2000 年 3 月
第 29 卷 第 1 期

内蒙古师大学报 自然科学(汉文)版
Journal of Inner Mongolia Normal University (Natural Science Edition)

Vol. 29 No. 1
Mar. 2000

数学期望的应用*

斯日古楞

(内蒙古师范大学 数学系,内蒙古 呼和浩特 010022)

摘　要: 通过构造概率模型或引进随机变量,给出数学期望的简单应用.

关键词: 等式; 不等式; 概率模型; 随机变量

中图分类号: O 211.4　**文献标识码**: A　**文章编号**: 1001 - 8735(2000) 01 - 0013 - 05

等式与不等式是数学分析中一个重要内容. 在数学分析中,除了用归纳法证明一些等式与不等式外,又引用中值定理证明了一些等式与不等式. 本文根据等式与不等式的特点,构造相应的概率模型或引进恰当的随机变量,利用数学期望的性质证明了一些等式与不等式,为证明等式与不等式提供了一种方法,并能使概率论在数学分析研究中显示出独特的作用.

1　构造概率模型证明等式与不等式

问题 1　用概率方法求证

$$\sum_{k=1}^{n} k C_n^k = n 2^{n-1}, \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 C_n^k = n(n+1) 2^{n-2}, \tag{2}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} k C_n^k\right)^2 \leq n(n+1) 2^{2(n-1)}. \tag{3}$$

构造概率模型:一射手向某一目标独立射击 n 次,每次击中目标的概率为 p,以 ξ 表示在 n 次射击中击中目标的次数.

显然,随机变量 ξ 服从二项分布,即

$$P(\xi = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, n.$$

$$E\xi = \sum_{k=0}^{n} k C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

设

$$\xi_i = \begin{cases} 1, & \text{第 } i \text{ 次射击击中目标}, \\ 0, & \text{第 } i \text{ 次射击未击中目标}. \end{cases} \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

则

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n, \quad E\xi_i = p, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

---

* 收稿日期: 1999 - 01 - 03
基金项目: 内蒙古自然科学基金资助项目(990301 - 2)
作者简介: 斯日古楞(1959 -),男(蒙古族),内蒙古鄂托克前旗人,内蒙古师范大学讲师.

因而 $E\xi = \sum_{k=1}^{n} E\xi_i = np$,即 $\sum_{k=1}^{n} kC_n^k p^k(1-p)^{n-k} = np$. 令 $p = \frac{1}{2}$得, $\sum_{k=1}^{n} kC_n^k = n2^{n-1}$. 因此(1)式得证.

因为

$$E(\xi^2) = E\left((\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n)^2\right) =$$

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} \xi_i\xi_j\right) = \sum_{i=1}^{n} E\xi_i^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} E\xi_i\xi_j,$$

$$E\xi_i^2 = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot (1-p) = p.$$

而 $\xi_i\xi_j = 1(i \ne j)$表示第 i 次和第 j 次都击中目标,所以

$$P(\xi_i\xi_j = 1) = p^2(i \ne j), \qquad E\xi_i\xi_j = p^2(i \ne j).$$

于是

$$E\xi^2 = np + 2C_n^2 p^2.$$

又因为

$$E\xi^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k p^k(1-p)^{n-k},$$

所以

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 C_n^k p^k(1-p)^{n-k} = np + 2C_n^2 p^2.$$

取 $p = 1/2$,则有

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{n(n+1)}{2^2},$$

故

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 C_n^k = n(n+1)2^{n-2}.$$

因此(2)式得证.

因为由方差的公式可知, $D\xi = E\xi^2 - E^2\xi \ge 0$. 所以$(E\xi)^2 \le E\xi^2$. 而

$$E\xi^2 = np + 2C_n^2 p^2, \qquad E\xi = \sum_{k=1}^{n} kC_n^k p^k(1-p)^{n-k}.$$

于是

$$\left(\sum_{k=1}^{n} kC_n^k p^k(1-p)^{n-k}\right)^2 \le np + 2C_n^2 p^2.$$

当 $p = 1/2$ 时,有

$$\left(\sum_{k=1}^{n} kC_n^k\right)^2 \le n(n+1)2^{2(n-1)}.$$

因此(3)式得证.

问题 2 用概率方法求证

$$\sum_{i=1}^{k} iC_k^i(n-1)^{k-i} = kn^{k-1}, \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{k} i^2 C_k^i(n-1)^{k-i} = kn^{k-1} + k(k-1)n^{k-2}, \tag{5}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{k} i\,C_k^i (n-1)^{k-i}\right)^2 \le k n^{2k-1} + k(k-1)\,n^{2k-2}. \qquad (6)$$

构造概率模型:从 1,2, …, n 个数字中任取一个,取后还原,先后取 k 次(每个数字每次被取出是等可能的).

设 ξ 是在 k 次中数字 1 出现的次数($\xi=0,1,\cdots,k$),由古典概率的计算公式可知

$$P(\xi=i)=\frac{C_n^i (n-1)^{k-i}}{n^k}, \quad i=0,1,\cdots,k.$$

又设

$$\xi_i=\begin{cases}1, & \text{第 } i \text{ 次取出数字 } 1,\\ 0, & \text{第 } i \text{ 次未取出数字 } 1.\end{cases} \quad (i=1,2,\cdots,k.)$$

则 $\xi=\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_k$. 而 $E\xi_i=1\cdot\frac{1}{n}+0\cdot\frac{n-1}{n}=\frac{1}{n}$, $i=1,2,\cdots,k$,所以 $E\xi=k/n$. 又因

$$E\xi=\sum_{i=1}^{k} i\cdot\frac{C_k^i (n-1)^{k-i}}{n^k},$$

故

$$\sum_{i=1}^{k} i\,C_k^i (n-1)^{k-i}=k n^{k-1}.$$

因此(4)式得证.

