第 25卷,第 5期
2008年 10月
科 学 技 术 与 辩 证 法
Science, Technology and Dialectics
Vol 25 No. 5
Oct , 2008

·科技史 ·

圣彼得堡概率论学派的中心极限定理思想研究

徐传胜[1],冯晓华[2],刘建宇[1]

(1. 临沂师范学院数学系,山东 临沂 276001; 2. 山西大学科学技术哲学研究中心,山西 太原 030006)

摘 要: 至 19世纪中叶,中心极限定理还仅为简单形式且无严格数学证明。圣彼得堡概率论学派充分认识到其重要性,率先对其展开了研究。1887年,切比雪夫用矩方法证明了中心极限定理,马尔可夫进一步完善了其证明,第一个给出中心极限定理的严格证明。李雅普诺夫用特征函数法再次证明了中心极限定理,并拓广了定理。他们师徒的论证引发了中心极限定理研究转向近代概率论,从而推进了概率论的发展进程。

关键词: 中心极限定理;概率论;正态分布;矩方法;特征函数

中图分类号: N092; O211 **文献标识码**: A **文章编号**: 1003 - 5680 (2008) 05 - 0084 - 06

"中心极限定理"术语是波利亚 (G. Polya, 1887 - 1985) 1920年引入的。中心极限定理是概率论中研究随机变量序列部分和分布的一类定理。该定理断言在适当条件下,大量独立随机变量和的概率分布近似于正态分布。它是概率论的重要内容,也是数理统计学的基石之一。在长达两个世纪的时期内极限定理是概率论的中心研究课题。

19世纪后半叶,随着数学基础的逐步加强,俄罗斯开始形成自己的数学学派,这就是以切比雪夫 (P. L. Chebyshev, 1821 - 1894)为首的圣彼得堡概率论学派。该学派的中流砥柱则是马尔可夫 (A. A. Markov, 1856 - 1922)和李雅普诺夫 (A. M. Lyapunov, 1857 - 1918)。他们师徒互相合作,分别用矩方法和特征函数法第一次严格证明了中心极限定理,发展了中心极限定理理论,奠定了现代概率论的基础。正是圣彼得堡概率论学派把概率论从濒临衰亡境地挽救出来,并恢复为一门数学学科。

然而,目前国内外系统研究中心极限定理思想者还较少,尤其是对圣彼得堡概率论学派的概率思想介绍仅见于一般数学通史著作中,这无疑是一个缺憾。鉴此本文在解读有关讲义、文集和其他原始相关文献的基础上,系统探讨了圣彼得堡概率论学派的中心极限定理思想,力图对其研究过程中概率思想的发展提出更为合理的诠释。

一 正态分布和中心极限定理的提出

极限定理源于伯努利试验概型。在伯努利试验中,若以 μ_n 记 n次独立试验中随机事件 A出现的次数,则 μ_n / n便是在这 n次试验中事件 A出现的频率,故讨论频率 μ_n / n的极限行为是理解概率论中最基本概念——概率所不可缺少的。

为研究 μ_n的极限行为,可讨论其分布。但由于 $E\mu_n = np, D\mu_n = npq$,对于固定的 x来说, $P(\mu_n < x)$的极限将趋于 0,故通常研究其"标准化"随机变量的分布函数的极限行为,该结果最早由法国数学家棣莫弗 (A. De Moivre, 1667 - 1754)建立[1]。拉普拉斯 (Pierre - Simon marquis de Laplace, 1749～1827)于 1780年推广了棣莫弗的结果,即棣莫弗 - 拉普拉

【收稿日期】 2008 - 01 - 15
【基金项目】 国家自然科学基金会 (10771169);吴文俊丝绸之路天元基金会项目
【作者简介】 徐传胜 (1962 -),山东聊城人,山东临沂师范学院数学系教授,研究方向为应用概率论和概率论史;
冯晓华 (1977 -),山西原平人,山西大学科学技术哲学研究中心讲师,研究方向为近现代数学史;
刘建宇 (1966 -),山东临沂人,山东临沂师范学院数学系讲师,研究方向为大学数学教育。

斯积分极限定理。与棣莫弗不同的是,拉普拉斯应用 Maclaurin - Euler求和公式来证明,并认识到中心极限定理的重要性。[2]

误差分析是概率论的生长点之一。若把随机变量总和中的每项看作小的"基本误差",则中心极限定理就为观察误差中正态分布的发生给出解释。高斯(C. F. Gauss, 1777 - 1855)于 1809年在研究测量误差时再次发现了正态分布。

