 夫琅禾费圆孔衍射

4.2 望远镜的分辨本领 瑞利判据

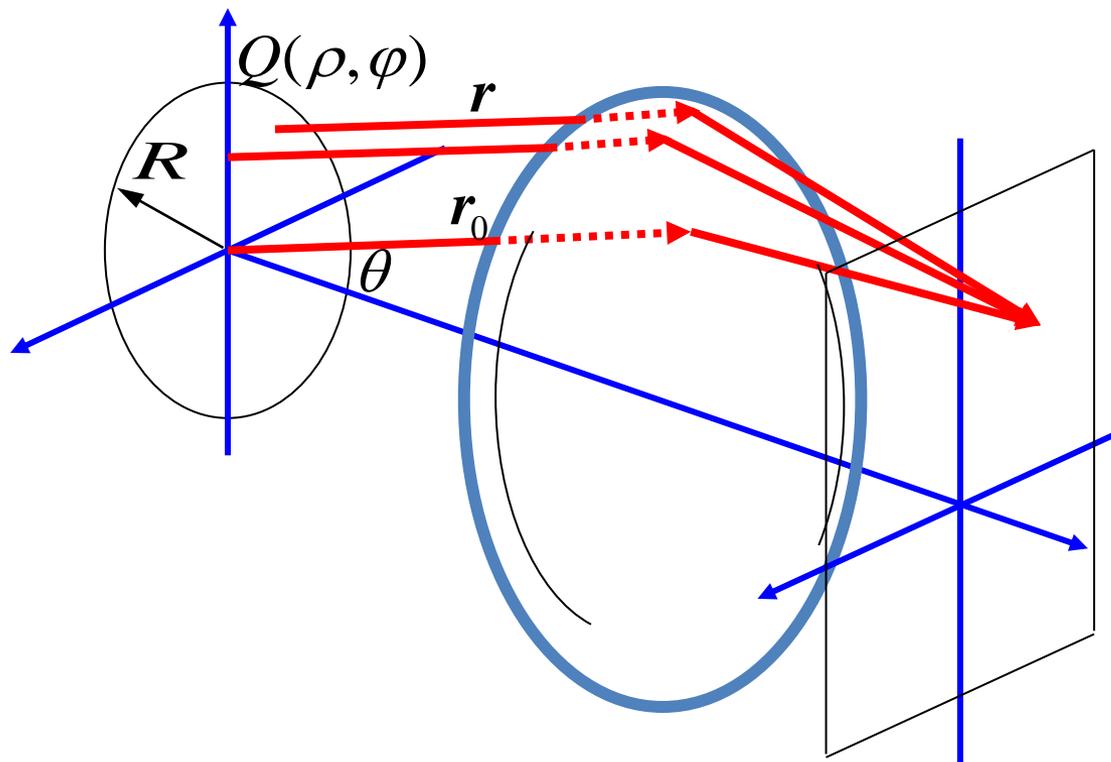
4.3 球面波照明下像平面上接收的衍射

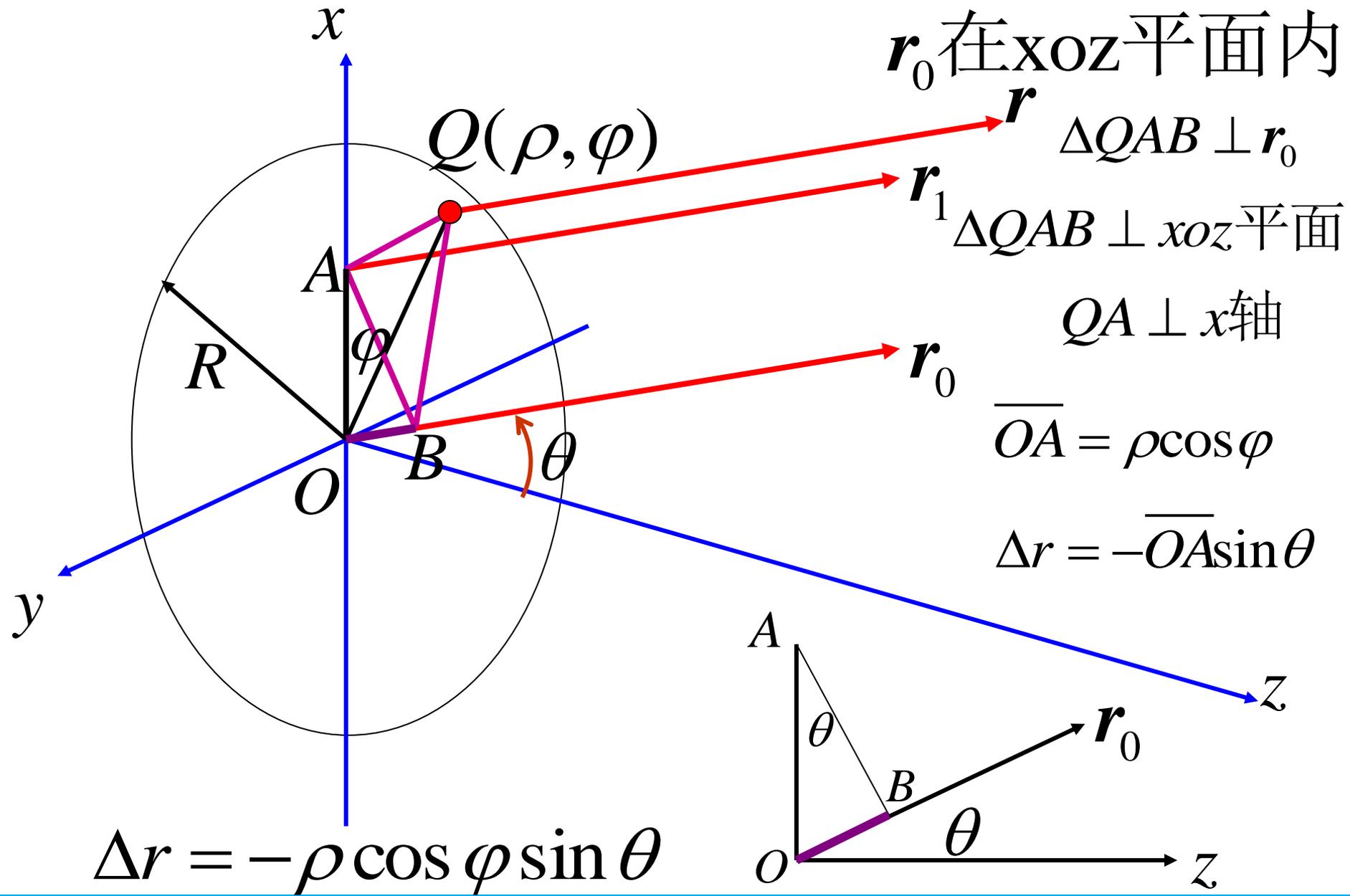
4.4 显微镜的分辨本领

4.5 衍射的一些总结

4.1 夫琅禾费圆孔衍射

平行入射光，通过半径为 R 的圆孔，汇聚在透镜的像方焦平面上。





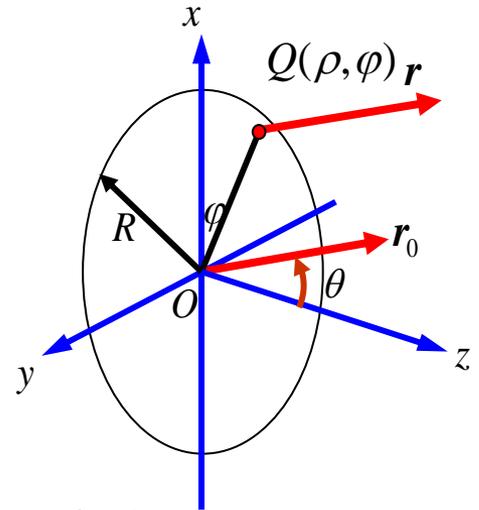
4.1 夫琅禾费圆孔衍射

圆孔衍射的积分计算

$$\tilde{U}(P) = K \iint_{\Sigma} \tilde{U}_0(\rho, \varphi) F(\theta_0, \theta) \frac{e^{ikr_0 - ik\rho \cos\varphi \sin\theta}}{r} d\Sigma$$

$$= K \tilde{U}_0(0, 0) \frac{e^{ikr_0}}{r_0} \iint_{\Sigma} e^{-ik\rho \cos\varphi \sin\theta} \rho d\varphi d\rho$$

$$= K \tilde{U}_0(0, 0) \frac{e^{ikr_0}}{r_0} \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \rho \cos\varphi \sin\theta\right) d\varphi$$



$$\text{令 } m = 2\pi R \sin\theta / \lambda = kR \sin\theta$$

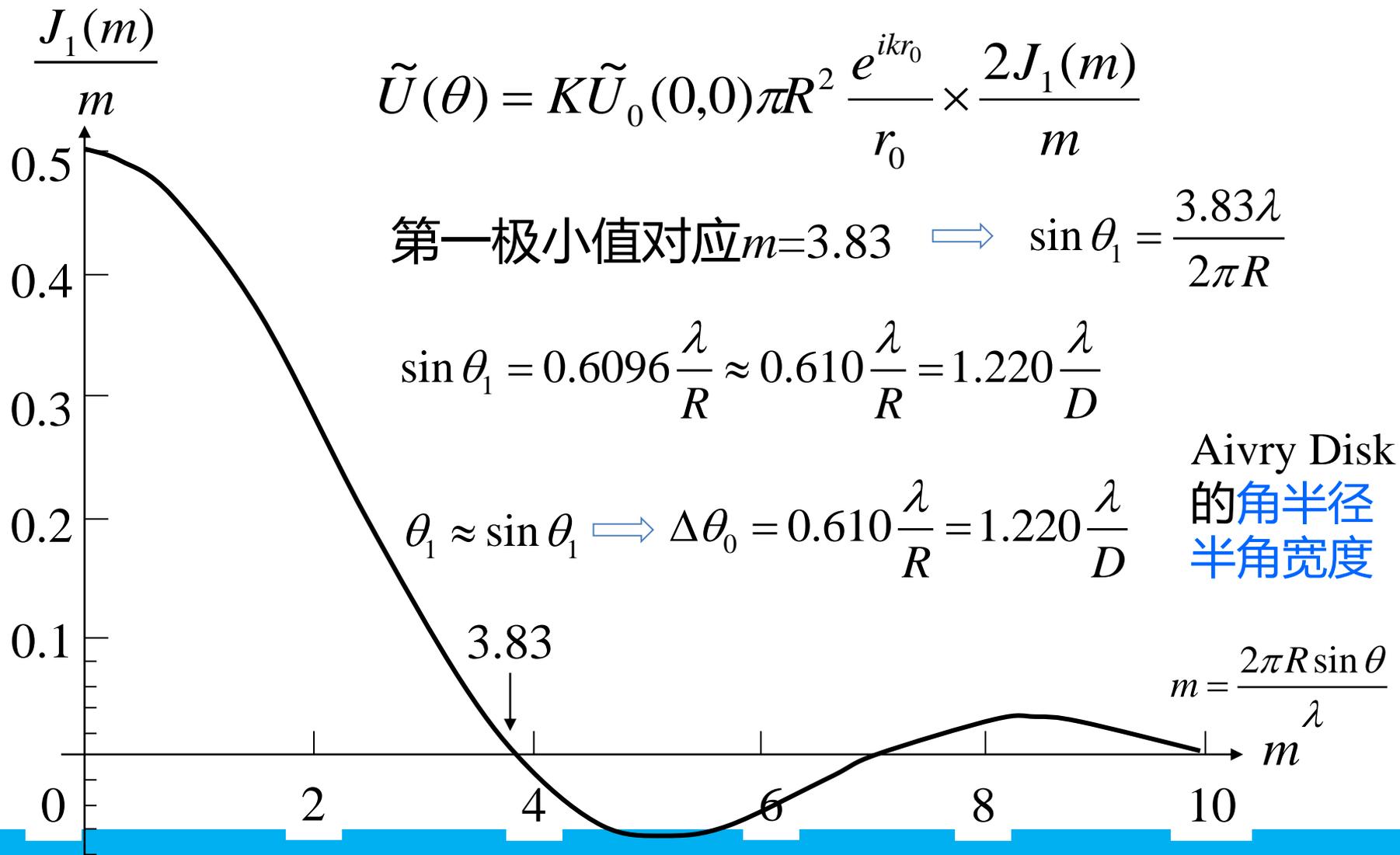
$$\tilde{U}(P) = K \tilde{U}_0(0, 0) \frac{e^{ikr_0}}{r_0} \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} \cos\left(m \frac{\rho}{R} \cos\varphi\right) d\varphi$$

$$\tilde{U}(\theta) = K \tilde{U}_0(0, 0) \pi R^2 \frac{e^{ikr_0}}{r_0} \times \frac{2J_1(m)}{m} \quad J_1(m) : \text{一阶贝塞尔函数}$$

$$\frac{2J_1(m)}{m} = \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k'}}{(k'+1)!k'!} \left(\frac{m}{2}\right)^{2k'} = \frac{m}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{m}{2}\right)^2 + \frac{1}{3} \left[\frac{\left(\frac{m}{2}\right)^3}{2!}\right]^2 - \frac{1}{4} \left[\frac{\left(\frac{m}{2}\right)^4}{3!}\right]^2 + \dots \right\}$$

