目　录

第七章　假设检验

§7.2　重要参数检验

本节介绍最基本的假设检验问题: 一样本和两样本正态总体的有关均值和方差的检验, 简单的大样本检验(0-1 分布参数的假设检验).

§7.2.1　一样本正态总体均值和方差的检验

现实中经常碰到诸如此类的问题: 假设用于某用途的合格铁钉要求长度为10 厘米, 现有经销商从生产厂家订购了一批这样的铁钉, 为了检验该批检验产品是否合格, 可以从中抽取一小部分进行测量检验, 通常铁钉的长度服从一个正态分布, 这类问题属于一样本正态总体的假设检验问题.

一般地, 设总体$X \sim N(\mu, \sigma^2), -\infty < \mu < \infty, \sigma^2 > 0$; $X_1, \cdots, X_n$ 是取自总体X 的一个样本. 取显著性水平为α.

(1) 方差已知时均值的检验

先考虑双侧假设, 即要检验

$$H_0 : \mu = \mu_0 \leftrightarrow H_1 : \mu \neq \mu_0.$$

由于μ 的极大似然估计为$\bar{X}$, 取“标准化”后的检验统计量

$$U = u(X_1, \cdots, X_n) = \sqrt{n}\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma}$$

注意到当H_0 成立时, $U \sim N(0, 1)$, $|U|$ 应该较小, 反之当$|U|$ 的观测值$u(x_1, \cdots, x_n)$ 较大时, 不利于零假设H_0 应该拒绝之. 所以选拒绝域形如

$$\{|U| > \tau\}.$$

要求显著性水平为α, 即

$$P_{H_0}(|U| > \tau) = \alpha,$$

解得$\tau = u_{\alpha/2}$. 于是检验的拒绝域为

$$\{|U| > u_{\alpha/2}\}.$$

即当观测值$(x_1, \cdots, x_n)$ 满足不等式

$$\sqrt{n}\frac{|\bar{x}-\mu_0|}{\sigma} > u_{\alpha/2}$$

时拒绝H_0.

类似地, 检验单侧假设

$$H_0: \ \mu = \mu_0 \leftrightarrow H_1: \ \mu > \mu_0 \quad \text{或者} \quad H_0: \ \mu \le \mu_0 \leftrightarrow H_1: \ \mu > \mu_0$$

仍然用统计量U, 由于U 大时不利于H_0, 取拒绝域为

$$\{U > u_\alpha\}.$$

而检验另一个单侧假设

$$H_0: \ \mu = \mu_0 \leftrightarrow H_1: \ \mu < \mu_0 \quad \text{或者} \quad H_0: \ \mu \le \mu_0 \leftrightarrow H_1: \ \mu < \mu_0$$

的拒绝域为

$$\{U < -u_\alpha\}.$$

虽然我们取的临界值只考虑使检验在$\mu = \mu_0$ 处的犯I 类错误的概率为α, 从检验的拒绝域的形状上可直接看出来在零假设下$\mu \le \mu_0$ (或$\mu \ge \mu_0$) 时犯第I 类错误的概率恒小于或等于α.

以上三个检验统称为u 检验.

例 7.2.1. *随机地从一批铁钉中抽取16 枚, 测得它们的长度(单位: 厘米) 如下:*

2.942371 2.988662 3.106234 3.109316 3.118427 3.132254 3.140042 3.170188

2.902562 3.128003 3.146441 2.978240 3.103600 3.003394 3.044384 2.849916

已知铁钉长度服从标准差为0.1 的正态分布, 在显著性水平$\alpha = 0.01$ 下, 能否认为这批铁钉的平均长度为3 厘米? 如显著性水平为$\alpha = 0.05$ 呢?