拉普拉斯很快得知高斯的研究成果,并将其与中心极限定理联系起来。为此,他在即将发表的一篇文章(发表于 1810年)上加了一点补充,指出若误差可看作许多量的叠加,据中心极限定理,则误差理应服从正态分布。这是历史上首次提到所谓"元误差学说"——误差是由大量的、种种原因产生的元误差叠加而成,这也是中心极限定理的第一次应用[3]。

二 中心极限定理的第一次严格证明和发展

正态分布作为一种统计模型,在 19世纪极为流行,一些学者甚至把 19世纪的数理统计学称为正态分布的统治时代。故需要通过对中心极限定理的研究来阐明其相关理论、适用条件和发展空间。圣彼得堡概率论学派充分认识到中心极限定理的重要性,率先对其展开了研究。

(一)母函数法证明中心极限定理

虽切比雪夫仅发表了 4篇关于概率论的论文,但其影响难以估量。正是切比雪夫给门庭冷落的概率论带来了勃勃生机,其概率思想引发了古典概率论的变革[4]。

切比雪夫对概率论的研究可分为两个阶段:(1)攻读硕士学位阶段 期间,受布拉斯曼(N. D. Brashman, 1796 - 1866)的影响,对概率论产生兴趣并写下有关的硕士论文。(2)讲授概率论课程阶段 切比雪夫深受法国数学家比埃奈梅(J. Bienaymé, 1796 - 1878)和俄罗斯数学界元宿布尼亚科夫斯基(V. Y. Buniakovsky, 1804 - 1889)的影响。布尼亚科夫斯基从 1850年到 1859年退休一直讲授概率论这门课程。当切比雪夫接替布尼亚科夫斯基讲授概率论时,再次把研究兴趣聚焦在概率论。关于中心极限定理的证明,切比雪夫发表于 1887年,但他在讲授概率论时用母函数给出该定理的一个证明。

母函数在 19世纪被拉普拉斯引进,它是概率论中第一个被系统应用的变换法。该方法在整数值随机变量场合很有用,是特征函数的先导,由此发展起来的 Z变换法已成为解决许多问题的重要方法。母函数最基本的性质是独立随机变量和的母函数等于原母函数的乘积,这给计算带来了方便。切比雪夫所给证明为[5]:

设随机变量 $X, Y, Z, \cdots$,取值于 $x_i, y_i, z_i, \cdots$,的概率分别为 $p_i, q_i, r_i, \cdots, (i=1, 2, \cdots, n)$。

记

$$EX = a, EY = b, EZ = c, \cdots,$$

$$EX^2 = a_1, EY^2 = B_1, EZ^2 = C_1, \cdots,$$

$$a + b + c + \cdots = A,$$

$$a_1 - a^2 + b_1 - b^2 + c_1 - c^2 + \cdots = B,$$

$$P(X + Y + Z + \cdots = s) = P_s$$

利用母函数性质得到

$$\sum p_s t^s = (p_1 t^{x_1} + p_2 t^{x_2} + \cdots + p_n t^{x_n}) \cdot (q_1 t^{y_1} + q_2 t^{y_2} + \cdots + q_n t^{y_n}) \cdot (r_1 t^{z_1} + r_2 t^{z_2} + \cdots + r_n t^{z_n}) \cdots$$

$$p_s = 1/2\pi \int_{-\pi}^{\pi} [p_1 \exp(ix_1\phi) + \cdots p_n \exp(ix_n\phi)] \cdots [r_1 \exp(iz_1\phi) + rn exp(iz_n\phi)] [\cdots] \exp(-is\phi)\, d\phi$$

$$= 1/2\pi \int_{-\pi}^{\pi} \exp(-B\phi^2/2) \exp(A\phi i) \exp(-s\phi i)\, d\phi$$

$$= 1/\pi \int_{0}^{\pi} \exp(-B\phi^2/2) \cos[(A-s)\phi]\, d\phi$$

因 B是方差之和,故为正数且随着随机变量个数的增加而递增。切比雪夫假定积分上限为无穷大,则有

$$P_s = (1/2\pi B)^{1/2} \exp[-(A-s)^2/2B]$$

进而得到积分定理

$$P(-u\sqrt{2B} < s - A < u\sqrt{2B}) = 2/\sqrt{\pi} \int_0^u \exp(-t^2)\, dt$$

切比雪夫注释到,为了严格证明,这里做了一些假设,因而就会导致产生一些错误。从目前看,当时的数学工具还不能导出满意的边界值。

(二)矩方法证明中心极限定理

1. 矩方法思想及其发展

比埃奈梅在 1833年向巴黎科学院递交的一篇论文中,将力学中矩的概念作了推广,并给出现今所谓的切比雪夫不等式。1867年,切比雪夫将论文"论均值"同时以俄语刊登在《圣彼得堡数理学报》,和以法语发表在《刘维尔杂志》上。直到发表后,切比雪夫方知比埃奈梅早已给出了相关证明。刘维尔(J. Liouville, 1809 - 1882)将比埃奈梅的论文刊登在