4.1 夫琅禾费圆孔衍射

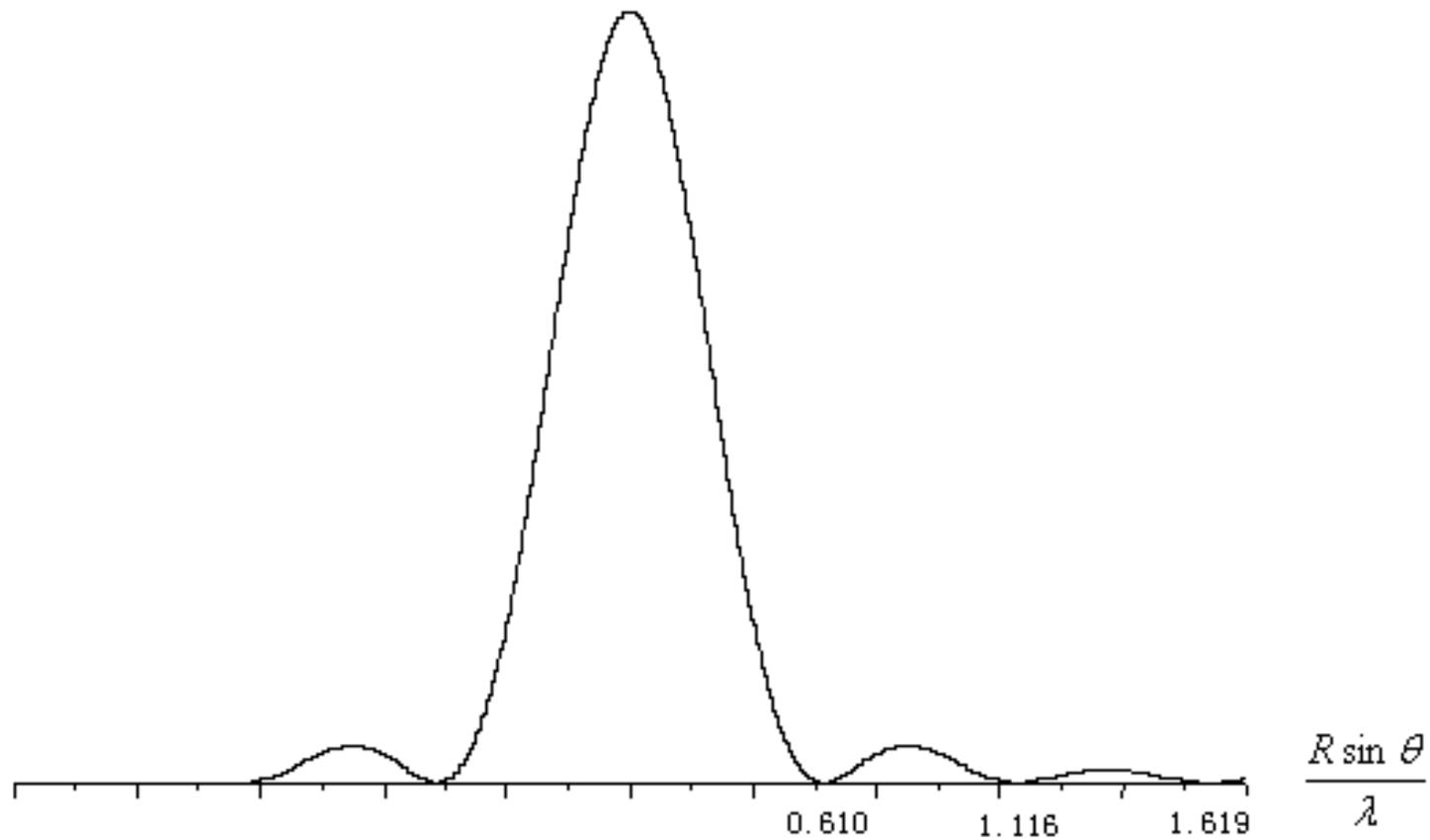
复振幅分布



4.1 夫琅禾费圆孔衍射

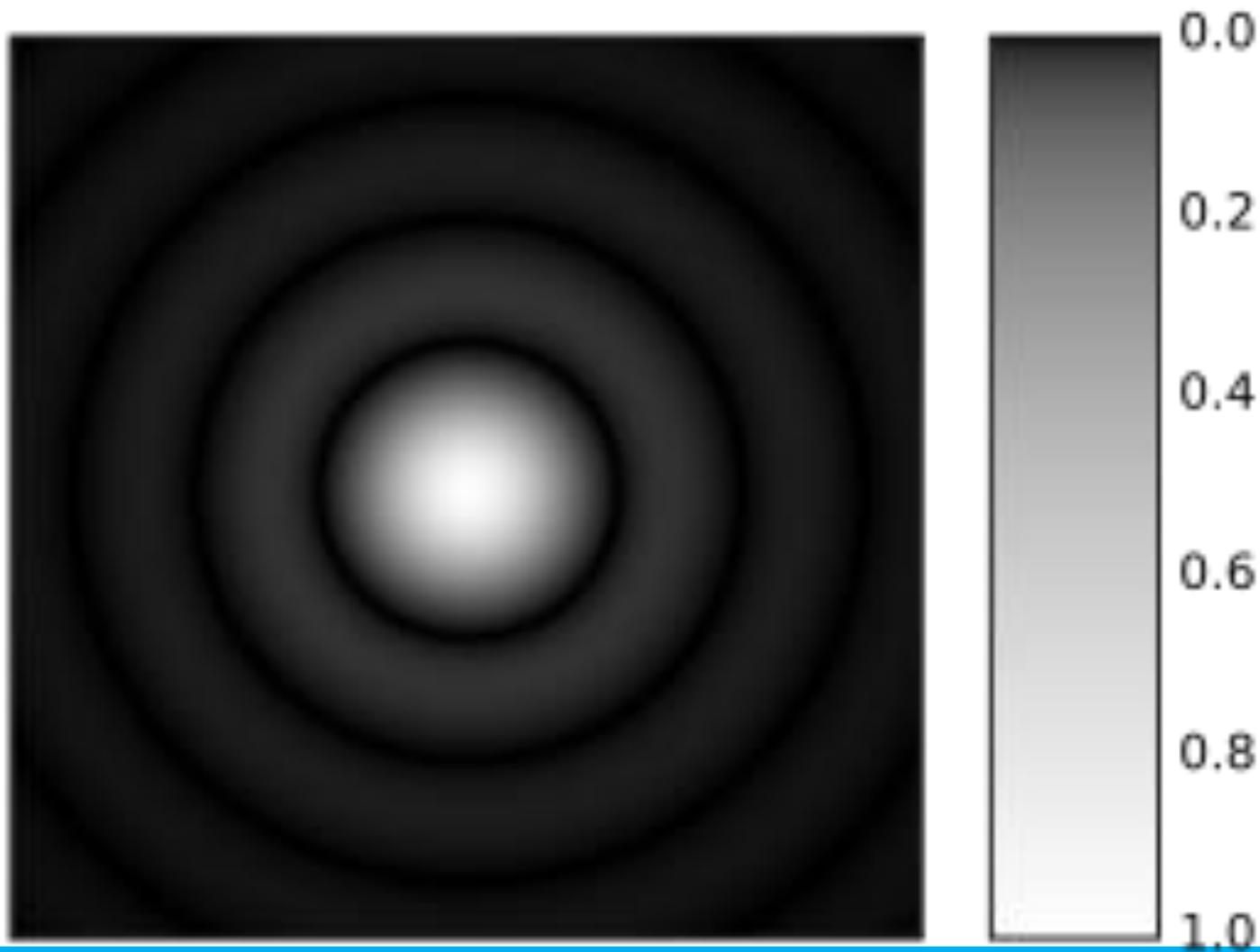
光强分布

$$I(\theta) = I_0 \left[\frac{2J_1(m)}{m} \right]^2$$



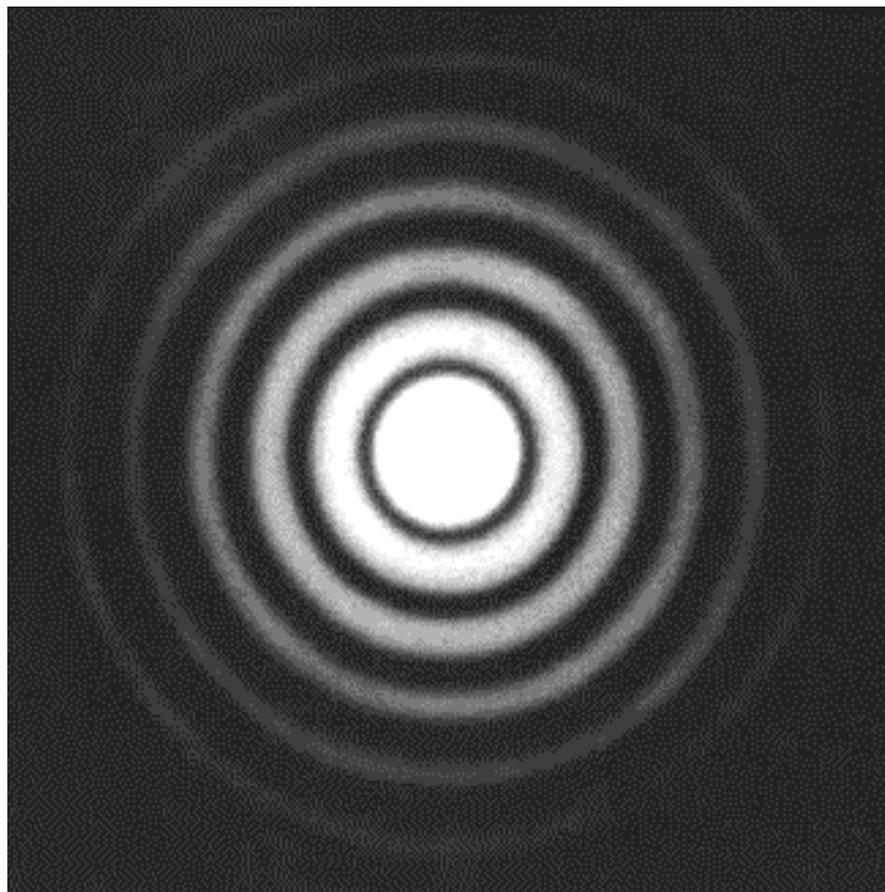
4.1 夫琅禾费圆孔衍射

圆孔的夫琅禾费衍射



4.1 夫琅禾费圆孔衍射

圆孔的夫琅禾费衍射



单色光



白光

4.1 夫琅禾费圆孔衍射

圆孔夫琅禾费衍射图样的特点

- 同心圆环，明暗交错，不等距。
- 中央主极大（零级衍射斑）：Aivry斑，占总强度的84%，半角宽度 $\Delta\theta_0$

$$\Delta\theta_0 = 0.61 \frac{\lambda}{R} = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

- 圆孔直径为 D ，透镜焦距 f ，则Aivry斑半径 Δl

$$\Delta l = f \cdot \theta_0 = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

4.1 夫琅禾费圆孔衍射

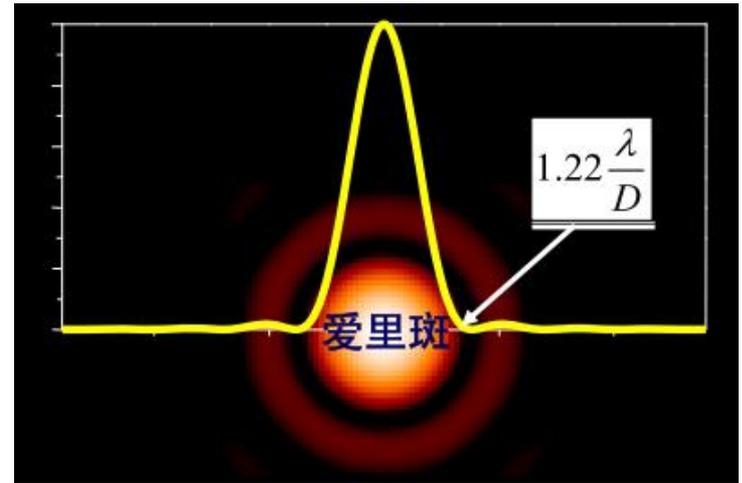
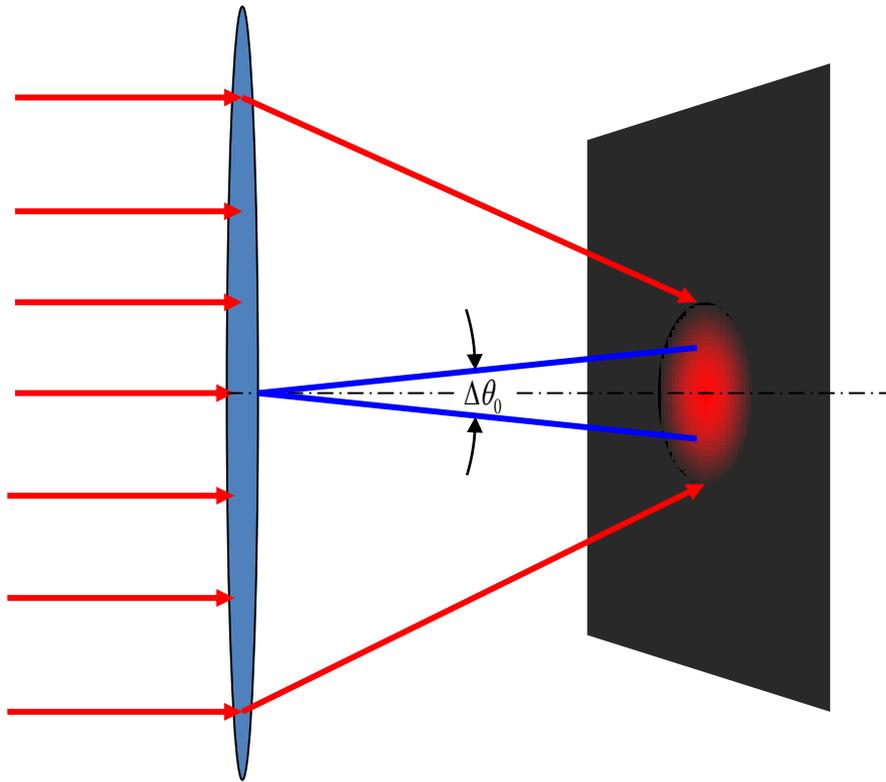
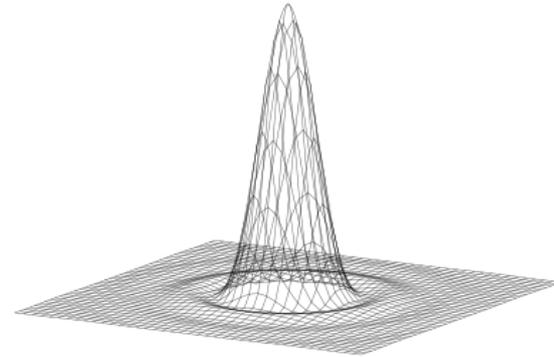
艾里斑 (Airy Disk -- G.B. Airy , 1835)

$$\text{半角宽} : \Delta\theta_0 = 0.61 \frac{\lambda}{R} = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