解: 这是方差已知时关于均值μ 的假设检验问题,

$$H_0: \mu = 3 \leftrightarrow H_1: \mu \ne 3.$$

取检验统计量为$U = \sqrt{n}(\bar{X} - 3)/0.1$, 检验的拒绝域为$|U| > u_{\alpha/2}$. 由样本算得检验统计量的值为$u \approx 2.16$, 如显著性水平为0.01, 则临界值为$u_{0.005} \approx 2.58$, 跟检验统计量的值比

较发现不能拒绝零假设, 即不能推翻铁钉平均长度为3 厘米的假设; 而如果显著性水平为0.05时, 临界值为$u_{0.025} = 1.96$, 此时可以拒绝零假设, 认为铁钉平均长度不等于3 厘米. 这个例子说明结论可能跟显著性水平的选择有关: 显著性水平越小, 零假设被保护得越好从而更不容易被拒绝.

例 7.2.2. *对正态总体$N(\mu, \sigma^2)$(其中σ^2已知)下的假设检验问题$H_0 : \mu = \mu_0 \leftrightarrow H_1 : \mu \neq \mu_0$，如果我们还要求"犯第二类错误的概率要小于指定的$\beta > 0$"该怎么办?*

解: 根据功效函数和两类错误的定义，知道等价的要求

$$\beta_\phi(\mu) \geq 1 - \beta, \quad \mu < \mu_0 \tag{7.2.1}$$

但是，当$\mu < \mu_0$但μ接近μ_0时，$\beta_\phi(\mu) \approx \alpha$，而因为$\alpha, \beta$一般都很小，因此一般有$\alpha < 1 - \beta$，这就看出要求(7.2.1)无法达到。我们只能放松一些，要求对某个指定的$\mu_1 < \mu_0$，有

$$\beta_\phi(\mu) \geq 1 - \beta, \quad \mu < \mu_1 \tag{7.2.2}$$

因为$\beta_\phi(\mu)$为μ的减函数，因此等价于要求

$$\beta_\phi(\mu_1) \geq 1 - \beta$$

此即

$$\Phi\left(\frac{\sqrt{n}(\mu_0 - \mu)}{\sigma} - u_\alpha\right) \geq 1 - \beta$$

等价的得到

$$n \geq \sigma^2(u_\alpha + u_\beta)^2/(\mu_0 - \mu)^2$$

也即要满足题目中的要求，样本大小至少要达到上式右边那么大。□

(2) 方差未知时均值的检验

考虑检验

$$H_0 : \mu = \mu_0 \leftrightarrow \mu \neq \mu_0,$$

由于方差未知, 可以在将$\bar{X}$ 标准化的过程中用样本方差S^2 代替总体方差σ^2, 得检验统计量

$$T = \sqrt{n}\frac{\bar{X} - \mu_0}{S}.$$

由于在H_0 下, $T \sim t_{n-1}$, 于是拒绝域取成

$$\{|T| > t_{n-1}(\alpha/2)\}.$$

此检验称为t 检验.

类似地可以得到另外两个单侧假设的检验拒绝域, 列于表7.2.1中.

例 7.2.3. *(例7.2.1续) 设方差未知, 则在水平0.01 和0.05 下能否认为铁钉平均长度为3 厘米?*

解: 这是方差未知时关于均值μ 的假设检验问题,

$$H_0 : \mu = 3 \leftrightarrow H_1 : \mu \neq 3$$

取检验统计量为$T = \sqrt{n}(\bar{X} - 3)/S$, 检验的拒绝域为$|T| > t_{n-1}(\alpha/2)$. 由样本算得检验统计量的值约为2.21, 与显著性水平0.01 对应临界值$t_{15}(0.005) \approx 2.95$ 比较, 不能拒绝零假设, 而与显著性水平0.05 对应临界值$t_{15}(0.025) \approx 2.13$ 比较, 可以拒绝零假设, 即在显著性水平0.01 下不能拒绝铁钉平均长度为3 厘米的假定, 但在显著性水平0.05 下可以认为铁钉平均长度不等于3 厘米, 此结论与方差已知情形一致.

