第7卷第4期
2004年12月
湖北职业技术学院学报
Journal of Hubei Vocational - Technical College
No.2 Vol.7
Dec.2004

[文章编号] 1671—8178(2004)04—0078—03

浅谈概率中一般加法公式的应用

张守平

(湖北职业技术学院 公共课部,湖北 孝感 432000)

[摘 要] 文章对概率加法公式的运用及运用其解题中注意的问题进行了讨探,提倡使用一般加法公式之前应该分析事件的独立性,以使一般加法公式用得恰到好处。

[关键词] 概率论;互斥与独立事件;加法公式

[中图分类号] O211.66 [文献标识码] A

学好概率论中"事件和概率"一章是学好概率统计的保证,而概率的加法公式正是该章中值得研究的专题之一。笔者在本文对一般加法公式的应用方法做些肤浅探讨,供同仁参考。

1、概率的两个加法公式

由概率的有限可加性:若

$A_iA_j = \Phi(1 \leqslant i < j \leqslant n)$,

则

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i),$$ [1]

这个公式称为互斥事件的加法公式。

由概率的另一性质:对任意的两个事件 A_1、A_2,有 $P(A_1UA_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2)$。再推广到任意有限个事件,设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 n 个随机事件,则有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} P(A_iA_j) + \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} P(A_iA_jA_K) - \cdots + (-1)^{n-1}P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)$$ [1]

这个公式称为概率的一般加法公式。显然,互斥事件的加法公式为其特例。

求"事件 $A_1, \cdots, A_n$ 中至少有一个发生"的概率时,上述两个加法公式各显示其独特的作用。而当 $A_1, \cdots, A_n$ 不互斥时,上述一般加法公式较繁,使用的情况也较复杂。那么,怎样才能把一般加法公式用得恰到好处呢?

2、巧用一般加法公式,以寻找清晰的解题思路

几乎所有的教科书,均在介绍一般加法公式后,以信封匹配问题为例,说明该公式以其程式化的鲜明特点,指出了解题思路。下面再列举一般加法公式运用的两个例子。

例1 一部五卷的文集,按任意次序放在书架上。求自左至右,第一卷不在第一位置且第二、三卷也都不在其位的概率。

解 设 A_1, A_2, A_3 分别表示第一、二、三卷在其相应位置上,于是

$$P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}) \xlongequal{\text{对偶原则}} P(\overline{A_1UA_2UA_3}) = 1 - P(A_1U\,A_2U\,A_3),$$

关键即求

$$P(A_1U\,A_2U\,A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1A_2) - P(A_2A_3) - P(A_1A_3) + P(A_1A_2A_3) \xlongequal{A_1A_2A_3\text{ 不独立}} 3\times\frac{4!}{5!} - 3\times\frac{3!}{5!} + \frac{2!}{5!}$$

$= \frac{7}{15}$ 则 $P(\overline{A_1}, \overline{A_2}, \overline{A_3}) = \frac{8}{15}$

例2 在平面上画上有间隔为 d 的等距平行线,向平面任意投掷一个边长为 a、b、c(均小于 d)的三角形,求三角形的两边与平行线相交的概率。(可以认为"三角形的任一边与平行线重合"的概率为零,

[收稿日期] 2004-09-16

[作者简介] 张守平(1965—),男,湖北孝感人,湖北职业技术学院公共课部副教授,主要研究高等数学。

"三角形的任一顶点在平行线上"的概率也为零)。

解设 A = {三角形的两边与平行线相交},以 A_a,A_b,A_c 表示边 a,b,c 与平行线相交,由于事件 A 等价于 A_a,A_b,A_c 中至少有一发生,即 $A=A_a\cup A_b\cup A_C$,又因为 A_a,A_b,A_c 不互斥,所以

$$P(A)=P(A_a\cup A_b\cup A_C)\xlongequal{\text{一般加法公式}}P(A_a)+P(A_b)+P(A_c)-P(A_aA_b)-P(A_bA_c)-P(A_cA_a)+P(A_aA_bA_c)$$

$$\xlongequal[A_a,A_b,A_c\text{ 不独立}]{\text{蒲丰投针问题的结果}^{[2]}}\frac{2a}{\pi d}+\frac{2b}{\pi d}+\frac{2c}{\pi d}-P(A_b)P(A_c\mid A_b)-P(A_c)P(A_a\mid A_c)+0$$

$$=\frac{2(a+b+c)}{\pi d}-\frac{2a}{\pi d}\times\frac{1}{2}-\frac{2b}{\pi d}\times\frac{1}{2}-\frac{2c}{\pi d}\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{a+b+c}{\pi d}$$