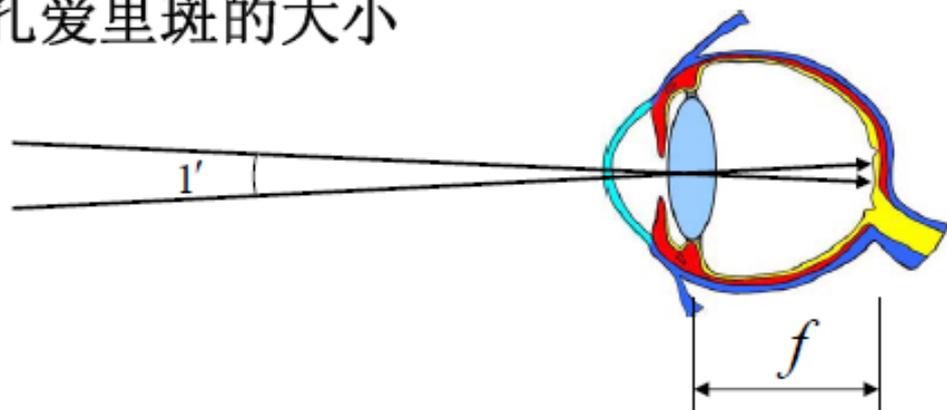
反比关系



George Biddell Airy



例：估算人眼瞳孔爱里斑的大小



取波长为 $0.55\mu\text{m}$ ，瞳孔直径在2-8mm之间，取2mm

$$\Delta\theta_0 = 1.22 \frac{\lambda}{D} = 3.4 \times 10^{-4} \text{ rad} = 1'$$

婴儿眼睛的焦距 $\sim 16\text{mm}$ ，成人 $\sim 24\text{mm}$ ，取 $f=20\text{mm}$

爱里斑直径为

$$D = 2f\Delta\theta_0 \approx 14\mu\text{m}$$

和视网膜上视觉细胞的密度正好匹配

例：1mm直径HeNe激光的衍射发射角

$$\Delta\theta_0 = 1.22 \frac{\lambda}{D} = 7.7 \times 10^{-4} \text{ rad} = 2.7'$$

10km处的光斑直径：D=14.4m

绝对平行的光是不存在的！

4.2 望远镜的分辨本领 瑞利判据

the Rayleigh criterion

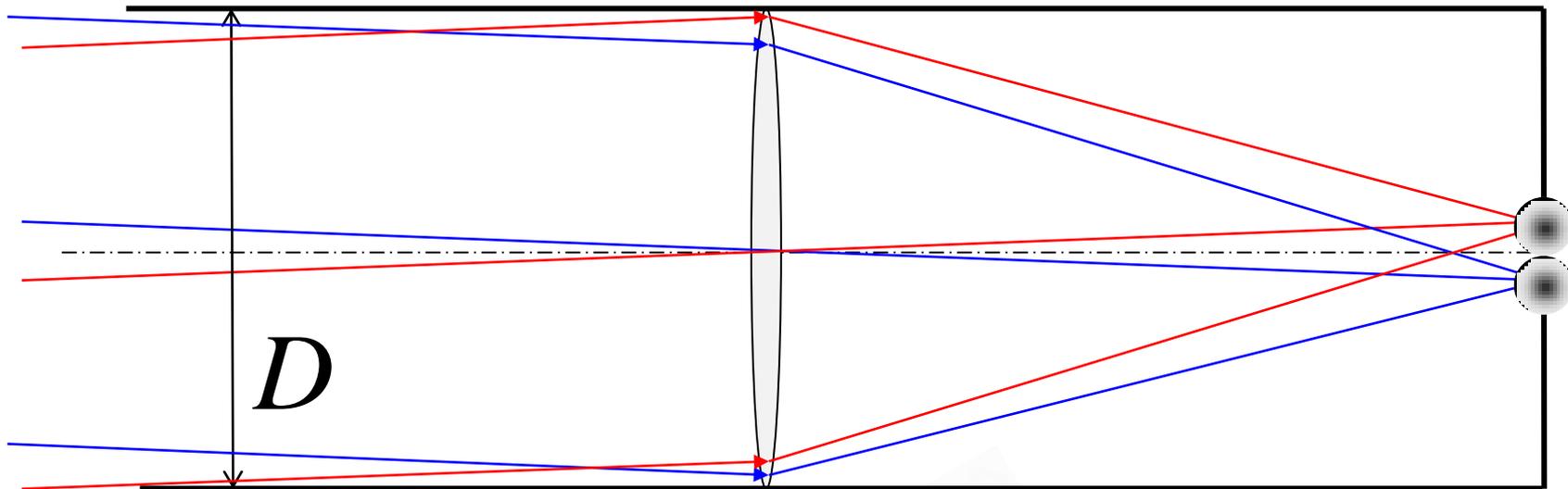
- 仰望星空，为什么它们看起来大小差不多
- 平行光经透镜成象，由于衍射效应，总有一个Aivry斑，而不是一个几何点。
- 两束光，则有两个Aivry斑。
- 两个物所成的Aivry斑如靠得很近，可能无法分辨是一个还是两个。



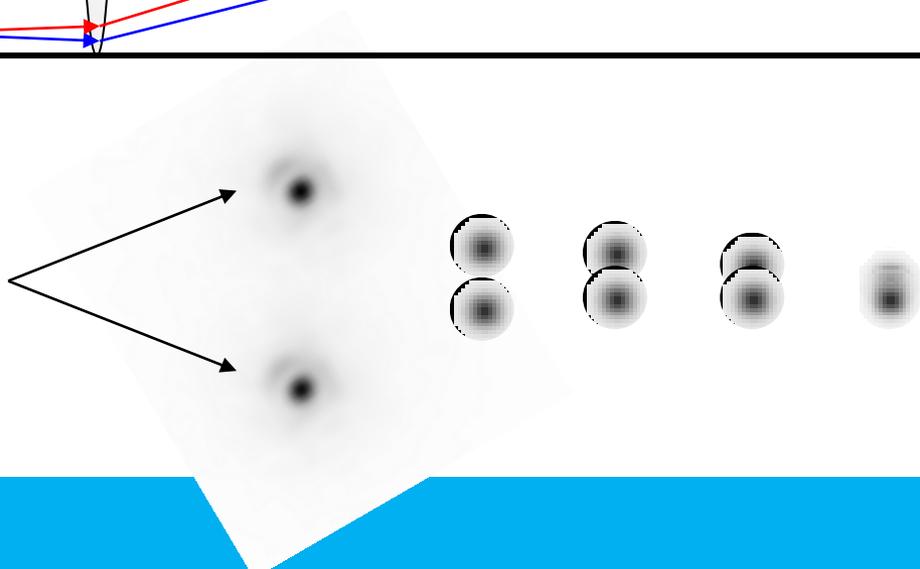
4.2 望远镜的分辨本领 瑞利判据

the Rayleigh criterion

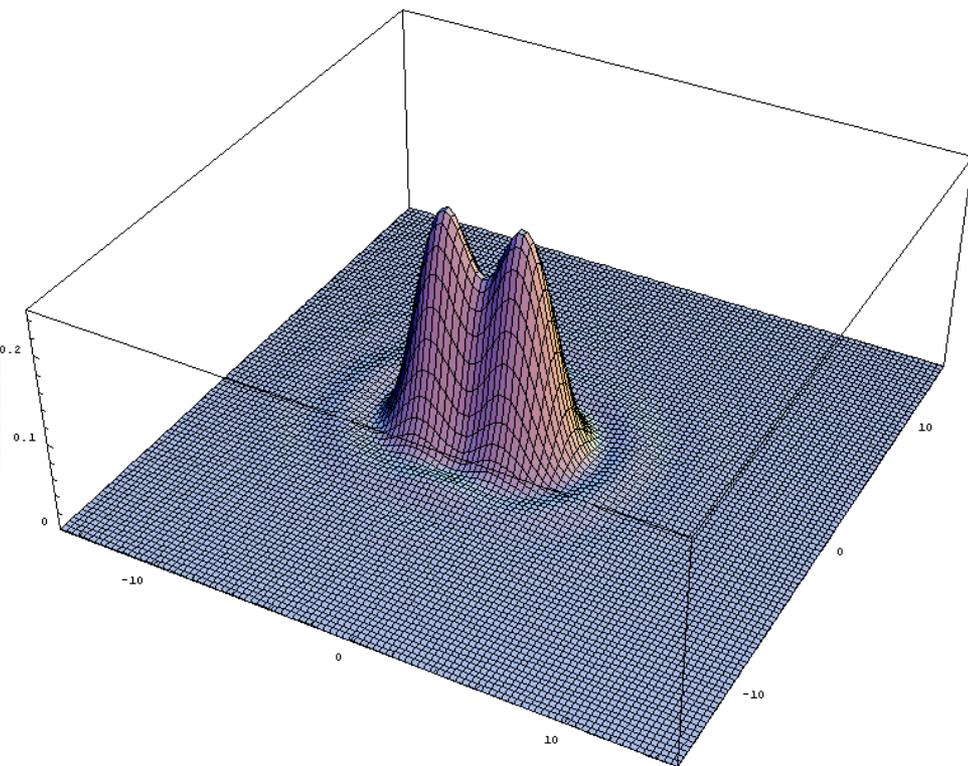
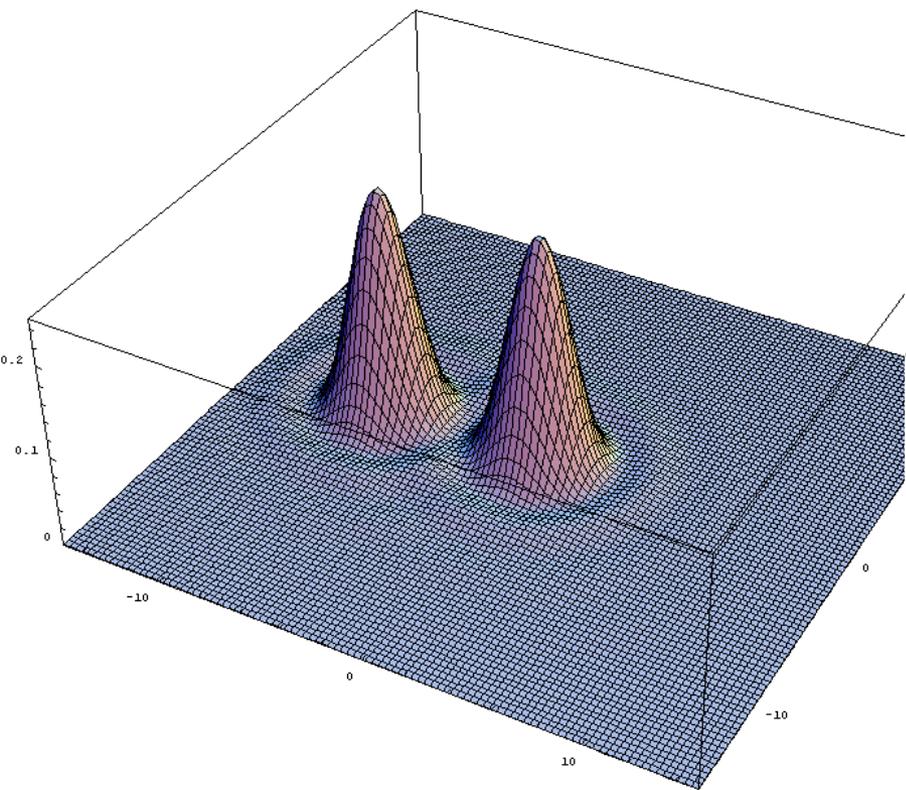
望远镜成像