(3) 方差的检验

考虑假设检验问题

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \leftrightarrow H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2.$$

对均值已知的情形, 由σ^2 的极大似然估计

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$$

可以构造检验统计量

$$\chi^2 = \frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 = \frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2}.$$

在H_0 下, $\chi^2 \sim \chi_n^2$, χ^2 的平均值为n, 而在H_1 下, $\chi^2 = \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2}\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}$ 的均值为$\frac{\sigma^2}{\sigma_0^2}n \neq n$, 因此当$\chi^2$ 的值过于偏离n 时应该拒绝H_0, 于是拒绝域取成

$$\left\{\chi^2 < \chi_n^2(1 - \alpha/2) \text{ 或者 } \chi^2 > \chi_n^2(\alpha/2)\right\}.$$

对均值未知的情形, 构造检验统计量

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2},$$

其中S^2 为样本方差. 在H_0 下, $\chi^2 \sim \chi^2_{n-1}$, 拒绝域取成

$$\{\chi^2 < \chi^2_{n-1}(1-\alpha/2) \text{ 或者 } \chi^2 > \chi^2_{n-1}(\alpha/2)\}.$$

对于单侧假设, 可以类似得到检验的拒绝域, 参看表7.2.1.

上述检验称为χ^2 检验.

例 7.2.4. *(例7.2.1续) 在水平0.1 下能否认为铁钉的标准差大于*0.1 *厘米?*

解: 这是均值未知时关于方差σ^2 的假设检验问题,

$$H_0: \sigma^2 \le 0.1^2 \leftrightarrow H_1: \sigma^2 > 0.1^2.$$

取检验统计量为$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{0.1^2}$, 检验的拒绝域为$\{\chi^2 > \chi^2_{n-1}(\alpha)\}$. 由样本算得检验统计量的值$\chi^2 \approx 14.32$, 与显著性水平0.2 对应临界值$\chi^2_{15}(0.1) \approx 22.31$ 比较, 不能拒绝零假设, 即在显著性水平0.1 下可以认为铁钉的标准差小于0.1.

表 7.2.1 一样本正态总体$N(\mu, \sigma^2)$.

检验对象	检验统计量	分布	拒绝域[†]
μ (σ^2已知)	$U = \sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)/\sigma$	$N(0,1)$	$\begin{cases} \lvert U\rvert > u_{\alpha/2} \\ U > u_\alpha \\ U < -u_\alpha \end{cases}$
μ (σ^2 未知)	$T = \sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)/S$	t_{n-1}	$\begin{cases} \lvert T\rvert > t_{n-1}(\alpha/2) \\ T > t_{n-1}(\alpha) \\ T < -t_{n-1}(\alpha) \end{cases}$
σ^2 (μ 已知)	$\chi^2 = \frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$	χ^2_n	$\begin{cases} \chi^2 > \chi^2_n(\alpha/2)\text{或者}\chi^2 < \chi^2_n(1-\alpha/2) \\ \chi^2 > \chi^2_n(\alpha) \\ \chi^2 < \chi^2_n(1-\alpha) \end{cases}$
σ^2 (μ 未知)	$\chi^2 = \frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$	χ^2_{n-1}	$\begin{cases} \chi^2 > \chi^2_{n-1}(\alpha/2)\text{或者}\chi^2 < \chi^2_{n-1}(1-\alpha/2) \\ \chi^2 > \chi^2_{n-1}(\alpha) \\ \chi^2 < \chi^2_{n-1}(1-\alpha) \end{cases}$

†有关均值的检验: 对立假设分别为$\mu \ne \mu_0$, $\mu > \mu_0$ 和$\mu < \mu_0$. 有关方差的检验: 对立假设分别为$\sigma^2 \ne \sigma_0^2$, $\sigma^2 > \sigma_0^2$ 和$\sigma^2 < \sigma_0^2$.

表7.2.1 总结了有关一样本正态总体的假设检验.

§7.2.2 两样本正态总体的情形

为了检验某肥料是否能显著提高玉米产量, 可以设计一个随机试验: 选择两块条件一样的试验区, 把两试验区各分成若干小块, 一个试验区的各小块施肥, 另一个试验区的各小块不施肥, 最后统计收成, 可以采用如下的检验方法来检验玉米产量差别, 从而知道肥料是否有效.