上述两例,因为用了一般加法公式,所以能较快地探索到解题思路。读者不妨对例1用古典概型方法,对例2用几何概率方法(因试验结果为无限),会发现求解是不容易的,思路也不如上述解法清晰!当对古典概型方法无从下手时,还可从一般加法公式的解题过程得到启示。这就足以见到一般加法公式的运用,它能化"难"为"易",纵观两例解题过程都必需分析事件的独立性,而且分析独立性在解题过程中起着重要作用。

3、用一般加法公式之前,先分析事件的独立性

例3 若每个人的呼吸道中带有感冒病毒的概率是0.002,而且各人是否带感冒病毒是独立的。求在有1500人的剧场中有感冒病毒的概率。

解 设 A = {剧场中有感冒病毒} A_i = {第i人带感冒病毒} $i=1,2\cdots,1500$. $P(A)=P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{1500})$

$$\xlongequal{A_1\cdots A_{1500}\text{ 不互斥}}\sum_{i=1}^{1500}P(A_i)-\sum_{1\le i<j\le 1500}P(A_iA_j)+\cdots+(-1)^{1500-1}P(\bigcap_{i=1}^{1500}A_i)\xlongequal{A_1\cdots A_{1500}\text{ 独立}}$$

$$\sum_{i=1}^{1500}P(A_i)-\sum_{1\le i<j\le 1500}P(A_i)P(A_j)-\prod_{i=1}^{1500}P(A_i)$$

这是一个不高明的解法。请看较好的解法

$$1-\frac{P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{1500})}{P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{1500})}\xlongequal{\text{对偶原则}}$$

$$1-P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\cdots\overline{A_{1500}})\xlongequal[\overline{A_1}\cdots\overline{A_{1500}}\text{ 独立}]{A_1\cdots A_{1500}\text{ 独立}}$$

$$1-P(\overline{A_1})\cdots P(\overline{A_{1500}})$$

$$=1-0.998^{1500}\xlongequal{\text{用计算器}}0.9504$$

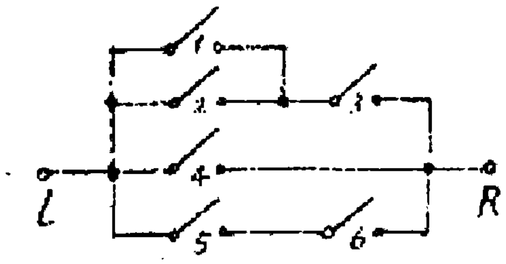
例3 用一般加法公式之所以受挫,追根溯源,是因为 n 大且不便于利用级数求解,更主要的是 A_1,……A_n 不互斥且独立。这时,另有简便公式

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=1-\prod_{i=1}^{n}P(\overline{A_i})$$

(下面称为 $P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)$ 的简便公式)对例3,它比一般加法公式更适用于求 $P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)$。

运用一般加法公式离不开分析事件的独立性。而这一点,却往往为一些人所忽视。因为几乎所有的教材都把独立性安排在一般加法公式之后,使很多人学完了概率论,还不知道"信封匹配问题"中求 $P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)$ 时,$A_1,\cdots,A_n$ 是不独立的,至于为什么选用一般加法公式求 $P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)$,那就更无从回答了。由例3可知,不要一见到求 $P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)$ 就套用一般加法公式。下面一例,将说明:当不满足使用 $P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)$ 的简便公式的独立性要求时,以选用一般加法公式为宜。