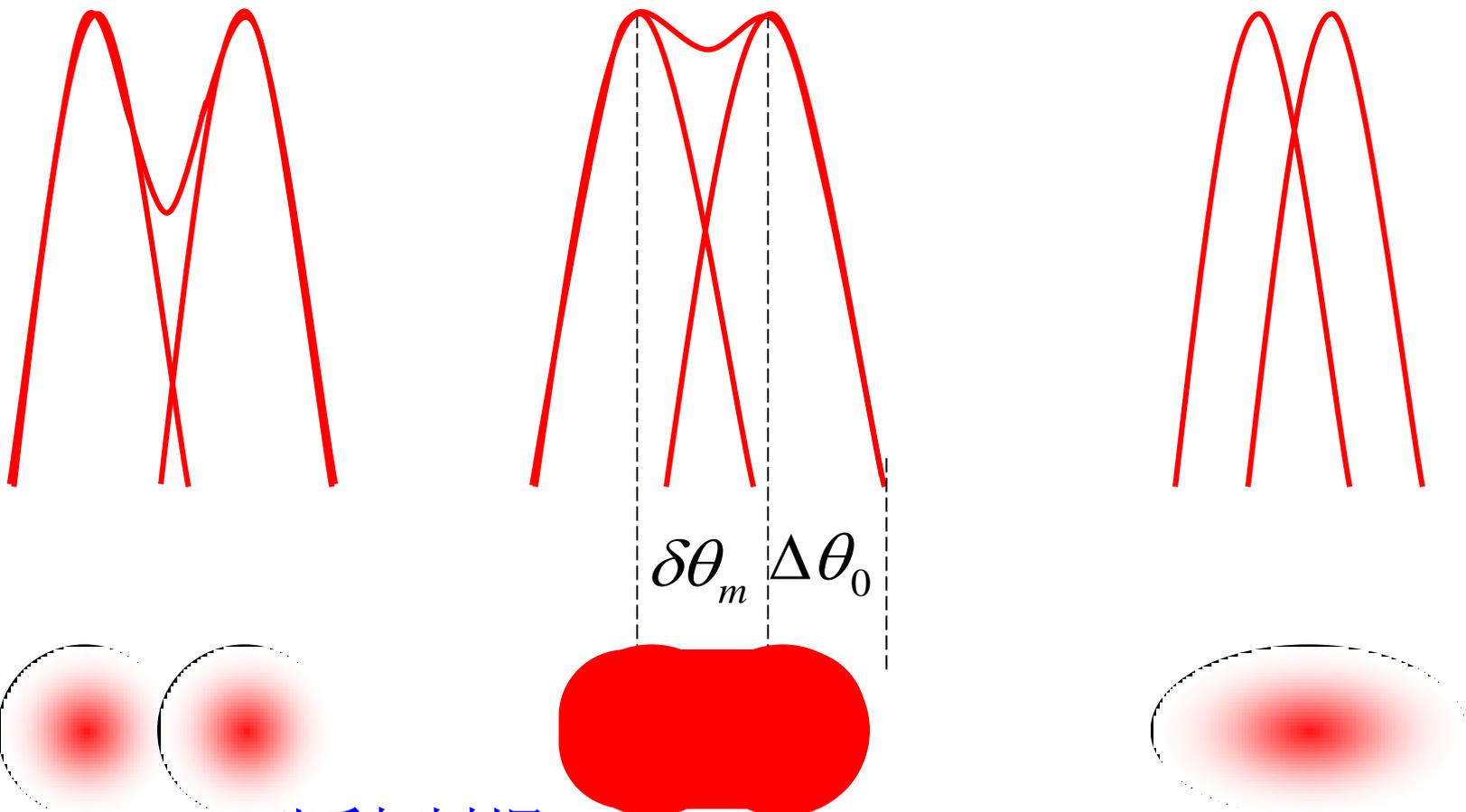


Aivry Disk



可分辨极限





Rayleigh(瑞利)判据

恰好可以分辨

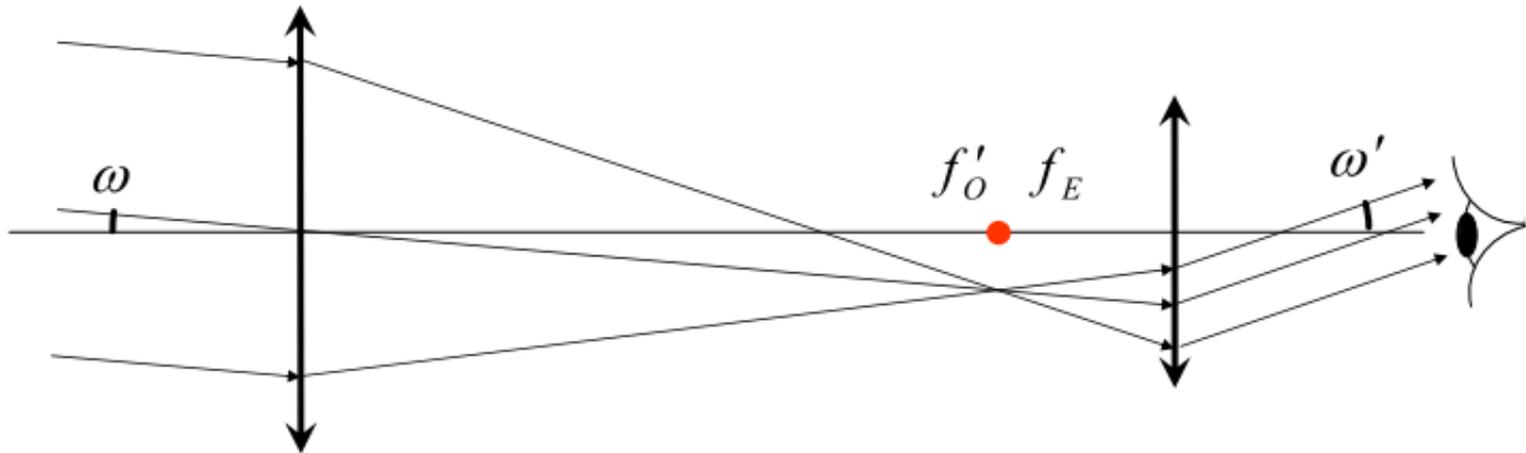
瑞利判据：当一个圆斑像的中心刚好落在另一圆斑像的边缘（第一暗纹）上时，被认为刚刚能被分辨。由此定义的最小分辨角为：

$$\delta\theta_m = \Delta\theta_0 = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

4.2 望远镜的分辨本领 瑞利判据

目镜的选择

使总放大率能将仪器的最小分辨角放大到人眼所能分辨的最小角度 $1'$ 。



有效放大率（视角放大率）：

$$M_m = \frac{\delta\theta_e}{\delta\theta_m}$$

眼睛的最小分辨角

物镜的最小分辨角

4.2 望远镜的分辨本领 瑞利判据

例：物镜直径5cm、50cm望远镜对波长 $0.55\mu\text{m}$ 的最小分辨角，放大率多少为宜？

对5cm

$$\delta\theta_e = \pi \frac{1' / 60}{180} = 2.9 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

$$\Delta\theta_m = 1.22 \frac{0.55 \times 10^{-6}}{5 \times 10^{-2}} = 1.3 \times 10^{-5} \text{ rad}$$

$$M_m = \frac{\delta\theta_e}{\delta\theta_m} = \frac{2.9 \times 10^{-4}}{1.3 \times 10^{-5}} = 22.5 \text{ 倍} \quad 1\text{cm @ } 1\text{km}$$

对50cm

$$\Delta\theta_m = 1.22 \frac{0.55 \times 10^{-6}}{50 \times 10^{-2}} = 1.3 \times 10^{-6} \text{ rad}$$

$$M_m = \frac{\delta\theta_e}{\delta\theta_m} = \frac{2.9 \times 10^{-4}}{1.3 \times 10^{-6}} = 225 \text{ 倍} \quad \delta\theta_m \square 13\text{cm @ } 100\text{km}$$

