目　录

第一章　事件与概率

§1.3　古典概型

(1) 古典概型: 有两个条件,

第一, (有限性) 试验结果只有有限个(记为n) ,

第二, (等可能性) 每个基本事件发生的可能性相同.

为计算事件A的概率, 设A中包含m个基本事件, 则定义事件A的概率为

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

记号: 为方便起见，以$|B|$记事件B中基本事件的个数，因此，

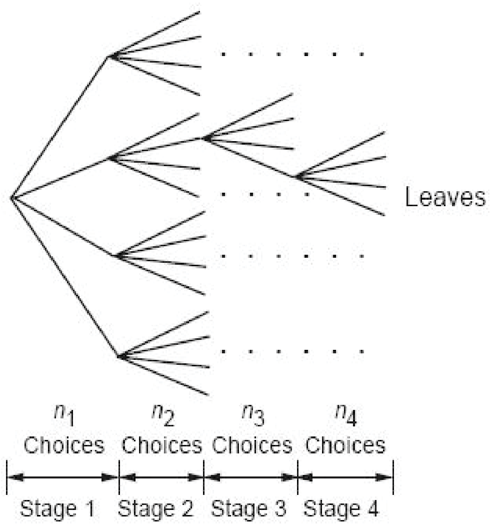
$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

计算古典概率, 主要用到排列组合的知识.

计数原理

乘法原理 假定进行过程I有n_1中方式，而对于过程I的每一个方式，进行过程II都有n_2种方式。那么，依次进行过程I与II共有n_1n_2种方式。

图 1.3.1 乘法原理



加法原理 假定进行过程I有n_1中方式，进行过程II有n_2种方式。那么，进行过程I或II共有n_1+n_2种方式。

排列组合

1. 从n个不同的元素中, 有放回地取出r个元素组成的可重复排列的种数为n^r种。从n个不同的元素中，不放回地取出r个元素组成的不重复排列的种数为$n(n-1)\cdots(n-r+1)=P_n^r$.
2. 从n个不同的元素中,不放回地取r个组成的组合，种数为
$$\binom{n}{r}=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!} \tag{1.3.1}$$
3. 从n个不同的元素中,有放回地取r个组成的组合(不考虑顺序)，种数为
$$\binom{n+r-1}{r}$$

在运用排列组合公式时, 要清楚次序问题.

例 1.3.1. *甲乙丙丁四人进行乒乓球双打练习,两人一对地结为对打的双方,有多少种不同的结对方式?*

可能有人会认为这个问题是简单的组合问题:从四人中选出两人结为一对,剩下的两人结为一对即可.于是他们算得:有$C_4^2=6$种方式.

但事实是否如此呢?我们还是实际地来排一排吧!不难看出,一共只有如下3种结对方式:

$$(1)\{甲,乙\}\ \{丙,丁\};\quad (2)\{甲,丙\}\ \{乙,丁\};\quad (3)\{甲,丁\}\ \{乙,丙\}.$$

这个事实说明,组合模式并不适用于这个问题.有人可能会问:这是为什么呢¿'组合" "组合", 不就是用来解决分组和结合问题的吗? 我们说:固然不错,"组合"是用来解决"分组"和"结合"问题的,但是这里仍然有着一个"顺序"问题. 固然,在按组合模式分出的"组内",元素之间是没有"顺序"的,但是需要指出的是:在"组"与"组"之间却存在着"顺序",或者叫做"编号"! 应当注意,在按"组合"模式计算时,我们计算的是"取出两个人"的所有不

同取法数目. 假如我们把取出的两人算为一组, 而把留下的两个人算为另一组. 那么由于“取出甲,乙, 留下丙,丁”和“取出丙,丁, 留下甲,乙” 是两种不同的取出方式, 而在这种计算方法中, 被算作是两种不同的“分组”方式, 从而得到如下6种“分组”方式:

(1)第一组为:{甲,乙}; 第二组为: {丙,丁};

(2)第一组为:{丙,丁}; 第二组为: {甲,乙};

(3)第一组为:{甲,丙}; 第二组为: {乙,丁};

(4)第一组为:{乙,丁}; 第二组为: {甲,丙};

(5)第一组为:{甲,丁}; 第二组为: {乙,丙};

(6)第一组为:{乙,丙}; 第二组为: {甲,丁}.