切比雪夫的论文前面,并给出编者按,暗示这两篇文章的相互联系。切比雪夫立即意识利用矩方法可解决许多困难的极限估计问题,并试图应用于中心极限定理的证明。

1874年,切比雪夫在递交给法国学术会议的论文《关于积分的极限值》(Sur les valeurs limites des intégrales)中,指出矩方法的精髓:

"这个方法以 $\int f(x)\,dx$, $\int xf(x)\,dx$, $\int x^2 f(x)\,dx$, …来确定积分值 $\int f(x)\,dx$。这里 $A > a$,且 $f(x)$是未知函数并假定在积分区间内恒为正值。"[6]

切比雪夫通过连分数收敛于级数的形式分解,给出积分

$$\int_0^x f(x)\,dx$$

的取值范围及一些不等式,但没有详细证明。

马尔可夫对切比雪夫的矩问题作了深入研究。在 1884 年的《某些切比雪夫积分的证明》(Démonstration de certaines inégalités de M. Tchebycheff)论文中,马尔可夫给出了这些不等式的严格证明,并在同年通过的博士论文第三部分给出了切比雪夫问题的完整解答。后又在 1897年的一系列论文中作了进一步的阐述,其中最为重要的一篇是《关于矩的 L问题》(L - проблема моментов)。文中他把切比雪夫问题拓广为:

已知 (1) $m_k = \int x^k f(x)\,dx\ (k = 0, 1, 2, \cdots, n+1)$

(2) $0 \le f(x) \le L$ (L为常数)

(3) $g(x)$为 (a, b)上的已知实函数

来确定积分 $\int f(x) g(x)\,dx$对所有 $f(x)$的最值。[7]126

这里出现了泛函的雏形。马尔可夫在 $g(x)$前 $n+1$阶导数存在且在 (a, b)上不变号的条件下解决了问题。

荷兰数学家斯捷尔吉斯 (Th. J. Stieltjes, 1856 - 1894)同时也进行了类似研究,他给出了与马尔可夫相近的结果。俄罗斯数学界宣称拥有优先权。斯捷尔吉斯声称未见马尔可夫的论文,也不知切比雪夫所提问题。后马尔可夫与斯捷尔吉斯成为好朋友,他们频繁交流在矩理论以及有关内插法、构造积分、余项估价和连分数等方面的新成果。

斯捷尔吉斯综述了有关研究结果,并解决了无穷区间 $(0, \infty)$上的矩问题,给出所要寻找函数的一切整数阶矩的连分数表达式。马尔可夫在 1895年发表的《某些连分数收敛性的两个证明》(Deux démonstrtions de la convergence de certaines fractions continues)中,给出了斯捷尔吉斯连分数收敛的充要条件。[8]

2 中心极限定理的切比雪夫矩方法证明

1887年,切比雪夫的论文《论概率论中的两个定理》(О двух теоремах относительно вероятностей)作为圣彼得堡科学院院刊附录而问世,在 1890以法语发表在《数学学报》上。切比雪夫利用矩方法来证明中心极限定理。他的命题很正确,尽管证明中有些漏洞。切比雪夫注释到,他没有给出定理的严格证明,但应用 Chebyshev - Hermite 多项式的渐进展开可以得到更严密的证明。[9]

设随机变量序列 $\xi_1, \xi_2 \cdots \xi_n \cdots$,其均值皆为 0,将其标准化 $\xi_n = \dfrac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{\sqrt{D(\xi_1 + \cdots + \xi_n)}}$,相应 k阶矩记为 m_k,而标准正态分布的 k阶矩记为 μ_k。

按照切比雪夫的观点,要证明中心极限定理,需要证明

(a)当 $n \to \infty$时,对任意 k,有 $m_k \to \mu_k$;

(b)对任意 k,若有 $m_k \to \mu_k$,则 $F_{\xi_n}(x) \to \Phi(x)$,这里 $\Phi(x)$为标准正态分布的分布函数[10]。

马尔可夫于 1884年证明了切比雪夫所给出的一些不等式,这无疑加快了切比雪夫的研究。在 1886年,切比雪夫证明若 $m_k = \mu_k$,则有 $F(x) = \Phi(x)$。他认为该条件等价于 (b),但马尔可夫不赞同。

1887年,切比雪夫又证明了 (a)。最终切比雪夫所给中心极限定理为[11]:

若 (1) $u_1, u_2, \cdots u_n, \cdots$为随机变量列,且 $Eu_i = \alpha_i^{(1)} = 0\ (i = 1, 2, \cdots)$

(2)设 $Eu_i^k = \alpha_i^{(k)} = 0\ (i = 1, 2, \cdots)$,且对所有 k一致有界。则有

$$\lim_{n\to\infty} P\left(z_1 < \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{\sqrt{2(a_1^{(2)} + a_2^{(2)} + \cdots a_n^{(2)})}} < z_2\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{z_1}^{z_2} e^{-x^2}\,dx$$

这里把 (b)转换成了 (2)。切比雪夫所给的条件是不严密的。他没有说明随机变量必须是相互独立的,这是沿用了当时的学术研究习惯。他没有考虑到当 $n \to \infty$时,表达式 $(1/n)\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{(2)}$ 可能趋于 0,在这种情况下,结论是错误的。第 (2)条太苛刻,它依赖于矩的阶数,事实上没有必要要求对所有 k成立。正是由于这个条件使证明变得相当繁杂。

切比雪夫还提出了估计中心极限定理中有关收敛速度的问题。他猜想:在一定条件下,有可能依照 $n^{-1/2}$的方幂渐进展开独立随机变量和的分布函数,这里 n为随机变量和的项数。这一猜测被后来的研

究所证实。

3. 中心极限定理的马尔可夫矩方法证明

马尔可夫认为,切比雪夫在1887年所给中心极限定理的证明存在某些缺陷。在给圣彼得堡数学学派的另一成员,喀山大学的瓦西里耶夫(A. V. Vassilyev, 1853 - 1929)的信中,马尔可夫写道:

“在较长一段时间内,切比雪夫正在证明的定理被认为是无误的。实际上,他所给的是一不精确的过程,之所以没有说其为证明,因我认为那是一个不严密的证明。定理的由来简洁易懂,而切比雪夫以初等工具为基础,把问题变得复杂化了。这样自然有了疑问,是否二者本质上一致?可否给出严格的证明?你对切比雪夫工作的研究,加强了我很久以来的愿望,那就是在简化整个证明过程的同时,确保切比雪夫分析的精确化。”[7]128

他特别称老师的结果为“切比雪夫正在证明的定理”,这封信后来以《大数定律和最小二乘法》(The law of large numbers and the method of ledst squares)为题发表在1898年的《喀山大学数理学报》上。同年,马尔可夫在另一论文《论方程 $e^{x^2}\dfrac{d^m(e^{-x^2})}{dx^m}=0$ 的根》(Sur les racines de l'équation $e^{x^2}\dfrac{d^m(e^{-x^2})}{dx^m}=0$)中,尽力精确地陈述并证明了切比雪夫所提出的命题。改进后的方法被人称作切比雪夫-马尔可夫方法。

马尔可夫把切比雪夫原条件:当 $n\to\infty$ 时,对任意 k,有 $m_k\to\mu_k$ 改为:

(1)对任意 k, $E\xi_1^k, E\xi_2^k, \cdots$ 有界;(2)对所有 n, $D(\xi_1+\cdots+\xi_n)\geq cn$, $c>0$。

相应计算以多项式 $(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2$ 的展开式为基础,以连分数为工具进一步分析了切比雪夫不等式。马尔可夫通过实例验证条件(2)是不可忽略的,但切比雪夫没有注意到这一点[12]。

马尔可夫认为,需要添加条件,一个是随机变量序列相互独立,再者

$$\lim_{n\to\infty}\frac{E(\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n)^2}{n}\neq\varepsilon$$

即上述极限存在且不为0。他给出一随机变量相互独立的简化表达式

$$\lim_{n\to\infty}E\left(\frac{\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n}{\sqrt{2E(\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n)^2}}\right)^m=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}x^m\exp(-x^2)\,dx$$

马尔可夫宣称用上述条件,可以导出中心极限定理[13]。即若对任意自然数 m,有

$$\lim_{n\to\infty}E(\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n)^m=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-x^2)\,dx$$

则

$$\lim_{n\to\infty}P(t_1<\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n<t_2)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_1^2\exp(-x^2)\,dx$$

马尔可夫称上述定理是他和切比雪夫共同创立的。他应用狄利克雷不连续因子建立了这个定理,并承认证明是不严格。

这样,马尔可夫所给的中心极限定理为[14]:

设相互独立的随机变量序列 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots$,记 $B_n=\sqrt{D\xi_1+D\xi_2+\cdots+D\xi_n}$

$$C_n(r)=E|\xi_1-E\xi_1|^r+E|\xi_2-E\xi_2|^r+\cdots+E|\xi_n-E\xi_n|^r,$$

对 $r\geq3$ 的所有整数有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{C_n(r)}{B_n^r}=0$$