4.2 望远镜的分辨本领 瑞利判据



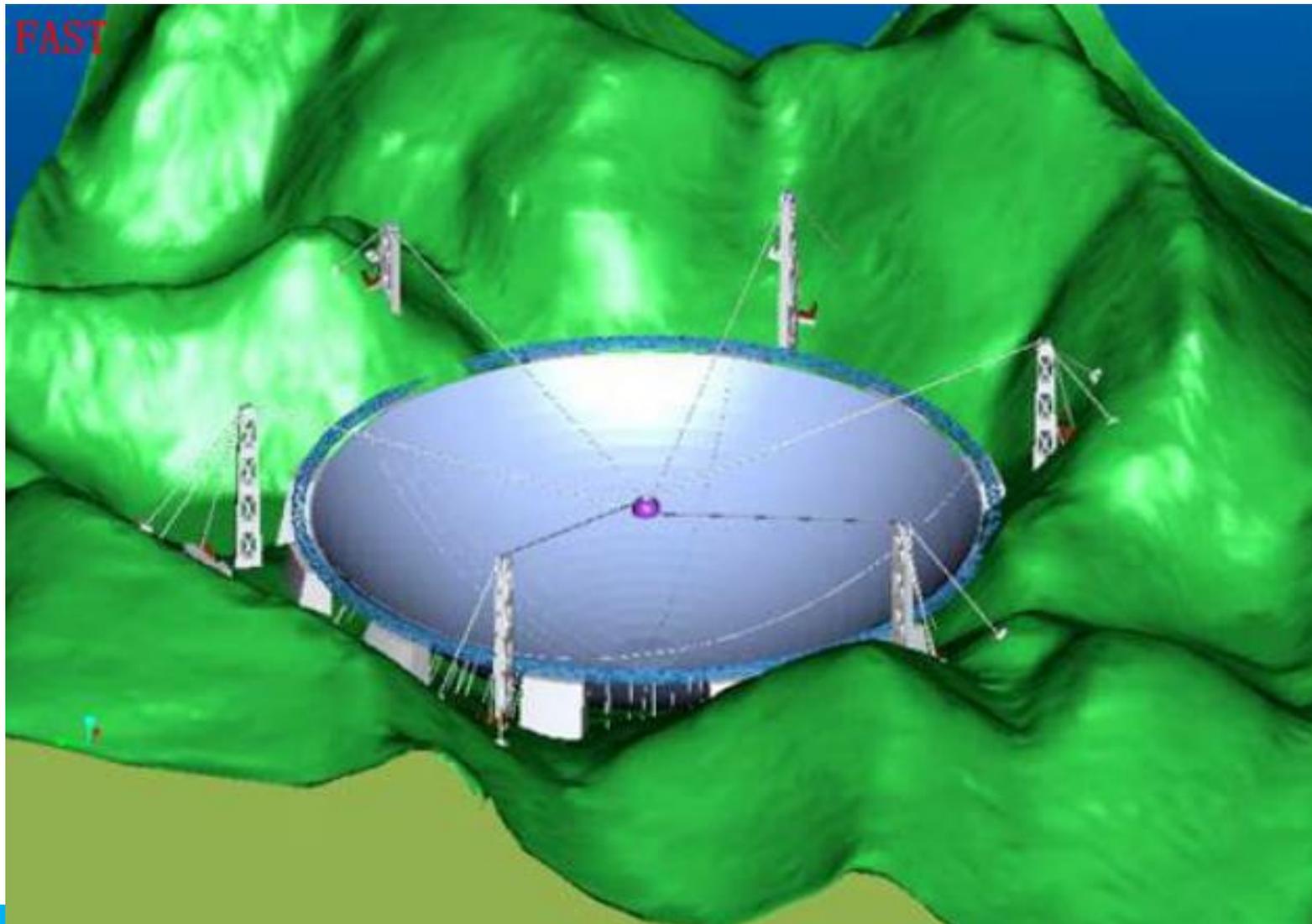
4.2 望远镜的分辨本领 瑞利判据

哈勃望远镜



4.2 望远镜的分辨本领 瑞利判据

山体式射电天文望远镜



4.2 望远镜的分辨本领 瑞利判据

山体式射电天文望远镜



4.2 望远镜的分辨本领 瑞利判据

山体式射电天文望远镜



4.2 望远镜的分辨本领 瑞利判据

波多黎各的美国阿雷西博射电望远镜



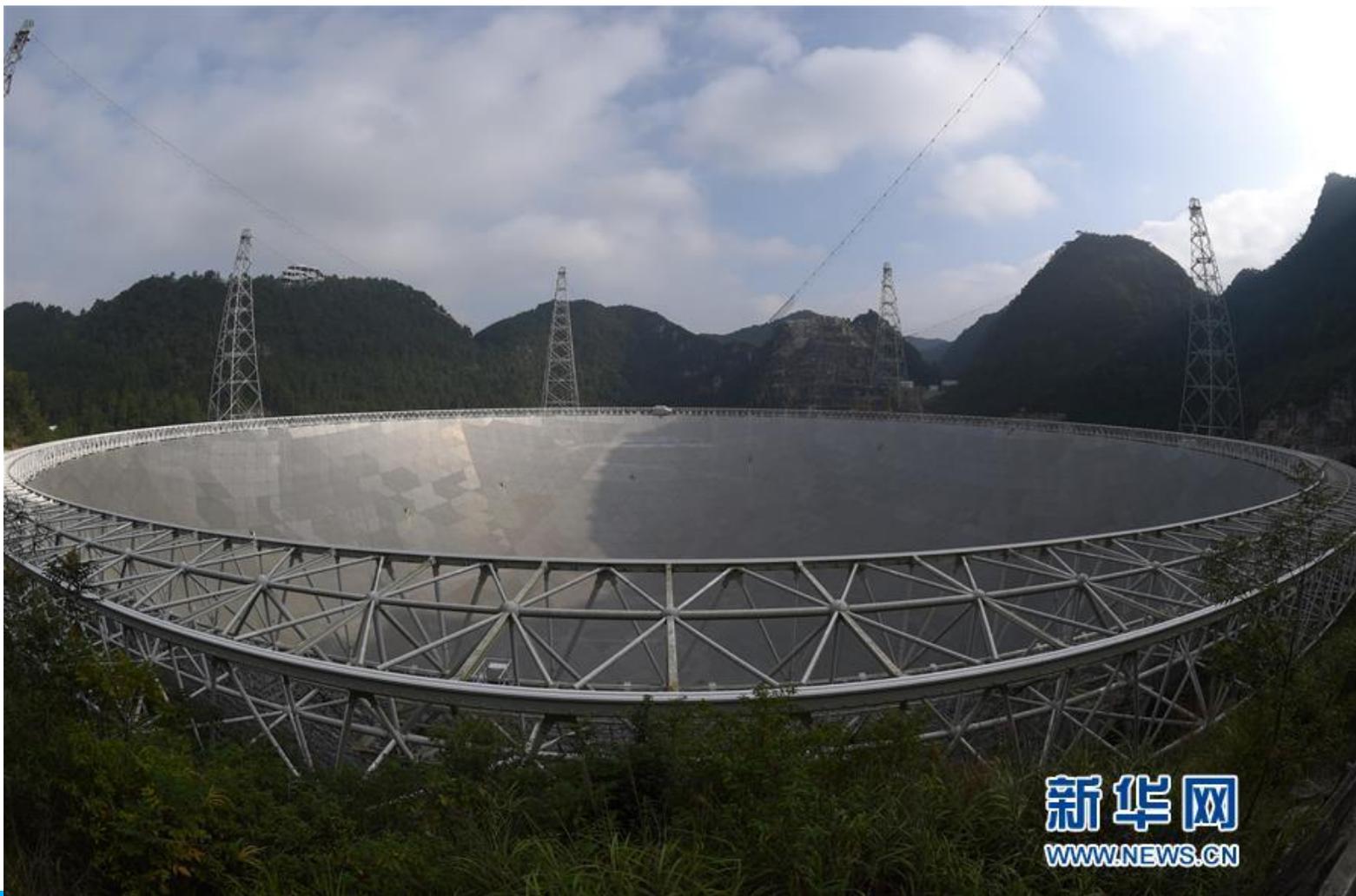
4.2 望远镜的分辨本领 瑞利判据

FAST 射电天文望远镜

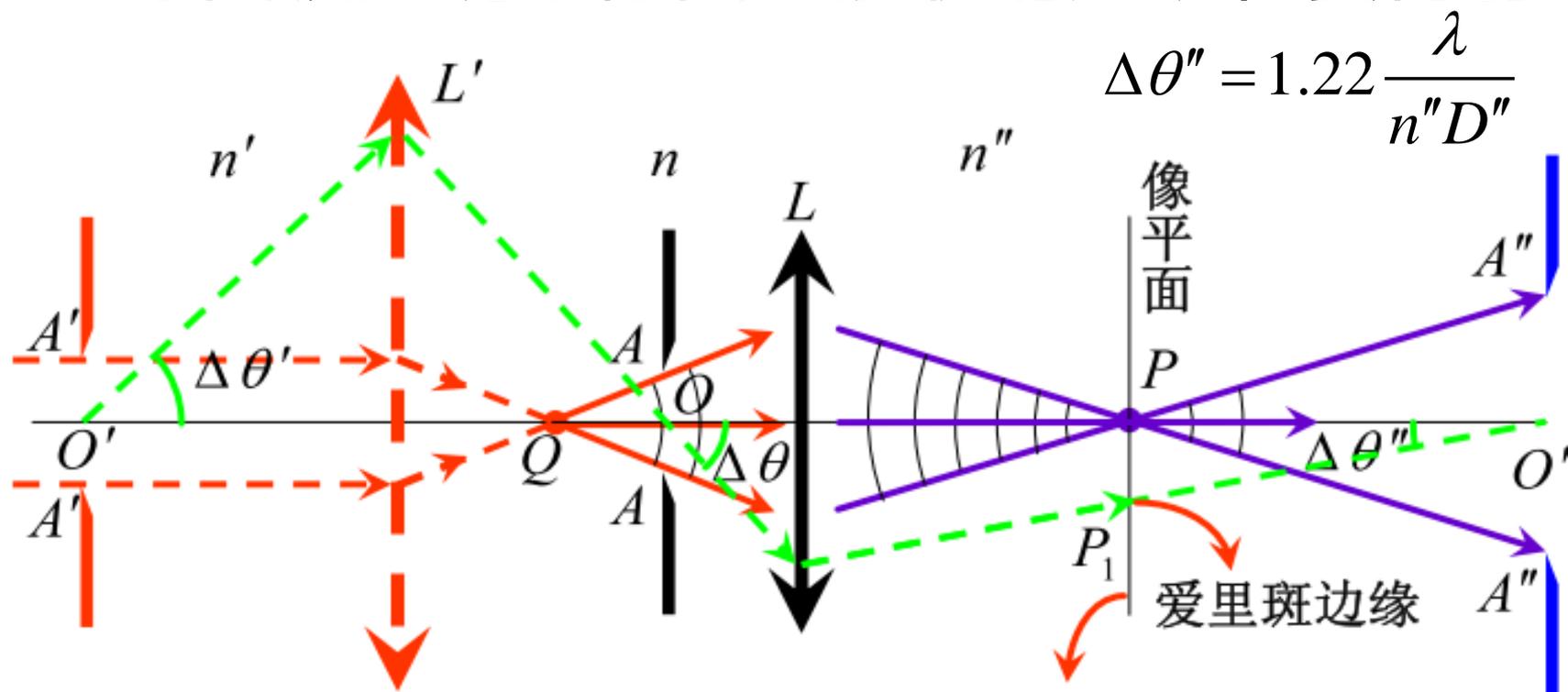


4.2 望远镜的分辨本领 瑞利判据

FAST 射电天文望远镜



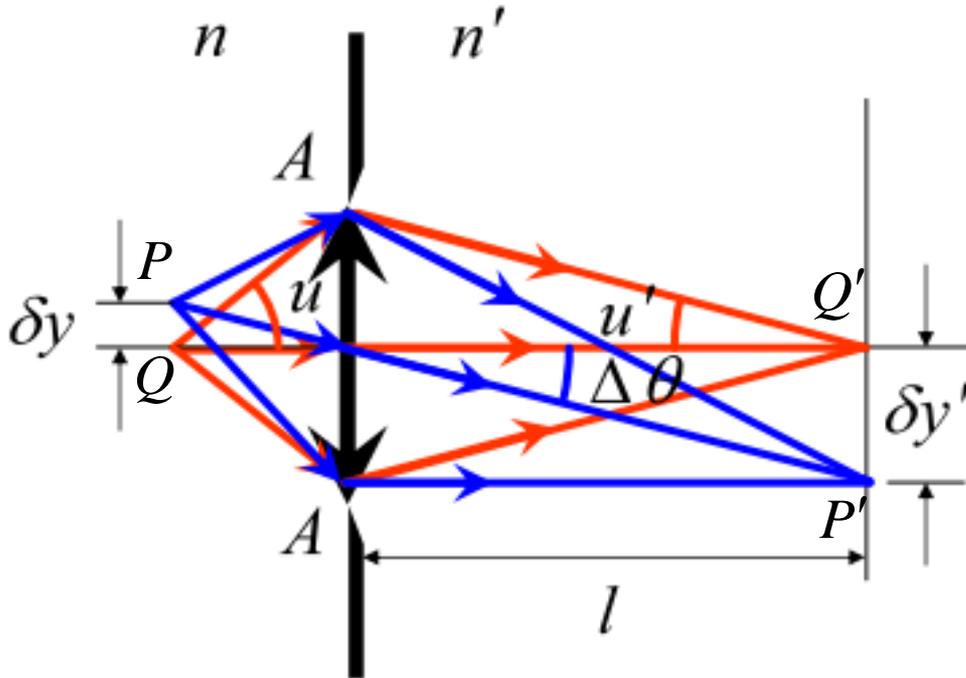
4.3 球面波照明下像面上接收的夫琅和费衍射



$L'-L$ 联合光具组的焦平面，接收的是 $A'-A'$ 对联合光具组的衍射

$$nD\Delta\theta = n'D'\Delta\theta' = n''D''\Delta\theta'' = 1.22\lambda$$

4.4 显微镜的分辨本领



$$\delta y_m = \frac{n' \frac{D/2}{l} \Delta \theta_m l}{n \sin u} = \frac{0.61 \lambda}{n \sin u}$$

物在光具组的焦点附近，
同时也是齐明点。
光瞳就是物镜的边框

$$\Delta \theta_m = \frac{1.22 \lambda}{n' D}$$

利用阿贝正弦条件

$$n \delta y \sin u = n' \delta y' \sin u'$$

$$\sin u' \approx u' = \frac{D/2}{l}$$

$n \sin u$ 数值孔径

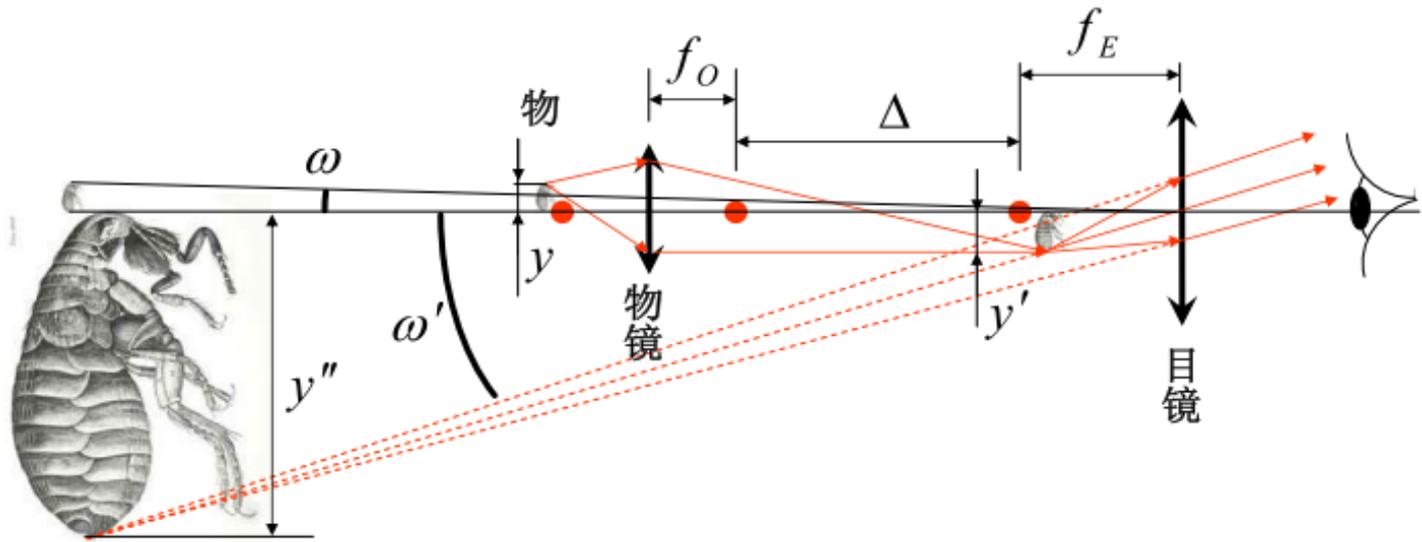
Numerical Aperture, N.A.

提高显微镜的分辨率意味着使 δy_m 尽量小，即减小波长或增大 N.A.。

4.4 显微镜的分辨本领

目镜的选择：

使总放大率能将仪器的最小分辨距离放大到人眼明视距离处的
最小分辨距离0.1mm。



有效放大率：
$$M_m = \frac{\delta y_e}{\delta y_m}$$

4.4 显微镜的分辨本领

例：

显微镜数值孔径 $N.A.=1.0$ ，估算有效放大率

取人眼最灵敏的550nm绿光：

$$\delta y_m \approx \frac{0.61}{1.0} \times 550nm = 335.5nm$$

$$M_m = \frac{\delta y_e}{\delta y_m} \approx 300$$

★ 提高显微镜分辨本领的方法—1.提高NA

油浸:

$$\delta y_m = \frac{0.61\lambda}{n \sin u}$$

远场光学显微镜的分辨极限:

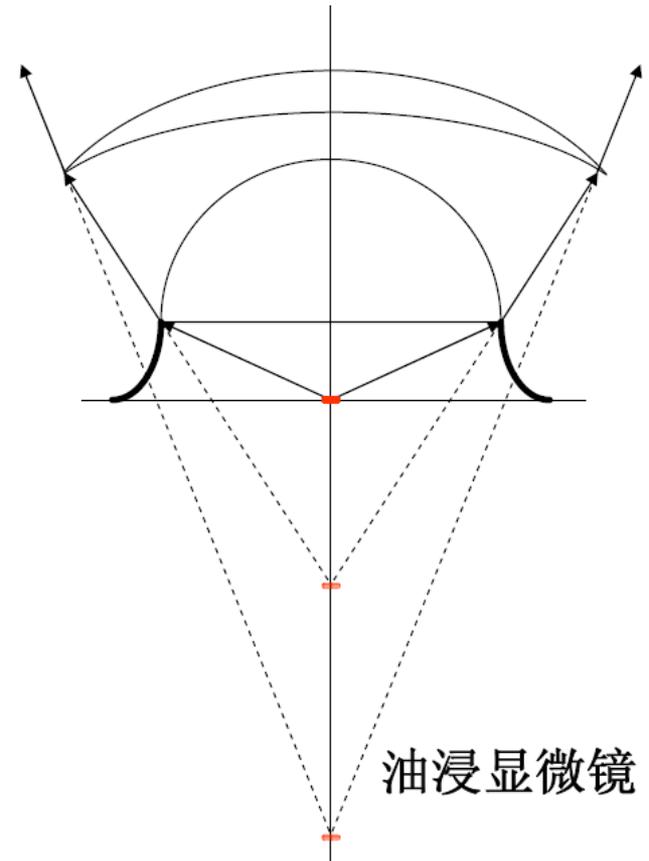
$$\delta y_m \approx \frac{0.61\lambda}{1.5} = 0.4\lambda$$