这就是说, 在这种计算中, 我们已经把所分出的组编了号: 取出的两个人为第一组,剩下的两人为第二组的. 这就告诉我们:

“组合”是一种“有编号的分组模式”, 或者说, 按照组合模式计算出的分组方式数目中,已经天然地把组的不同编号方式数目计算在内了.

例 1.3.2. *欲将6个人分为3组,每组2人,分别从事3项不同工作,求分配方式数.*

解: 先取出两人从事第1项工作,有C_6^2种方式;再取出两人从事第2项工作, 有C_4^2种方式;剩下的两人从事第3项工作. 所以一共有:

$$C_6^2 \cdot C_4^2 = \frac{6!}{4! \cdot 2!} \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 90$$

种分配方式.

在这里,3项工作是不同的,在它们之间天然地存在着“顺序”,或者叫”编号”,所以适用于组合模式.由于分出的组数多于两组,所以我们将分组过程分为几步进行.

例 1.3.3. *要把7人分为3个小组,执行同一种任务,其中一个组3人,另两个组各2人, 求分组方式数.*

解:显然这也是一个“无编号分组”问题. 但是却与上面的情况有所不同. 因为其中有一个3人组,无论是否编号,它都与其余两个组有所区别(编号无非是为了对分出的组加以区分),所以在按“有编号分组模式”算出分组方式数之后,只应再除以2! (即除去两个不加区分的组的排列顺序数),故得: 共有

$$\frac{7!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} \cdot \frac{1}{2!} = \frac{7!}{3! \cdot (2!)^3}$$

种分组方式.

为了适应这种分为多个“不同的”组的问题需求,人们总结出如下的“多组组合模式”:

4. **多组组合模式：** 有n个不同元素,要把它们分为k个不同的组,使得各组依次有$n_1, n_2, \cdots, n_k$个元素,其中$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$,则一共有

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_k!}$$

种不同分法.

4'. **不尽相异元素的排列模式** 有n个元素,属于k个不同的类,同类元素之间不可辨认,各类元素分别有n_1, n_2, $\cdots$, n_k个,其中$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$,要把它们排成一列,则一共有

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_k!}$$

种不同排法.

例 1.3.4. 一批产品有N个，其中废品有M个。现从中随机取出n个，在以下两种情形下，分别求“其中恰好有m个废品”这一事件的概率。

(1) 有放回地选取； *(2)* 不放回地选取

解: 记$A = \{$其中恰好有m个废品$\}$，则

(1) 有放回情形

$$|\Omega| = N^n, \quad |A| = \binom{n}{m} M^m (N-M)^{n-m}$$
$$P(A) = \frac{C_n^m M^m (N-M)^{n-m}}{N^n} = \binom{n}{m} \Big(\frac{M}{N}\Big)^m \Big(\frac{N-M}{N}\Big)^{n-m}$$

(2)不放回情形

$$|\Omega| = C_N^n, \quad |A| = C_M^m C_{N-M}^{n-m}$$
$$P(A) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$$

例 1.3.5. n个男生, m个女生排成一排$(m \le n+1)$. 求事件$A = \{$任意两个女孩不相邻$\}$的概率。又若排成一圈，又如何?

解: (1) 排成一排

$$
\begin{aligned}
|\Omega| &= (n+m)!, \quad |A| = n!C_{n+1}^{m}m! \\
P(A) &= \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{n!C_{n+1}^{m}m!}{(n+m)!}
\end{aligned}
$$

(2) 排成一圈

$$
\begin{aligned}
|\Omega| &= (n+m-1)!, \quad |A| = (n-1)!C_{n}^{m}m! \\
P(A) &= \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{(n-1)!C_{n}^{m}m!}{(n+m-1)!}
\end{aligned}
$$