则

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-E\xi_k)<x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-z^2/2}\,dz$$

不久,马尔可夫就将原来的条件

$$\lim_{n\to\infty}\frac{E(\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n)^2}{n}\neq\varepsilon$$

换成下述不等式

$$\lim_{n\to\infty}E\xi_k^2\neq0$$

他还证明,对独立随机变量序列 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots$,若有二阶矩 b_k, $k=1,2,\cdots$,存在绝对矩 $E\xi_k^\alpha\equiv b_k^\alpha$, $\alpha=3,4,5,\cdots$,则使得下式成立

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_1^{(\alpha)}+b_2^{(\alpha)}+\cdots+b_n^{(\alpha)}}{(b_1+b_2+\cdots+b_n)^{\alpha/2}}=0^{[14]}$$

1908年,马尔可夫再次扩展了矩方法的应用,并证明了中心极限定理[14]362。此时,他把定理的条件换成李雅普诺夫条件:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[b_1^{(2+\delta)}+b_2^{(2+\delta)}+\cdots+b_n^{(2+\delta)}]^2}{(b_1+b_2+\cdots+b_n)^{2+\delta}}=0,$$

$$\delta>0$$

至此,矩方法严格证明中心极限定理获得圆满成功。

(三)特征函数法证明中心极限定理

李雅普诺夫虽仅发表两篇关于概率论的论文,但在概率论发展中却具有划时代重要作用。在大学三、四年级时,李雅普诺夫曾系统地听了切比雪夫的

概率论课,对老师当年在讲到极限定理证明时的一段话有着深刻印象。切比雪夫当时说:

“我们在证明时做了种种假设,但却未能顾及出由此而产生的误差,因而结论是不严密的。然而在目前,我们还无法采用任何令人满意的数学手段来证明这些结论。”[15]

李雅普诺夫不像马尔可夫那样深受切比雪夫的影响,他有一套独特的思维方法,被切比雪夫誉为“超越方法”。正是他不同凡响的方法激起马尔可夫“暴风雨般的技巧”。

马尔可夫对中心极限定理的证明要求对任何整数 $p>2$,独立随机变量序列的 p阶矩在一定意义下的平均值 $M_n^{(p)}\to 0\ (n\to\infty)$。能否找到适当的 $\delta>0$ (δ不一定是整数),以 $p=2+\delta$阶矩的性质来代替马尔可夫的条件呢?这便是李雅普诺夫所考虑的问题。

李雅普诺夫在 1900年发表的《概率论的一个定理》(Sur une proposition de la théorie des probabilités)论文中指出,矩方法过于复杂和笨拙,因而应从一个全新的角度去考察中心极限定理,并引入了特征函数这一有力工具,而利用特征函数法来证明中心极限定理,其证明方法与现在用于素数理论中的方法相类似,避免了矩方法要求高阶矩存在的苛刻条件[16]。

李雅普诺夫首先将 δ取作 1,试图仅用 $M_n^{(3)}\to 0\ (n\to\infty)$来代替马尔可夫的条件,但是由于推算中的困难,他不得不做了某些让步,另外加上所有随机变量的 3阶矩一致有界等条件,从而部分实现了用 3阶矩的存在去代替一切矩存在的拓广。接着,他又于 1901年发表的《概率论极限定理的新形式》(Nouvelle forme du théorème de probabilité),对 $0<\delta\le 1$的任意 δ都证明了中心极限定理。

李雅普诺夫的成功,其意义不仅在他所证明定理的内容,更在于证明过程中所创造的一种崭新方法——特征函数法。与矩方法相比,特征函数法显得更灵活、更具一般性。而且通过特征函数实现了数学方法上的革命,为中心极限定理的进一步精确化奠定了基础,为概率论学科的飞跃发展准备了条件。

所谓特征函数方法,就是对每个随机变量(或其分布函数)作傅里叶变换,得到实变数的复值函数。在此变换下,相互独立的随机变量和的特征函数等于随机变量特征函数的乘积。这就为研究独立随机变量和的极限分布提供了一个简便有力的工具。因为独立随机变量和的分布是各加项分布的卷积,而在加项数目趋于无穷的场合,对卷积作数学处理是比较困难的,为此切比雪夫和马尔可夫才设法通过矩来考察其一般规律,所以矩方法所损失的信息过多。特征函数方法则保留了随机变数分布规律的全部信息,同时提供了特征函数的收敛性质与分布函数的收敛性质之间一一对应的关系。因而这一方法的引入使独立随机变数和的弱极限理论获得了疾足长进的机会。李雅普诺夫中心极限定理为:

设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots$是相互独立的随机变量序列,且具有有限的数学期望和方差:

$E(\xi_k)=\mu_k,\ D(\xi_k)=\sigma_k^2\neq 0,\ (K=1,2,\cdots)$记 $B_n^2=\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2$,若存在正数 δ,使得

(1) $d_n=E|\xi_n|^{2+\delta}$有界;

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{B_n^{2+\delta}}\sum_{k=1}^{n}E|\xi_k-\mu_k|^{2+\delta}=0$,则对于任意 $x\in(-\infty,+\infty)$,随机变量 $Z_n=\frac{\sum_{k=1}^{n}\xi_k-\sum_{k=1}^{n}\mu_k}{B_n}$的分布函数 $F_n(x)$均有:

$$\lim_{n\to\infty}F_n(x)=\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{\sum_{k=1}^{n}\xi_k-\sum_{k=1}^{n}\mu_k}{B_n}\le x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

上述定理表明,当 $n\to\infty$时,Z_n服从标准正态分布 $N(0,1)$。[17]

定理的条件已接近于充要条件。尽管条件(2)类似于切比雪夫和马尔可夫所给条件,但条件(1)比切比雪夫和马尔可夫所给条件要宽松得多,没有要求 3阶及以上矩存在[18]。

在证明中,李雅普诺夫利用了引理:

设 $F_n(t)$是随机变量 z_n的分布函数,且 $Ez_n=1$,$Dz_n=0$。若 z_n的特征函数 $E[\exp(\theta z_n)]$在任何关于原点对称的有限区间上一直收敛于正态分布的特征函数 $\exp(-\frac{1}{2}\theta^2)$,则对所有 t,有 $F_n(t)\to\Phi(t)$。

尽管李雅普诺夫未明确提出上述引理,但已含有其证明。后林德贝格(J. W. Lindeberg)和莱维(Paul Lévy, 1886-1971)都深受其启发,进而给出中心极限定理的更完善发展。林德贝格直率地承认李雅普诺夫的优先权,并致以感谢。而勒维及其他法国数学家始终未认可俄罗斯数学家的贡献。

深受泊松和柯西的影响,很早以前李雅普诺夫就引进了特征函数和狄利克雷间断因子。这里他利

用特征函数精确描述了中心极限定理的条件,第一次科学地解释了为什么实际中遇到的许多随机变量近似服从正态分布。这是对拉普拉斯和切比雪夫方法的发展。

另外一个从理论和应用上都应当关心的问题是,仅知道某个概率分布渐近正态分布是不够的,还必须知道换成正态分布后误差有多大。李亚普诺夫又给出了这个误差的一个上限,并准确估计出正态分布随机变量和收敛的速度。[19]

后马尔可夫一直追求恢复矩方法的声誉。由于李雅普诺夫放弃了随机变量所有矩存在的条件,马尔可夫也不得不弃之。但利用矩方法这是最基本的条件,是无法超越的障碍。

经过 8年的努力马尔可夫终于获得成功,在《论院士李雅普诺夫所建立的概率极限定理》(Теорема о пределе вероятности для случаевакадемика А М Ляпунова)一文中,他创造了一种"截尾术",即在适当的地方截断随机变量使其有界,这样就可以既不改变它们和的极限分布,又能保证其任意阶矩的存在。这一成果不仅克服了特征函数法过分依赖独立性的弱点,开辟了通向非独立随机变量研究的道路,而且突破了特征函数仅适用于弱极限理论范畴的局限,为强极限理论发展提供了有力的手段。应用这一技术,马尔可夫一举实现了他多年来精确论证中心极限定理的理想,其研究成果被收入其《概率演算》的第 3版中。马尔可夫和李雅普诺夫关于概率论方法论的竞争,极大地丰富了本世纪初概率论的内容,对该学科的现代化产生了深远的影响。今天,"截尾术"与"对称化"、"中心化"成为现代极限理论中的三大技术,发挥着难以估量的作用。

三 结束语

圣彼得堡概率论学派所从事的中心极限定理研究还属于古典极限定理范畴。当时这门学科的基础尚未奠定,一些重要的理论工具如集合论、测度论也不具备,甚至概率论本身也隐藏着循环推理的致命内伤,贝特朗 (J. Bertrand, 1822 - 1900)悖论又使几何概型陷入困窘的境地。圣彼得堡概率论学派正是在这荆棘丛生、危机四伏的环境中开出一条新路。他们所完成的方法论基本变革不仅满足于严格证明的要求,而且能够随时精密地估计试验的结果。切比雪夫引出的一系列概念和研究题材为俄罗斯以及后来苏联的数学家继承和发展。马尔可夫对"矩方法"作了补充,圆满地解决了随机变量的和按正态收敛的条件问题。李雅普诺夫则发展了特征函数方法,从而引起中心极限定理研究向现代化方向上的转变。