在可见波段: $\lambda \sim 400nm$

$$\delta y_m \approx 160nm$$

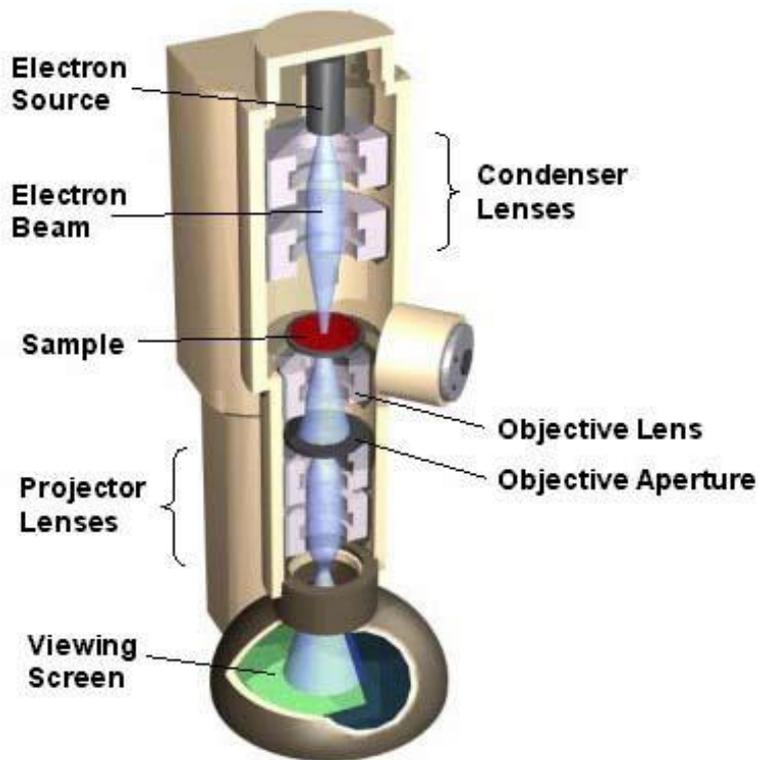
有效放大率:

$$M_m = \frac{\delta y_e}{\delta y_m} \sim 625$$



★ 提高显微镜分辨本领的方法

2. 减小波长：紫外，X射线显微镜，电子显微镜



电子显微镜的分辨本领:

电子束发散角较小, $u \sim 0.16 \text{ rad}$

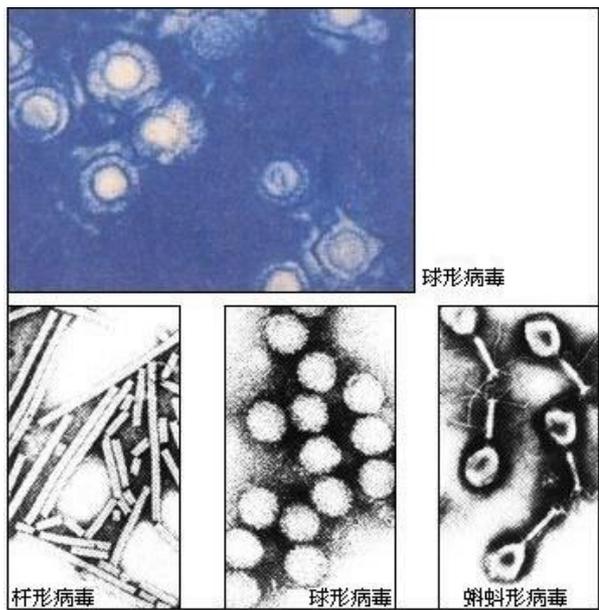
$$\delta y_m^E \approx 0.61 \frac{\lambda_e}{N.A.} \approx 0.61 \frac{\lambda_e}{0.16} \approx 4\lambda_e$$

电子波长取决于电子的加速电压:

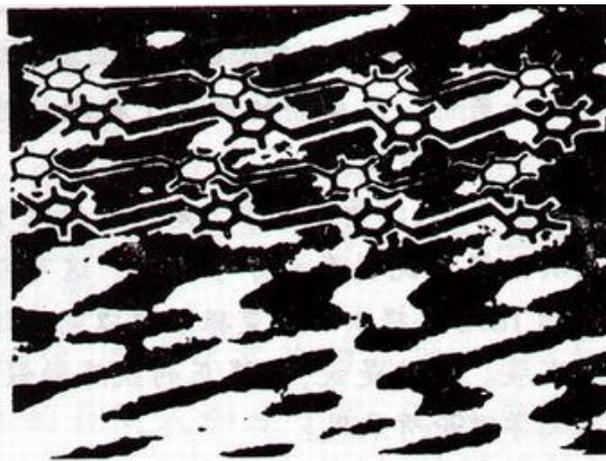
$$\frac{1}{2} \frac{p^2}{m} = eV$$

$$\lambda_e = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2meV}}$$

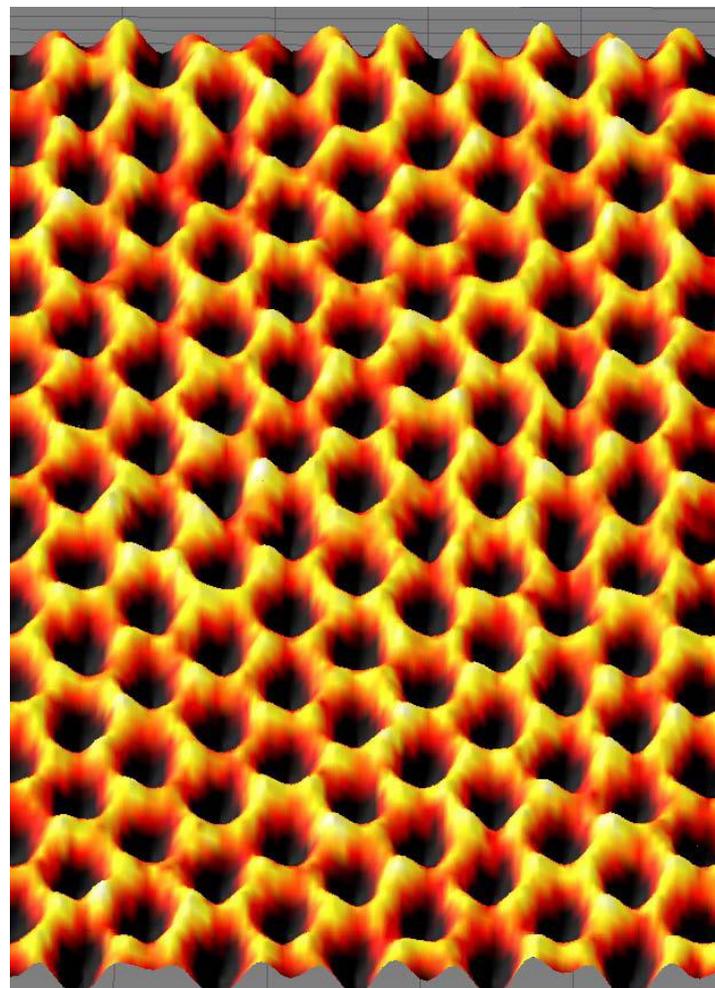
加速电压	电子波长	分辨本领	有效放大率
10^4V	$1.2 \times 10^{-2} \text{nm}$	$5 \times 10^{-2} \text{nm}$	2×10^6
10^5V	$3.7 \times 10^{-3} \text{nm}$	$1.5 \times 10^{-2} \text{nm}$	6×10^6



电子显微镜下的病毒照片



苯分子照片

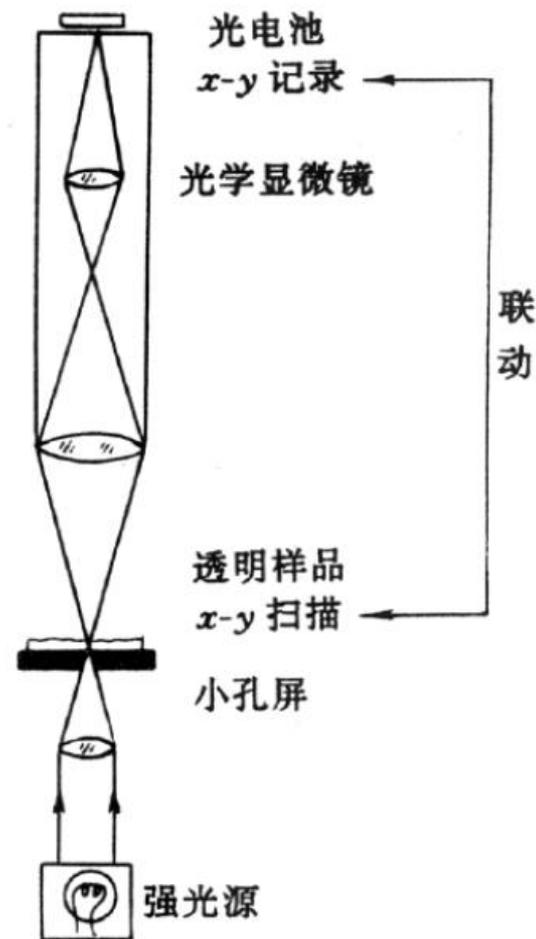


石墨烯的电镜图

★ 提高显微镜分辨本领的方法— 3. 扫描近场光学显微镜(SNOM)

Syngé 的设想：

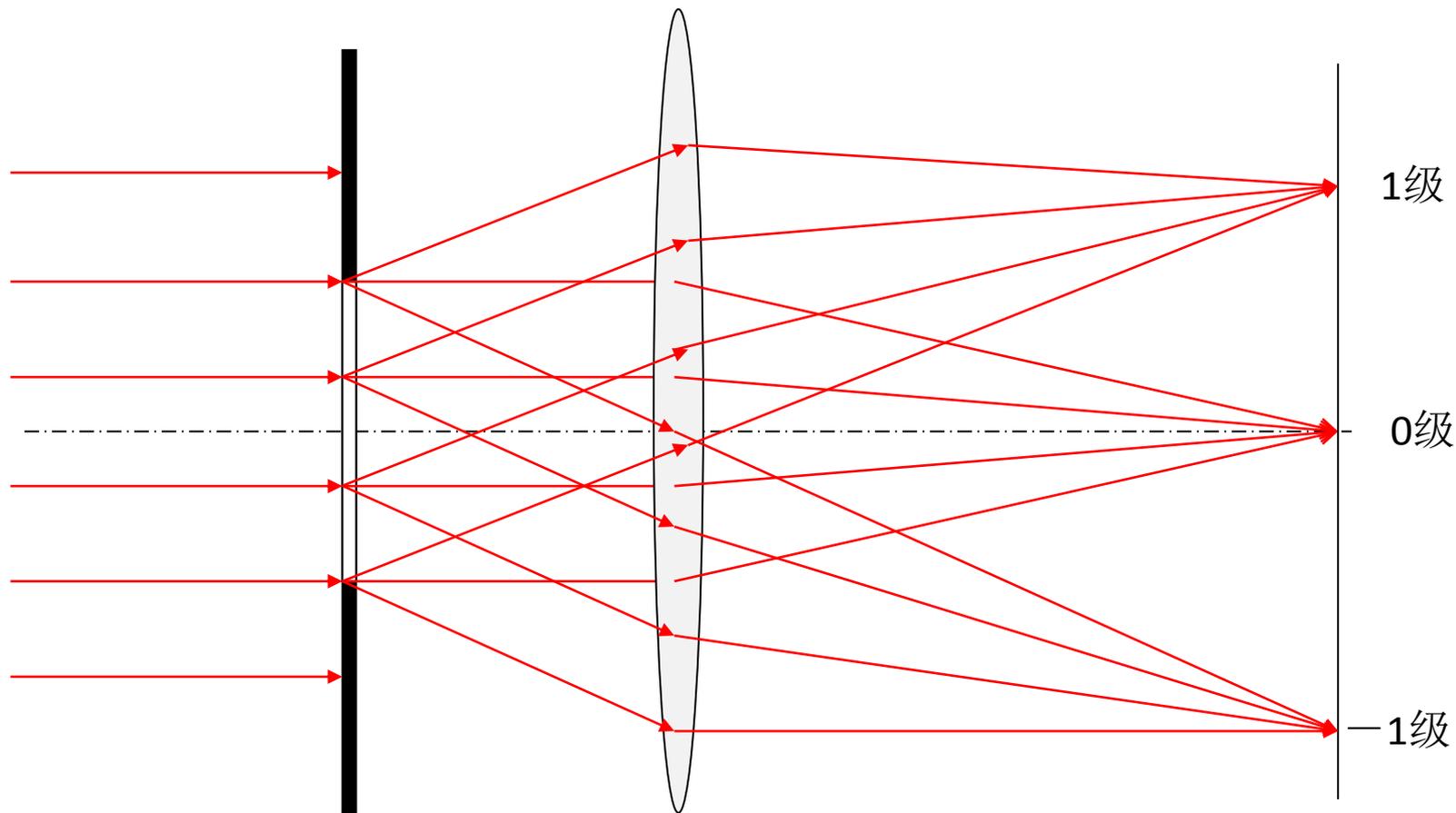
- ① 在不透明的平板或薄膜上，制备出一个近10nm的小孔，置于生物样品切片的正下方，两者间隔近10nm；
- ② 入射光通过小孔照明样品，透过样品的光被显微镜聚焦到光电探测器上。
- ③ 保持入射光强度不变，在 x - y 方向上以10nm的步距扫描样品，探测器同步记录光强。



(phil.Mag.1928 vol.6 ,p.356)