例 1.3.6. *r个不同的球任意放入编号为1至n的n个盒子，每球入各盒均等可能，求下列事件的概率*

(1) A={指定的r个盒子各含一个球}

(2) B={每盒至多有一球}

(3) C={某指定盒中恰有m个球}

解: $|\Omega| = n^r$

(1) $|A| = r!$

(2) $|B| = C_n^r r!$

(3) $|C| = C_r^m (n-1)^{r-m}$

又若球是相同的，则在这里,r个球是相同的,n个盒子是互不相同的. 因此我们只需要关心各个盒子中的球数,而无需考虑哪个球落在哪个盒子中. 我们可把问题设想为：

r个相同的小球已经一字排开,只须在它们之间加上$n-1$块隔板,把它们隔为n段, 然后让各段对号放入相应的盒子即可. 由于盒子可空, 相当于要将$r+n-1$个不尽相异的元素进行排列,其中1类元素(小球)有r个, 另1类元素(隔板)有$n-1$个,所以由不尽相异元素的排列模式知, 一共有

$$C_{r+n-1}^{r} = C_{r+n-1}^{n-1}$$

种不同分法.因此

$$|\Omega| = \binom{n+r-1}{n-1}$$

(1) $|A| = 1$

(2) $|B| = C_n^r$

(3) $|C| = \binom{r-m+n-1-1}{r-m}$

注： 球相异和球相同两种情形下的样本空间是不同的，即机会均等原则是不同的。(各是什么呢？) 这个例子是古典概型中一个很典型的问题，不少实际问题可以归结为它. 例如，若把球解释为粒子，把盒子解释为相空间中的小区域，则这个问题便相应于统计物理学里的Maxwell－Boltzmann统计. 概率论历史上有一个颇为有名的问题，要求参加某次集会的r个人中没有两个人生日相同的概率. 若把r个人看作上面问题中的r个球，而把一年的365看作为盒子，则$n = 365$，这时事件B的概率即为所求概率。例如当$r = 40$时，$P(B) = 0.109$，这个概率已经相当小；而当$r = 50$时, $P(B) = 0.03$。进一步当$r = 55$时，$P(B)$之值只有0.01，这实在是出乎意料地小。总之，投球问题中球相遇的概率比预料的大得多，这种意外在研究随机现象中时常遇见，也算是随机现象的特性之一吧！

例 1.3.7. *设有方程$x + y + z = 15$,试分别求出它的正整数解和非负整数解(x, y, z) 的组数.*

解: 本题可以设想为将15个无区别的小球分入3个不同的盒子,再分别将第$1, 2, 3$个盒中的球数对应为x, y, z的值即可.所以,非负整数解的组数(相当于允许出现空盒的情况)为：

$$C_{15+3-1}^{15} = C_{17}^{2} = \frac{17 \times 16}{2} = 136;$$

而正整数解的组数(相当于不允许出现空盒的情况)为：

$$C_{15-1}^{3-1} = C_{14}^{2} = \frac{14 \cdot 13}{2} = 91. \quad \#$$

注: 此例的方法即是证明公式(1.3.1)的方法。

例 1.3.8. *一个班有r个人, 不计2月29日出生的(即假定一年为365天)，问至少有两人同一天生日的概率是多少?*

要点: (1) 本问题中的样本空间是什么? (2) 重复排列, (3) 先计算余事件

例 1.3.9. *盒中有32只红球, 4只白球, 从中任摸2球, 求两球中至少有一个白球的概率.*

要点: (1) 样本空间可以考虑为所有可能的组合, 也可以考虑为所有可能的选排列, 有些问题中只能考虑其中之一, 具体问题具体分析,

(2) 本题可以直接计算随机事件的概率, 也可以先计算对应的余事件的概率, 然后得到所需事件的概率.