例4 右图1,2,3,4,5,6表示继电器接点。假设每一继电器接点闭合的概率为 p,且各继电器接点闭合与否相互独立。求 L 至 R 是通路的概率。



设 A_i = {第 i 号继电器接点闭合} $i=1,2,\cdots,6$. B = {L 至 R 是通路},由图知 $B=A_1A_3\cup A_2A_3\cup A_4\cup A_5A_6$,于是

解一

$$P(B)=P(A_1A_3\cup A_2A_3\cup A_4\cup A_5A_6)$$

$$\xlongequal{(*)}1-P(\overline{A_1A_3})P(\overline{A_2A_3})P(\overline{A_4})P(\overline{A_5A_6})$$

$$=1-P(\overline{A_1}\cup\overline{A_3})P(\overline{A_2}\cup\overline{A_3})P(\overline{A_4})P(\overline{A_5}\cup\overline{A_6})$$

$$=1-[1-P(A_1)P(A_3)]^3[1-P(A_4)]$$

$$=1-(1-p^2)^3(1-p)$$

$$=P+3p^2-3p^3-3p^4+3p^5+p^6-p^7$$

解一是错误的。因为线路 A_1A_3 和 A_2A_3 是不独立的,不满足求 $P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)$ 的简单公式的独立性前提。所以(*)式是造成解一错误的关键一步。正确解法见解二。

解二

$$P(B) = P(A_1A_3UA_2A_3UA_4UA_5A_6)^{[3]}$$

$$\xlongequal[A_1A_3,A_2A_3,A_4,A_5A_6\text{不独立}]{A_1A_3,A_2A_3,A_4,A_5A_6\text{不互斥}} P(A_1A_3)+P(A_2A_3)+P(A_4)+P(A_5A_6)-P(A_1A_2A_3)-P(A_1A_3A_4)-P(A_1A_3A_5A_6)-P(A_2A_3A_4)-P(A_2A_3A_5A_6)-P(A_4A_5A_6)+P(A_1A_2A_3A_4)+P(A_1A_2A_3A_5A_6)+P(A_1A_3A_4A_5A_6)+P(A_2A_3A_4A_5A_6)-P(A_1A_2A_3A_4A_5A_6)$$

$$=p+3p^2-4p^3-p^4+3p^5-p^6$$

本例充分说明,只有经过事件独立性的分析,才能在求 $P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)$ 的简便公式和一般加法公式之间作出恰当的选择。

4、结语

当事件 $A_1,\cdots,A_n$ 不互斥、要求 $A_1,\cdots,A_n$ 中至少有一事件发生的概率时,应该先分析事件 $A_1,\cdots,A_n$ 的独立性。若 $A_1,\cdots,A_n$ 独立,一般总是用简单公式

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i) = 1-\prod_{i=1}^{n}P(\overline{A_i})^{[3]}$$

(这时,如选用一般加法公式,即使能做,也较繁)若 $A_1,\cdots,A_n$ 不独立,则必须选用一般加法公式。本文旨在提倡使用一般加法公式之前应该分析事件的独立性,以使一般加法公式用得恰当,用得恰到好处,不该用一般加法公式时,决不应舍简取繁,决不在解题中犯"不区别事件独立与否"或"误判事件独立性"的错误。

在"事件与概率"一章,复习一般加法公式时,教师应有意识地与"分析事件独立性"这个重要的概念有机地结合起来,并且以生动的例题对比正确与错误和简炼与繁锁。这是概率论教学中不容忽视的一个专题。

[参考文献]

[1]中山大学数学力学系小组.概率论与数理统计[M].北京:高等教育出版社,1980:32.

[2](苏)A·A·史威斯尼珂夫,等.概率论解题指南[M].上海:上海科技出版社,1965:21.

[3]唐国兴.高等数学·概率统计[M].武汉:武汉大学出版社,1991:53.

(特约审稿人:刘学才)

Discussion on the Application of the General Addition Formula in Probability

ZHANG Shou - ping

(Hubei Vocational - Technical college , Xiaogan , Hubei 432000)

Abstract: The essay discusses the application of addition formula. It is also advocated that independence of the incidents should be analyzed before the general addition formula are applied in order to use it properly.

Key words: probability theory; mutual exclusion and independent incident ; addition formula

大8!