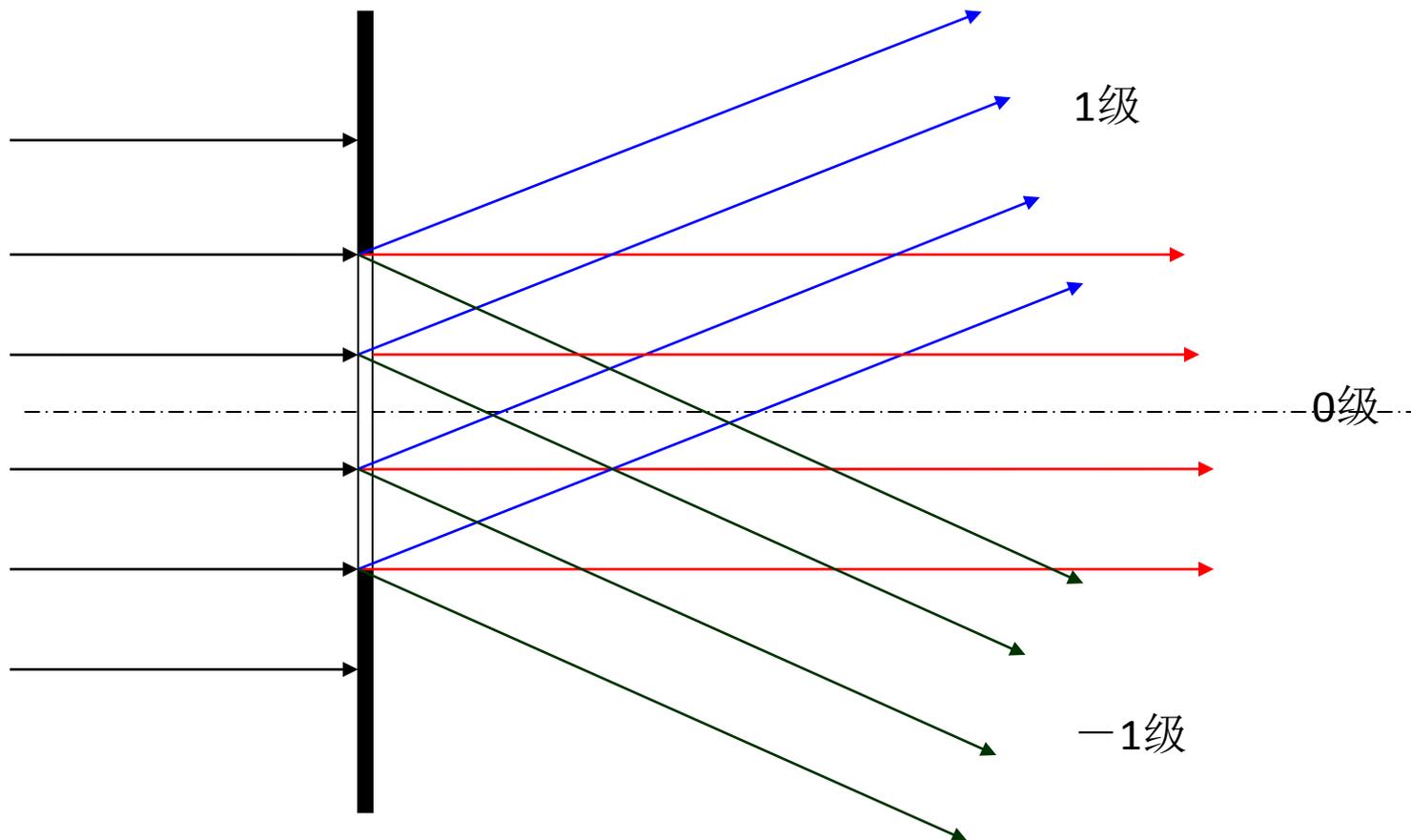
4.5 衍射的一些总结

透镜后焦面上的一个点，对应于物空间衍射的一个方向，所以半角宽度既是接收屏幕上衍射斑大小的度量，也是衍射场中波线取向弥散度的度量。



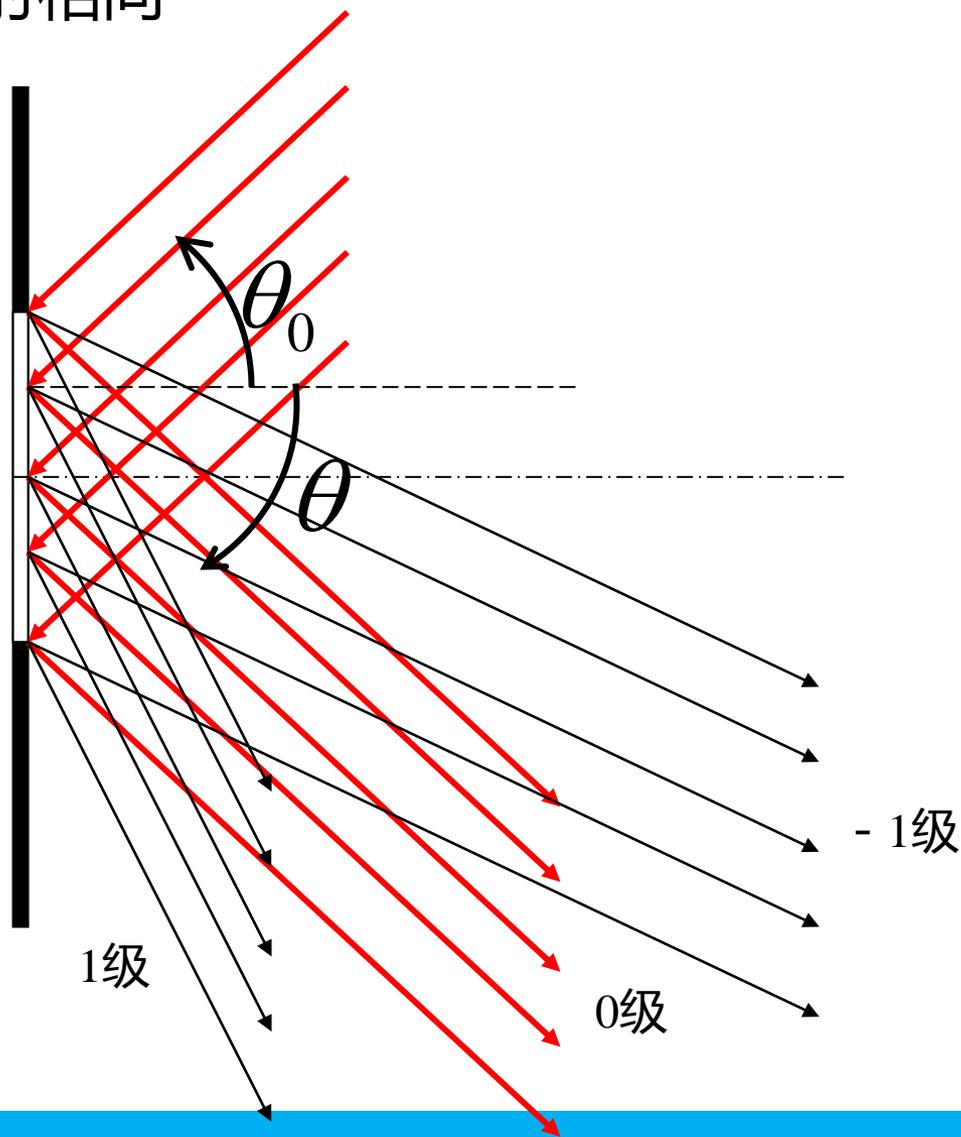
4.5 衍射的一些总结

衍射本身与透镜无关



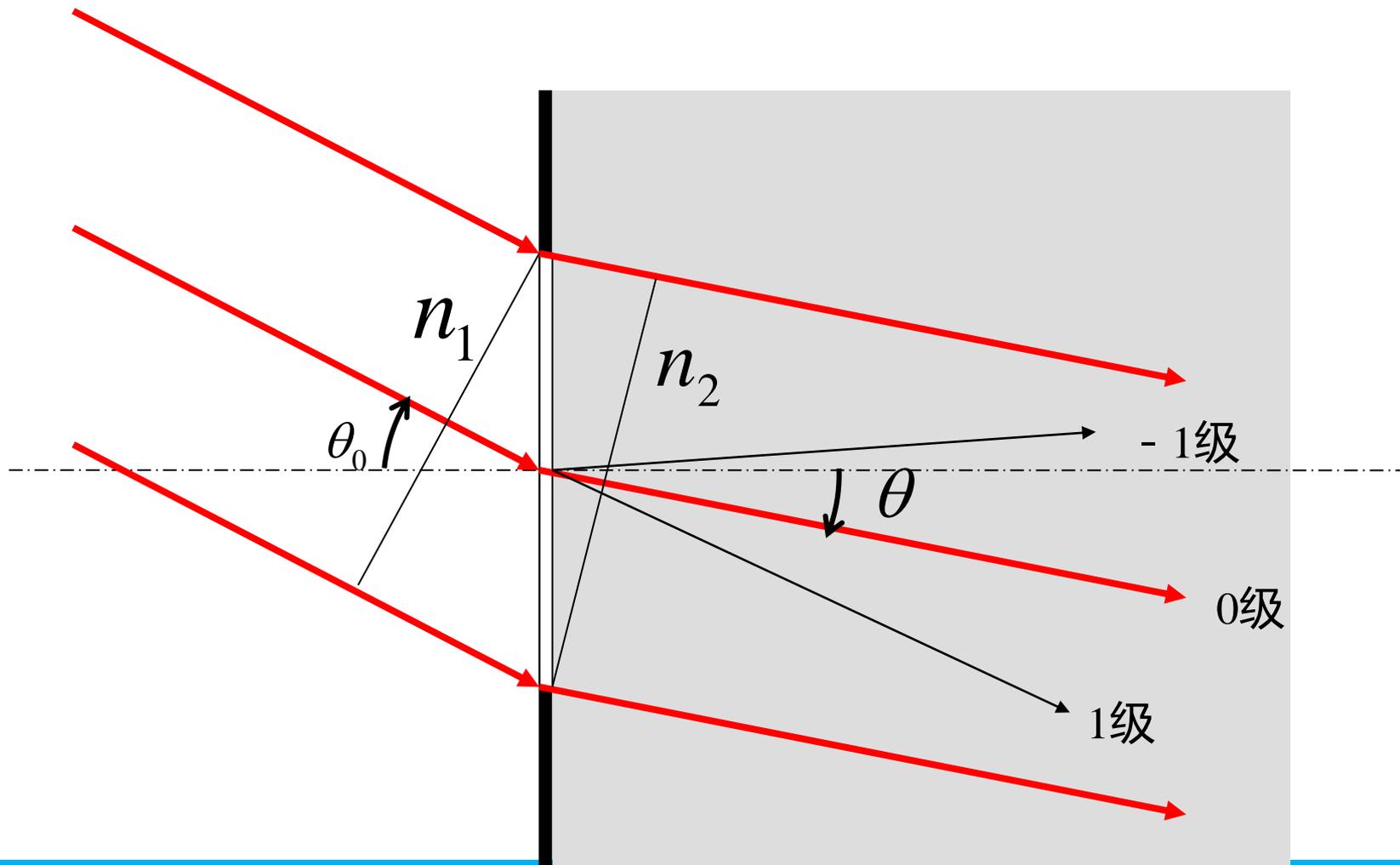
4.5 衍射的一些总结

反射的衍射情况与透射相同



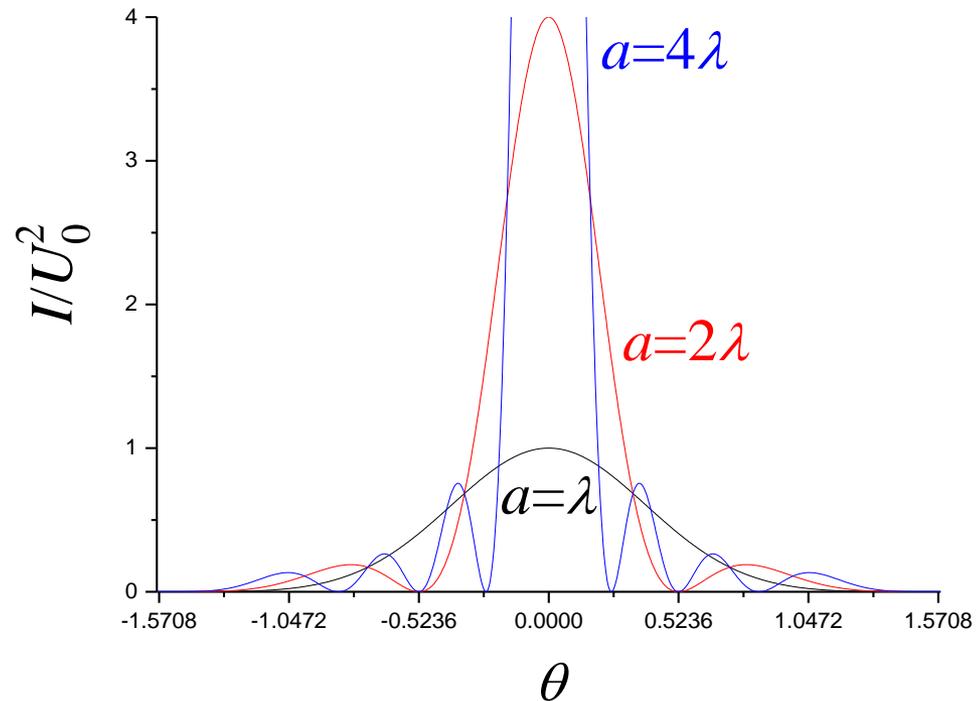
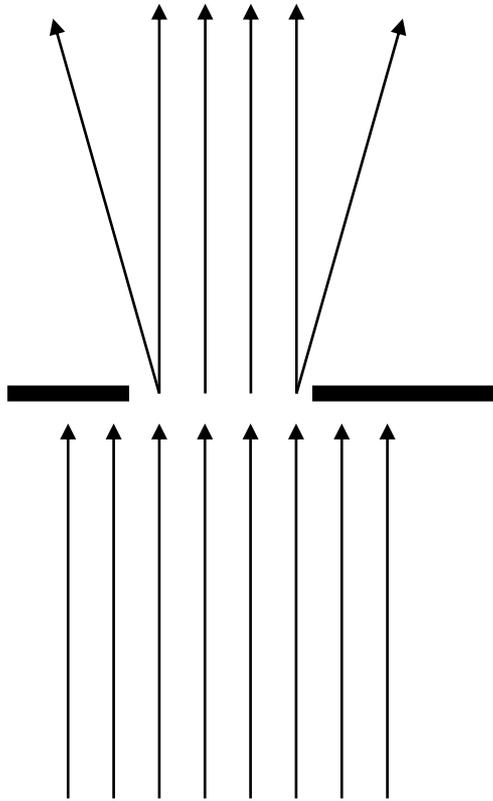
4.5 衍射的一些总结