设总体$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, $-\infty < \mu_1, \mu_2 < \infty, \sigma_1^2, \sigma_2^2 > 0$; $X_1, \cdots, X_n$ 是从总体X 中抽取的一个样本, $Y_1, \cdots, Y_n$ 是从总体Y 中抽取的一个样本. 设来自不同总体的样本相互独立. 下面设考虑有关均值差$\mu_1 - \mu_2$ 和方差比σ_1^2/σ_2^2 的检验. 取显著性水平为α. 举例说明.

例 7.2.5. *甲乙两个农业试验区种植玉米, 除了甲区施磷肥外, 其他试验条件都相同, 把两个试验区分别均分成10 个和9 个小区统计产量(单位: 千克) , 得数据如下*

甲区 62 57 65 60 63 58 57 60 60 58

乙区 50 59 56 57 58 57 56 55 57

假定甲乙两区中每小块的玉米产量分别服从$N(\mu_1, \sigma^2)$, $N(\mu_2, \sigma^2)$, *其中*μ_1, μ_2, σ^2 *未知. 试问在显著性水平*$\alpha = 0.1$ *下磷肥对玉米的产量是否有效?*

解: 磷肥对玉米产量有效果等价于$\mu_1 > \mu_2$, 故将其设为对立假设, 假设检验问题是

$$H_0 : \mu_1 \leq \mu_2 = 0 \leftrightarrow H_1 : \mu_1 > \mu_2.$$

构造基于$\mu_1 - \mu_2$ 的极大似然估计$\bar{X} - \bar{Y}$ 的检验统计量

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_w\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}}.$$

当H_0 成立时, $T \sim t_{m+n-2}$, 于是拒绝域为

$$\{T > t_{m+n-2}(\alpha)\}.$$

由所得数据算得检验统计量T 的观测值为

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s_w\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} = 3.23.$$

由$\alpha = 0.1$ 得临界值为$t_{m+n-2}(\alpha/2) = t_{17}(0.1) \approx 1.33 < 3.23$, 因此拒绝$H_0$, 即可以在显著性水平0.1 下认为磷肥对玉米的产量有显著性影响.

例 7.2.6. 在例*7.2.5*中假定了两个正态总体的方差是相等的, 即$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$. 现在我们根据样本来检验这个方差齐性的假设, 即要检验

$$H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \leftrightarrow H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1.$$

解: 因为σ_1^2 和σ_2^2 的极大似然估计分别是

$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(X_i - \bar{X})^2, \hat{\sigma}_2^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2.$$

在$\theta = \sigma_1^2/\sigma_2^2$ 的极大似然估计$\hat{\theta} = \hat{\sigma}_1^2/\hat{\sigma}_2^2$ 的基础上可以构造检验统计量

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{(m-1)\hat{\sigma}_1^2/m}{(n-1)\hat{\sigma}_2^2/n}.$$

注意到F 中的分子和分母分别是X 和Y 的样本方差. 当零假设成立时, $F \sim F_{m-1,n-1}$. 于是拒绝域为

$$\{F < F_{m-1,n-1}(\alpha/2) \quad \text{或} \quad F > F_{m-1,n-1}(1-\alpha/2)\}.$$

由数据算得检验统计量F 的观测值$f = 1.19$, 如果取显著性水平$\alpha = 0.2$, 那么临界值为$F_{9,8}(0.1) = 2.44$, $F_{9,8}(0.9) = 1/F_{8,9}(0.1) = 0.41$ (如果$X \sim F_{m,n}$, 则$1/X \sim F_{n,m}$). 易见$0.41 < 1.19 < 2.44$, 因此不能拒绝H_0, 即在显著性水平0.2 下可以认为上例中所作的方差齐性假定是合理的.

表7.2.2 总结了两样本正态总体的双侧假设检验.