例 1.3.10. 设有n个人随机地坐到礼堂第一排N个座位上去，试求下列事件的概率：*(1)*任何人都没有邻座；*(2)* 每人恰有一个邻座；*(3)* 关于中央座位对称的两个座位至少有一个空着。

解：分别用A, B, C表示上述(1)-(3)各事件。则$|\Omega| = P_N^n$.
(1) 视此n个人为"女生"，$N-n$个座位为"男生"，则$|A| = C_{N-n+1}^{n} n!$
(2) $|B| = C_{N-n+1}^{n/2} n!$
(3)

$$|C| = \begin{cases} C_{N/2}^{n} 2^n n!, & N \ is \ even \\ nC_{(N-1)/2}^{n-1} 2^{n-1}(n-1)! + C_{(N-1)/2}^{n} 2^n n!, & N \ is \ odd \end{cases}$$

§1.4 几何概率

在实际中，我们还会碰到样本点无限多的情形。此处举几个例子。

定义 1.4.1. 设Ω是欧氏空间中确定的集合，满足条件$0 < m(\Omega) < +\infty$。对Ω中的任何可测子集A,称

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}$$

为事件A的几何概率。这里等可能性体现在"落在区域A的概率与区域A的测度成正比并且与其形状位置无关。"

例 1.4.1. 甲乙两人约定在$[0, T]$时段内去某地会面，规定先到者等候一段时间$t(t \leq T)$再离去。试求事件A={甲乙将会面}的概率。

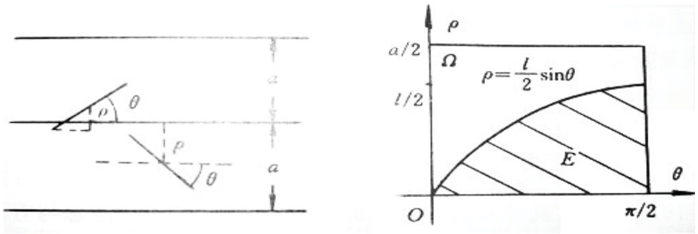
解：以x, y分别表示甲乙到达会面地点的时间。则$\Omega = \{(x, y)|0 \leq x, y \leq T\}$，而$A = \{(x, y)||x-y| \leq t\}$，因此$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = 1 - (1 - \frac{t}{T})^2$.

例 1.4.2. 桌面上画满间隔均为a的平行线，现向桌面任意投放一长为$l(l < a)$的针，求事件E ={针与某直线相交}的概率。

解：如下图所示，针的位置由针的中点到最近直线的距离ρ及针与直线所夹锐角θ决定。于是$\Omega = \{(\rho, \theta) : 0 \leq \rho \leq a/2, 0 \leq \theta \leq \pi/2\}$. 由针的任意性，样本点$(\rho, \theta)$ 在Ω中均匀分布，是几何概型。而针与某直线相交，当且仅当$\rho \leq \frac{l}{2} sin\theta$. 即

$$E = \{(\rho, \theta) \in \Omega : \rho \leq \frac{l}{2} sin\theta\}$$

图 1.4.1 针和平行线位置关系



$$m(\Omega)=\frac{\pi a}{4},\quad m(E)=\int_0^{\pi/2}\frac{l}{2}sin\theta d\theta$$

所以

$$P(E)=\frac{m(E)}{m(\Omega)}=\frac{2l}{\pi a}.$$

值得注意的是这里采用的方法：建立一个概率模型，它与某些我们感兴趣的量–这里是常数π–有关，然后设计随机试验，并通过这个试验的结果来确定这些量。这也就是Monte-Carlo思想.

例 1.4.3. 设随机向区间$[0,1)$中投一个点，记A为该点落入$(0,\frac{1}{2})$, A_n为该点落入区间$[\frac{1}{2^{n+1}},\frac{1}{2^n})$，则

$$A=\sum_{n=1}^{\infty}A_n.$$

如果假定所投的点落入某区间的概率等于该区间的长度，则$P(A)=1/2, P(A_n)=\frac{1}{2^{n+1}}$，所以有

$$P(A)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)$$

这个例子说明了我们在前面所提到的概率的频率定义的缺陷。

例 1.4.4. 在圆周上任取三点A,B,C，求事件E=$\{\triangle ABC$为锐角三角形$\}$的概率。*(1/4)*

例 1.4.5. 在圆上任取两点A,B连成一条弦，再任取两点C,D连成一弦，求AB与CD相交的概率。*(1/3)*