在两种不同介质中（折射）的衍射



4.5 衍射的一些总结

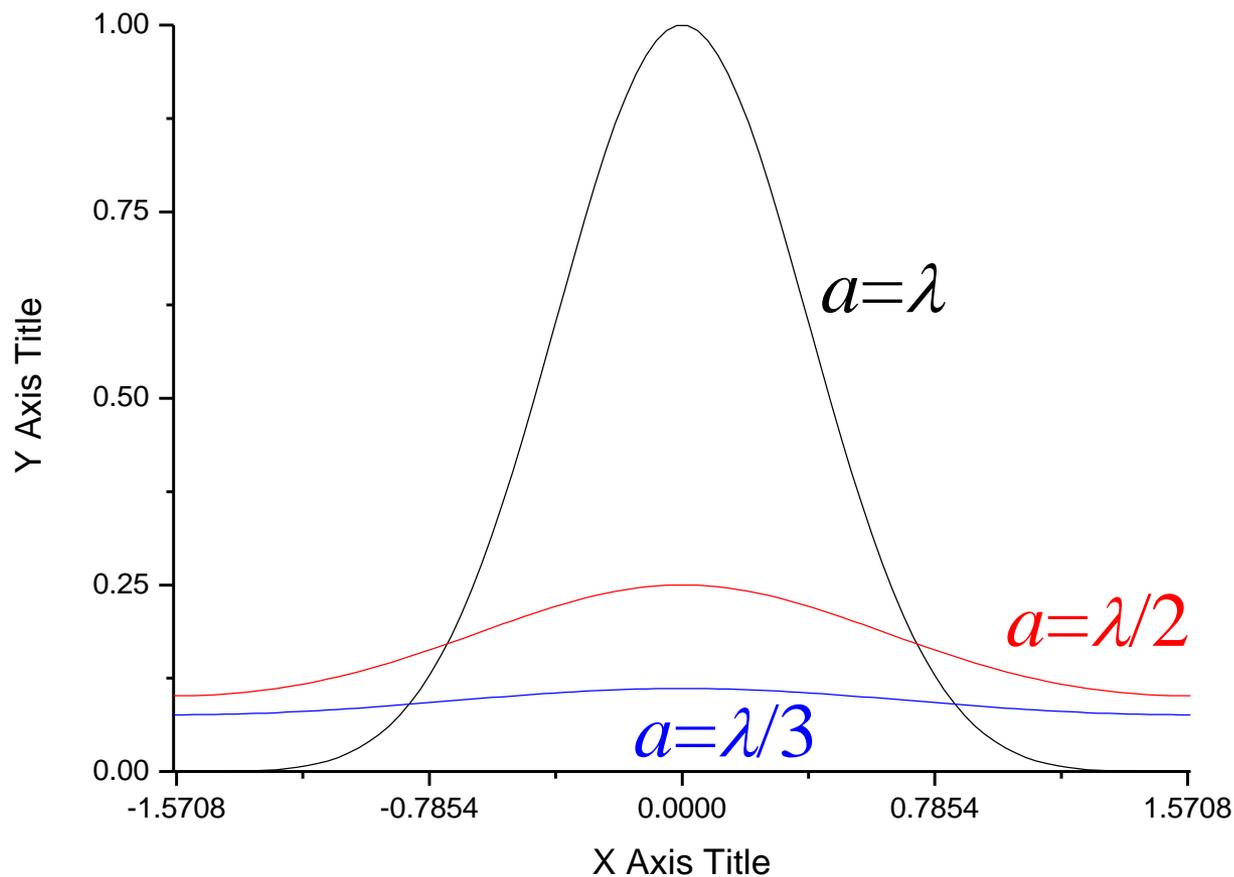
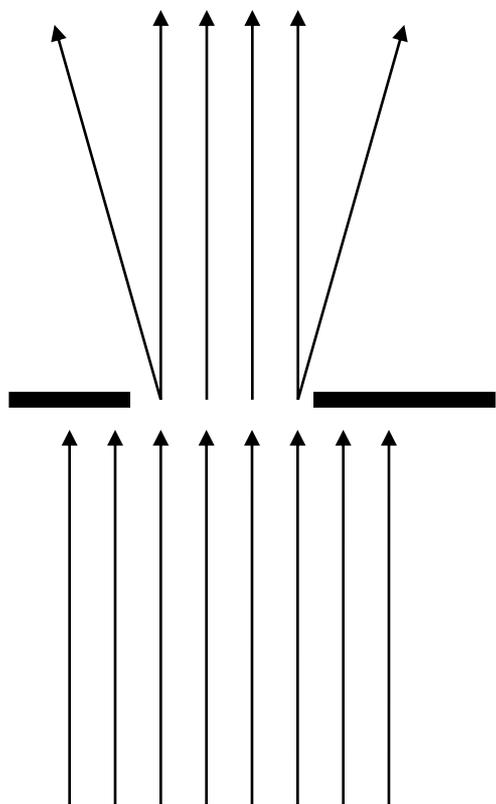
单缝衍射缝宽的影响



思考：在夫琅禾费单缝装置中，如果让狭缝宽度增大1倍，衍射光强增大多少？怎么理解？

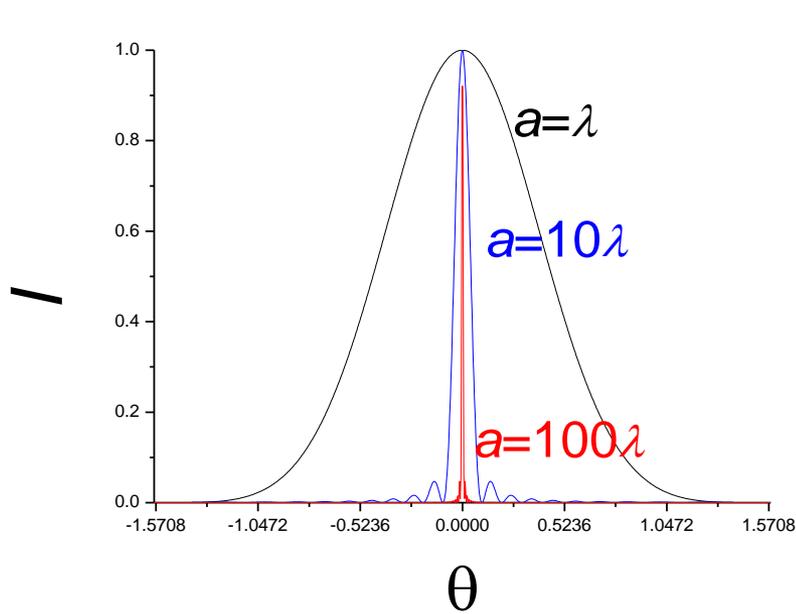
4.5 衍射的一些总结

缝宽小于波长

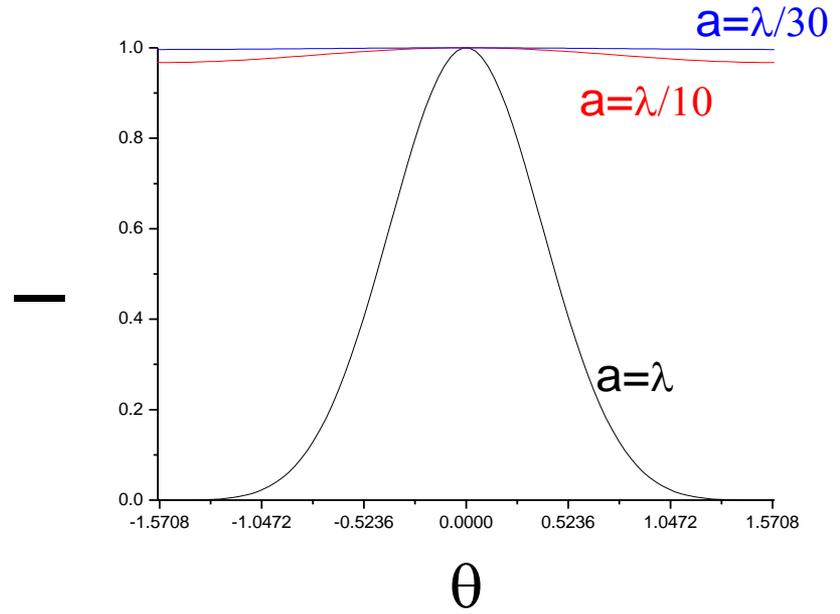


4.5 衍射的一些总结

两种极限趋势



缝宽越大
衍射越不明显



缝宽越小
衍射越强烈

4.5 衍射的一些总结

衍射是传播过程的基本特征

- 如果有衍射屏，即衍射障碍物，则衍射现象必然出现。
- 以单缝衍射为例进行分析，衍射能量大部分集中于0级。
- 存在衍射反比关系，即0级斑的空间（半）角宽度与缝宽成反比。

几何光学与衍射的极限

- 光线是几何光学中光的模型。
- 从惠更斯的次波传播的观点出发，任何形式的光线都是不存在的。因为任何形式的波在传播过程中都会以球面波的形式发散。
- 则光线的概念以及由此得到的反射及折射定律都似乎是不成立的；但是，几何光学的定律却都是实验定律，应该是正确的。

4.5 衍射的一些总结

几何光学与衍射的极限

衍射光强分布
$$I(\theta) = I_0 \frac{\sin^2 u}{u^2}$$

$$u = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta \quad \Delta\theta_0 = \frac{\lambda}{a}$$

如果 $a \gg \lambda$ $\Delta\theta_0 \approx 0$ **0级光束不发散**

同时由于 $u \gg \sin u$

除了 $\theta=0$ 处，其它位置衍射光强 $I \approx 0$ 。

其它的衍射级不存在。

说明在衍射障碍物的尺寸远大于波长的情况下，平行的入射光经过单缝后，仍沿着原来方向传播

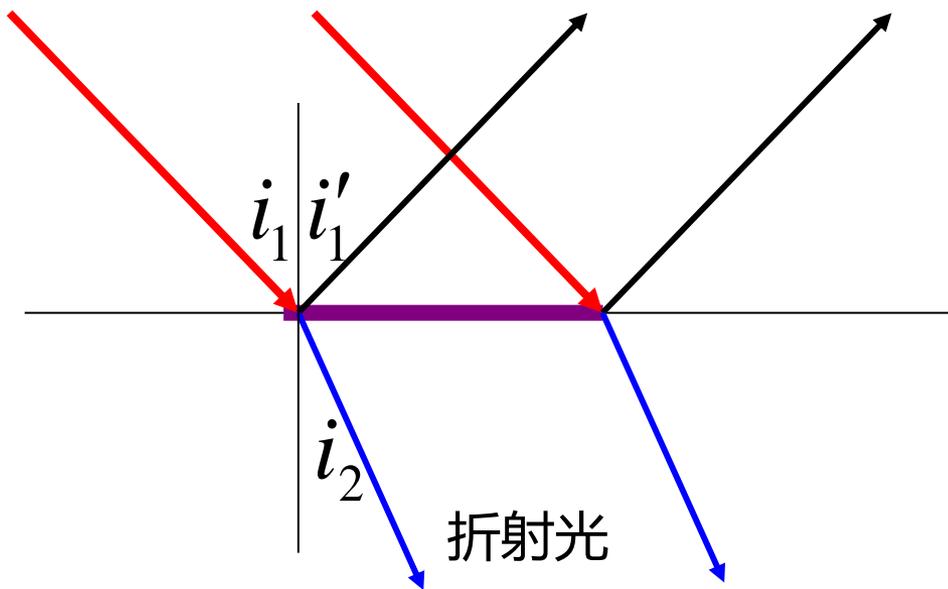
4.5 衍射的一些总结

几何光学与衍射的极限

说明自由传播的平行光束，仍然保持较好的平行性。

在没有衍射障碍物的情况下，可以使用光线的模型描述光的传播。即光的直线传播定律依然成立。

入射光在大尺度孔径处有反射和折射



$$u = \frac{\pi a}{\lambda} (\sin i_1 - \sin i'_1)$$

衍射0级的位置 $i'_1 = i_1$

当 $a \gg \lambda$ 时

反射光为平行光束
反射定律成立。

$$u = \frac{\pi a}{\lambda} (n_1 \sin i_1 - n_2 \sin i_2)$$

衍射0级的位置 $n_2 \sin i_2 = n_1 \sin i_1$ 折射定律成立。

4.5 衍射的一些总结

几何光学与衍射的极限

- 衍射0级就是几何光学中光线的方向。
- 如果衍射障碍物的尺寸比波长大很多，则几何光学定律成立。

干涉与衍射的区别和联系

- 干涉是分立光束之间的相干叠加，这些光束是有限条，或虽然有无限多条，但是光束之间是离散的、不连续的、可数的。直接应用波的叠加原理。
- 衍射是连续分布的无限多个点光源（次波中心）发出的光波的相干叠加。要应用惠更斯——菲涅耳原理，或菲涅耳——基尔霍夫衍射积分公式。
- 无论是衍射还是干涉，光波在相遇点都是振动的叠加，都遵循波的叠加原理。
- 干涉时，光的能量在空间均匀分布，各个亮条纹有相差不大的能量；衍射时，光的能量主要集中在一个特殊的衍射级上，更接近于几何成像的情况。

本节重点

1. 艾里斑及其大小的计算
2. 瑞利判据和光学仪器的分辨率极限。

作业

P235:1,3,4,5

重排版 P171:1,3,4,5