§7.2.3 成对数据

在上述两样本正态总体的假设检验中, 要求两个样本是独立的, 但是没有要求样本量相等. 有一类数据叫做成对数据$\{(X_1, Y_1), \cdots, (X_n, Y_n)\}$, 比如一个病人在用药前后测得的指标分别为$X$ 和Y, 则X 与Y 总是一起出现的, 且由于它们是同一个体的指标, 故具有很大的相关性而绝对不是独立的, 这与两样本正态总体有本质区别. 另外, 两样本检验问题要求样本$X_1, \cdots, X_m$ 是同分布的($Y_1, \cdots, Y_n$ 亦然), 而成对数据则无此要求, 而要求$X_1 - Y_1, \cdots, X_n - Y_n$ 是同分布. 比如病人可以是来自两个不同性别、种族、年龄层的人. 要检验用药前后的指标有无显著差别, 可以构造一个新的总体$Z = Y - X$ 及样本$Z_1 = X_1 - Y_1, \cdots, Z_n = X_n - Y_n$, 相应的假设检验是一样本的! 在实际问题中, 如果发现有两个样本且其样本量是相等的, 则要检查独立性和同分布性, 否则可能是成对数据.

表 7.2.2 两样本正态总体的假设检验

检验对象	检验统计量	分布	拒绝域†
均值(方差已知)	$U=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}}$	$N(0,1)$	$\begin{cases}\lvert U\rvert>u(\alpha/2)\\ U>u(\alpha)\\ U<-u(\alpha)\end{cases}$
均值(方差未知)‡	$T=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}$	t_{m+n-2}	$\begin{cases}\lvert T\rvert>t_{m+n-2}(\alpha/2)\\ T>t_{m+n-2}(\alpha)\\ T<-t_{m+n-2}(\alpha)\end{cases}$
方差(均值已知)	$F=\frac{\sum_{i=1}^m(X_i-\mu_1)^2/m}{\sum_{i=1}^n(X_i-\mu_2)^2/n}$	$F_{m,n}$	$\begin{cases}F>F_{m,n}(\alpha/2)\text{或}F<\frac{1}{F_{n,m}(\alpha/2)}\\ F>F_{m,n}(\alpha)\\ F<\frac{1}{F_{n,m}(\alpha)}\end{cases}$
方差(均值未知)	$F=\frac{S_1^2}{S_2^2}$	$F_{m-1,n-1}$	$\begin{cases}F>F_{m-1,n-1}(\alpha/2)\text{或}F<\frac{1}{F_{n-1,m-1}(\alpha/2)}\\ F>F_{m-1,n-1}(\alpha)\\ F<\frac{1}{F_{n-1,m-1}(\alpha)}\end{cases}$

†有关均值的检验: 对立假设分别为$\mu_1\neq\mu_2$, $\mu_1>\mu_2$ 和$\mu_1<\mu_2$. 有关方差的检验: 对立假设分别为$\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$, $\sigma_1^2>\sigma_2^2$ 和$\sigma_1^2<\sigma_2^2$.
‡假定方差相等

§7.2.4 0-1 分布中未知参数p 的假设检验

产品验收时, 需要检验不合格率是否小于某给定的一个数.

设$(X_1,\cdots,X_n)$ 是取自总体X 的一个样本, 该总体服从0-1 分布, 取1 的概率为p. 常见的假设有三种:

(1) $H_0:p=p_0\leftrightarrow H_1:p\neq p_0$;

(2) $H_0:p=p_0\leftrightarrow H_1:p>p_0$ 或$H_0:p\leq p_0\leftrightarrow H_1:p>p_0$;

(3) $H_0:p=p_0\leftrightarrow H_1:p<p_0$ 或$H_0:p\geq p_0\leftrightarrow H_1:p<p_0$.