若极限分布不是正态分布的情形,求独立且同分布的随机变量的和收敛于给定极限的条件,属于近代极限理论。意大利数学家芬耐蒂 (B. de Finetti)在 1929年引进无穷可分分布律是关键的一步,1934年莱维给出其完全刻划。1936年辛钦 (A. Ya Khintchine, 1894 - 1959)和伯恩斯坦 (S. N. Bernstein, 1880 - 1968)证明某种条件的独立随机变量和的极限分布都是无穷可分分布律。1939年前苏联数学家格涅坚科 (B. V. Gnedenko, 1912 - 1995)及德国数学家杜柏林 (W. Doblin, 1915 - 1940)独立给出收敛于无穷可分分布律的充分必要条件。以柯尔莫哥洛夫 (A. N. Kolmogorov, 1903 - 1987)建立概率论的公理体系为标志,苏联在概率论领域取得了国际上无可争辩的领先地位。这是切比雪夫所开拓的古典极限理论在 20世纪抽枝发芽的繁茂大树。[20]

【参 考 文 献】

[1]徐传胜,吕建荣. 亚伯拉罕·棣莫弗的概率思想与正态概率曲线 [J]. 西北大学学报, 2006, 36(2): 339 - 343.

[2]Todhunter I A history of the mathematical of theory of probability from the times of pascal to that of Laplace[M]. Macmillan, London, 1865. Reprinted by Chelsea, New York, 1965: 465 - 470.

[3]陈希孺. 数理统计学简史 [M]. 长沙:湖南教育出版社, 2005: 114 - 115.

[4]吴文俊. 世界著名数学家传记 [M]. 北京:科学出版社, 1990: 988 - 990.

[5]Oscar Sheynin. Chebyshev's lectures on the theory of probability[J]. Arch. History Exact Sci, 1994, 46: 321 - 340.

[6]徐传胜. 切比雪夫的概率思想及其数学文化背景 [J]. 自然辩证法研究, 2005, 21(7): 29 - 33.

[7]Gillispie Ch C. Dictionary of Scientific Biography(9) [M]. New York: Charles Scribner's Sons, 1971.

[8]Марков А А Биография А А Маркова[M]. Москва Издательство Академии Наук СССР, 1951: 48 - 49.

[9]Прудников В Е П Л Чебышев Ученый и Педагог[M]. Москва Издательство Академии Наук СССР, 1964: 56 - 57.

[10]Chebyshev P L. Sur deux théorèmes relatifs aux probabilités [J]. Acta math, 1891, 14: 305 - 315.

[11]Gillispie Ch C. Dictionary of Scientific Biography(3) [M]. New York: Charles Scribner's Sons, 1971: 230 - 231.

(下转第 96页)