因为

$$E(\xi^2)=E(\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n)=\sum_{i=1}^{k}E\xi_i^2+2\sum_{1\le i<j\le k}E\xi_i\xi_j,$$

$$E\xi_i^2=1^2\cdot\frac{1}{n}+0^2\cdot\frac{n-1}{n}=\frac{1}{n}.$$

而 $\xi_i\xi_j=1(i\ne j)$ 表示第 i 次和第 j 次都取 1,所以

$$P(\xi_i\xi_j=1)=\left(\frac{1}{n}\right)^2 (i\ne j), \qquad E\xi_i\xi_j=\frac{1}{n^2}\ (i\ne j).$$

于是

$$E\xi^2=\frac{k}{n}+2C_k^2\left(\frac{1}{n}\right)^2=\frac{k}{n}+\frac{k(k-1)}{n^2}.$$

又因为

$$E\xi^2=\sum_{i=0}^{k} i^2\cdot\frac{C_k^i (n-1)^{k-i}}{n^k},$$

所以

$$\sum_{i=1}^{k} i^2\cdot\frac{C_k^i (n-1)^{k-i}}{n^k}=\frac{k}{n}+\frac{k(k-1)}{n^2}.$$

故

$$\sum_{i=1}^{k} i^2\cdot C_k^i (n-1)^{k-i}=kn^{k-1}+k(k-1)\,n^{k-2}.$$

因此(5)式得证.

因为由方差的公式可知, $D\xi=E\xi^2-E^2\xi\ge 0$. 所以$(E\xi)^2\le E\xi^2$. 而

$$E\xi^2=\frac{k}{n}+2C_k^2\left(\frac{1}{n}\right)^2, \qquad E\xi=\sum_{i=1}^{k} i\cdot\frac{C_k^i (n-1)^{k-i}}{n^k}.$$

所以

$$\left(\sum_{i=1}^{k} i \cdot \frac{C_k^i (n-1)^{k-i}}{n^k}\right)^2 \leq \frac{k}{n} + 2C_k^2 \left(\frac{1}{n}\right)^2.$$

故

$$\left(\sum_{i=1}^{k} i C_k^i (n-1)^{k-i}\right)^2 \leq k n^{2k-1} + k(k-1) n^{2k-2}.$$

因此(6)式得证.

2 引进随机变量证明不等式

下面要用到这一定理,证明参见[1].

定理 设 ξ 为 (Ω, F, P) 上的随机变量,若 $f(x)$ 为定义在某区间 I 上的连续的下凸函数,则有

$$f(E\xi) \leq Ef(\xi). \tag{7}$$

若 $f(x)$ 为定义在某区间 I 上连续的上凸函数,则有

$$f(E\xi) \geq Ef(\xi). \tag{8}$$

问题 3 求证,当 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的连续的下凸函数时,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{9}$$

当 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的连续的上凸函数时,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{10}$$

证明 设连续型随机变量 ξ 的密度函数为

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{当 } a \leq x \leq b \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } x < a \text{ 或 } x > b \text{ 时}. \end{cases}$$

则

$$E\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x = \frac{a+b}{2}.$$

而

$$Ef(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, p(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x) \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

由定理可知,当 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的下凸函数时,$f(E\xi) \leq Ef(\xi)$,亦即

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

因此(9)式得证.

当 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的上凸函数时,$f(E\xi) \geq Ef(\xi)$,亦即

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

因此(10)式得证.

这两个不等式是数学分析中的两个重要积分不等式.

问题 4 求证,对于可积函数 $g(x)$ $(g(x) > 0)$,

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{g(x)} \geq (b-a)^2. \tag{11}$$

证明　令 $\xi \sim U[a,b]$, $y=g(x)$ 为严格正函数, 则 $\eta=g(\xi)$ 为正随机变量. 考察 $(0,+\infty)$ 上的连续下凸函数 $f(x)=\frac{1}{x}$, 对该函数运用 (7) 式, 得 $\frac{1}{E\eta} \leq E(\frac{1}{\eta})$, 从而 $E\eta E\frac{1}{\eta} \geq 1$. 而

$$E\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)p(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$E\frac{1}{\eta} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{g(x)} p(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{1}{g(x)}\frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{1}{g(x)}\,\mathrm{d}x.$$

故

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \cdot \frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{1}{g(x)}\,\mathrm{d}x \geq 1,$$

亦即

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b \frac{1}{g(x)}\,\mathrm{d}x \geq (b-a)^2.$$

因此 (11) 式得证.

参考文献:

[1]　周概容. 概率论与数理统计 [M]. 北京:高等教育出版社,1984. 275～276.

[2]　郭雪柳. 几个等式的概率证法 [J]. 宁夏教育学院学报,1988. (1) :46～50.

THE APPLICATION OF MATHEMATICAL EXPECTATION

Seriguleng

(Department of Mathematics, Inner Mongolia Normal University, Huhhot 010022, China)

Abstract: The aim of this paper is to give a simple application of mathematical expectation through the construction of a probability model or a random variable.

Key words: equality; inequality; probability modol; random variable