假定样本量n 较大, 取显著性水平为α. 由于p 的极大似然估计为$\bar{X}$, 取“标准化”过的检验统计量

$$T=\sqrt{n}\frac{\bar{X}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}},$$

其中p_0 和$p_0(1-p_0)/n$ 分别为$\bar{X}$ 在零假设$p=p_0$ 下的期望和方差, 从而当H_0 成立时, 由中心极限定理近似地有$T\sim N(0,1)$. 于是上述三种检验的拒绝域分别为

$$\{|T|>u_{\alpha/2},\quad \{T>u_\alpha\}\quad \text{和}\quad \{T<-u_\alpha\}$$

例 7.2.7. *某厂产品不合格率通常为0.5. 厂方希望知道原料产地的改变是否对产品的质量发生显著的影响. 现在随机地从原料产地改变后的产品中抽取了80 个样品进行检验, 发现有5 个是不合格品. 试问, 在显著性水平0.1 下, 厂方由此可以得出什么结论?*

解: 总体$X \sim B(1,p)$, 其中p 未知. 在显著性水平$\alpha = 0.1$ 下, 产品质量无变化等价于$p = 0.05$, 故我们要检验

$$H_0 : p = 0.05 \leftrightarrow H_1 : p \neq 0.05.$$

由于$\bar{x} = 5/80 = 0.0625$, 因此检验统计量T 的观测值

$$t = \sqrt{n}\frac{\bar{x} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} = 0.513.$$

由$\alpha = 0.10$ 得临界值$u_{0.05} = 1.645$. 易见, $|t| < 1.645$, 因此不能拒绝H_0, 即在近似显著性水平0.10 下可以认为原料产地的改变对该厂产品的质量没有发生显著的影响.

§7.2.5 置信区间和假设检验之间的关系

置信区间和假设检验之间有着明显的联系。我们首先考虑置信区间和双边检验之间的关系。设$X_1, \cdots, X_n$为从总体$F(x;\theta)$ 中抽取的样本，参数θ的$1-\alpha$置信区间为$[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$,即

$$P(\underline{\theta} \leq \theta \leq \bar{\theta}) \geqq 1 - \alpha$$

而对假设$H_0 : \theta = \theta_0 \leftrightarrow H_1 : \theta \neq \theta_0$，在原假设之下，有

$$P(\underline{\theta} \leq \theta_0 \leq \bar{\theta}) \geqq 1 - \alpha$$

等价于

$$P(\theta_0 > \bar{\theta}) + P(\theta_0 < \underline{\theta}) \leq \alpha$$

按显著性检验的定义，即得其检验为

$$\phi : \text{当 } \underline{\theta} \leq \theta_0 \leq \bar{\theta} \text{ 时，接受} H_0, \text{不然就拒绝}$$

反过来讲,如果假设$H_0 : \theta = \theta_0 \leftrightarrow H_1 : \theta \neq \theta_0$检验的接受域有形式

$$\underline{\theta}(x_1, \cdots, x_n) \leq \theta_0 \leq \bar{\theta}(x_1, \cdots, x_n)$$

即有

$$P(\underline{\theta} \leq \theta_0 \leq \bar{\theta}) \geqq 1 - \alpha$$

由θ_0的任意性，知对任意的θ，有

$$P(\underline{\theta} \leq \theta \leq \bar{\theta}) \geqq 1 - \alpha$$

即：为求出参数θ的$1-\alpha$置信区间，我们可以先找出θ的双边检验$H_0 : \theta = \theta_0 \leftrightarrow H_1 : \theta \neq \theta_0$的检验函数，则其接受域就是参数$\theta$的$1-\alpha$置信区间。反过来，为求假设$H_0 : \theta = \theta_0 \leftrightarrow H_1 : \theta \neq \theta_0$的检验，我们可以先求出参数$\theta$的$1-\alpha$置信区间，则就是该假设的接受域。

类似地，置信水平为$1-\alpha$的单侧置信区间$(\underline{\theta}, \infty)$ (或者$(-\infty, \bar{\theta})$)与显著性水平为α的右(或者左)边检验问题$H_0 : \theta \leq \theta_0 \leftrightarrow H_1 : \theta > \theta_0$ (或者$H_0 : \theta \geq \theta_0 \leftrightarrow H_1 : \theta < \theta_0$)，也有类似的对应关系。