识, 1978(4);陈培康. 奇异的玛雅天文台[J]. 知识就是力量, 1984(8);潘玮. 金星和玛雅文化[J]. 天文爱好者, 1986(6);资民筠. 玛雅天文及其它古天文文化[J]. 天文爱好者, 1996(4).
[6] (美)罗伯特·包维尔, 埃德里安·吉尔伯特. 猎户座之谜[M]. 冯丁妮, 译. 海口:海南出版社, 2000: 101 - 130.
[7] (英)米歇尔·霍斯金. 剑桥插图天文学史[M]. 江晓原, 关增建, 钮卫星, 译. 济南:山东画报出版社, 2003: 5.
[8] 董作宾, 刘敦桢, 高平子. 周测景台调查报告[M]. 商务印书馆, 1939: 105 - 125; 高平子. 圭表测景论[M]//高平子天文历学论著选·学历散论. 台北:中央研究院数学研究所, 1987: 209 - 222.
[9] 高天麟, 张岱海. 关于陶寺墓地的几个问题[J]. 考古, 1983(6);中国社会科学院考古研究所实验室. 放射性碳素测定年代报告(10)[J]. 考古, 1983(7);高天麟, 张岱海, 高炜. 龙山文化陶寺类型的年代与分期[J]. 史前研究, 1984(3).
[10] 苏秉琦. 华人·龙的传人·中国人[J]. 中国建设, 1987(9); 苏秉琦. 华人·龙的传人·中国人——考古寻根记[M]. 沈阳:辽宁大学出版社, 1994.
[11] 苏秉琦. 中国文明起源新探[M]. 北京:三联书店, 1999.
[12] 王文清. 陶寺遗存可能是陶唐氏文化遗存[C]//华夏文明(第一辑). 北京:北京大学出版社, 1987.
[13] 王克林. 陶寺文化与唐尧、虞舜——论华夏文明的起源(下)[J]. 文物世界, 2001(2);黄石林. 陶寺遗址乃尧至禹都论[J]. 文物世界, 2001(6);卫斯. "陶寺遗址"与"尧都平阳"的考古学观察[C]//解希恭. 襄汾陶寺遗址研究. 北京:科学出版社, 2007.
[14] 江晓原. 天学真原[M]. 沈阳:辽宁教育出版社, 1991: 37.
[15] 顾颉刚. 论今文尚书著作时代书[C]//古史辩(第一册). 上海:上海古籍出版社, 1982;顾颉刚. 从地理上论今本《尧典》为汉人作[J]. 禹贡, 1943, 2(5);顾颉刚. 《尧典》著作时代考[J]. 文史, 1985, (24): 23 - 71.
[16] 郭沫若. 青铜时代[M]. 北京:科学出版社, 1957.
[17] 胡厚宣. 甲骨文四方风名考证[C]//甲骨学商史论丛初集. 石家庄:河北教育出版社, 2002;胡厚宣. 释殷代求年于四方和四方风的祭祀[J]. 复旦学报(人文科学版), 1956(1);李学勤. 商代的四风与四时[J]. 中州学刊, 1985(5).
[18] 陈梦家. 殷墟卜辞综述[M]. 北京:中华书局, 1988.
[19] 郭沫若. 殷契粹编序[M]//郭沫若全集·考古编·殷契粹编(第三卷). 北京:科学出版社, 2002.
[20] 中国社会科学院考古研究所. 花园庄东地甲骨(六)[M]. 昆明:云南人民出版社, 2003. 1681;武家璧. 花园庄东地甲骨文中的冬至日出观象记录[J]. 古代文明研究通讯, 2005(25).
[21] 温少峰, 袁庭栋. 殷墟卜辞研究——科学技术篇[M]. 成都:四川省社会科学院出版社, 1983: 47、55.
[22] 胡厚宣. 甲骨之四风名考证[C]//甲骨学商史论丛初集(第二册). 济南:齐鲁大学国学研究所, 1944.
[23] 董作宾. "稘三百有六旬有六日"新考[J]. 中国文化研究所集刊, 1941, 1: 98 - 104;董作宾. 殷历谱[M]. 台北:中央研究院历史语言研究所专刊, 1945;罗琨. "五百四旬七日"试析[C]//夏商周文明研究. 北京:中国文联出版社, 1999.
[24] (明)顾祖禹. 读史方舆纪要·山西三·平阳府(卷四一)[M]. 北京:中华书局, 2005; (明)李贤, 彭时, 等. 大明一统志·平阳府·山川(卷二0)[M]. 西安:三秦出版社, 1990.
[25] 王利器. 史记注译[M]. 西安:三秦出版社, 1988.
[26] 陈昌远. "虫伯"与文王伐崇地望研究——兼论夏族起于晋[J]. 河南大学学报, 1992(1).
[27] 何光岳. 炎黄源流史[M]. 南昌:江西教育出版社, 1992.
[28] 杨国勇. 山西上古史新探[M]. 北京:中国社会科学出版社, 2002: 71.

(责任编辑　魏屹东)

(上接第89页)

[12] Гнеденко Б В. Развитие теории вероятностей в России [M]. Москва: Издательство Академии Наук СССР, 1948: 31 - 32.
[13] Штокало И З. История Отечественной Математики [M]. Киев: Издательство Наукова думка, 1967: 45 - 48.
[14] Sheynin O B. A. A. Markov's work on probability[J]. Arch. History Exact Sci, 1989, 39: 337 - 377.
[15] Лукомская А М. Александр Михайлович Ляпунов [M]. Москва: Издательство АН СССР, 1953: 72 - 73.
[16] Liapunov A M. Sur une proposition de la théorie des probabilités[J]. IAN 1900, 13(4): 359 - 386.
[17] Gillispie Ch C. Dictionary of Scientific Biography(8) [M]. New York: Charles Scribner's Sons, 1971: 560 - 561.
[18] Цесевич В П. А. М. Ляпунов[M]. Москва: Издательство Знани, 1970: 28 - 29.
[19] Зворыкин А А. Биографический Словарь Деятелей Естествознания и Техники [M]. Москва: Издательство Академии Наук СССР, 1959: 85 - 86.
[20] Kolmogorov A N., Yushkevich A. P. Mathematics of the 19th Century [M]. Basel; Boston; Berlin: Birkhauser, 1992: 255.

(责任编辑　殷　杰)