数学期望的应用

廖 飞,李 楠*
(牡丹江师范学院数学系,黑龙江 牡丹江 157012)

摘 要:数学期望是概率论的一个重要概念,应用数学期望讨论某些实际问题,从而得到一些有意义的结论.
关键词:数学期望;随机变量;应用

[**中图分类法**]O142 [**文献标识码**]A [**文章编号**]1003 - 6180(2007)04 - 0063 - 02

在实际生活中,有许多问题都可以直接或间接的利用数学期望来解决.数学期望是随机变量的数字特征之一,它代表了随机变量总体取值的平均水平.

1 数学期望的定义

1.1 离散型随机变量的数学期望

设离散型随机变量 X 的分布律为 $P(X = x_i) = p_i (i = 1,2,\cdots)$,若级数 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ 绝对收敛,则称 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ 的值为 X 的数学期望(或均值),记作 $E(X)$,即 $E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$.

1.2 连续型随机变量的数学期望

设 X 为连续型随机变量,其概率密度为 $f(x)$,若 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx$ 绝对收敛,称 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx$ 为 X 的数学期望(或均值),记作 $E(X)$,即 $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx$.

1.3 随机变量函数的数学期望

设 X 是随机变量, $Y = g(X)$ 是 X 的连续实函数,当 X 是离散型随机变量,其分布律为

$P(X = x_i) = p_i (i = 1,2,\cdots)$,当级数 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ 绝对收敛时,随机变量 $Y = g(X)$ 的数学期望为

$E(Y) = E(g(X)) = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) p_i$.当 X 是连续型随机变量,概率密度是 $f(x)$,若积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx$ 绝对收敛,随机变量 $Y = g(X)$ 的数学期望为

$$E(Y) = E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)\,dx .$$

2 数学期望在实际问题中的应用

数学期望无论从计划还是从决策观点看都是至关重要的,在实际活动中,人们往往不自觉地利用它.以下通过具体的事例来说明数学期望在实际问题中的应用.

2.1 保险公司获利问题

例 1 一年中一个家庭万元被盗的概率是 0.001,保险公司开办一年期万元以上家庭财产保险,参加者需缴保险费 1 000 元,若在一年内,万元以上财产被盗,保险公司赔偿 a元.为了最大限度地给参保家庭以实惠,同时又保证保险公司有利润,试问保险赔偿金 a如何确定,才能使保险公司获利?(不计其他费用)

解 只需考察保险公司对任一参保家庭的获利情况,设 X 表示保险公司对任一参保家庭的收益,则 X 的取值为 1 000 或 1 000 - a,其概率分布为:

X	1 000	1 000 - a
P	0.999	0.001

根据题意

$$E(X) = 1\,000 \times 0.999 + (1\,000 - a) \times 0.001 = 1\,000 - 0.001a > 0$$

解得 $a < 10^6$,所以 $a < 10^6$ 时保险公司才能获利.

2.2 免费抽奖问题

例 2 袋中装有大小相同的球 20 个,10 个 10 分,10 个 5 分,从中摸出 10 个球,摸出的 10 个球分数之和即为中奖分数,获奖如下:

一等奖 100 分,家电一件,价值 2500 元,
二等奖 50 分,家电一件,价值 1000 元,
三等奖 95 分,洗发精 8 瓶,价值 176 元,
四等奖 55 分,洗发精 4 瓶,价值 88 元,
五等奖 60 分,洗发精 2 瓶,价值 44 元,
六等奖 65 分,牙膏一盒,价值 8 元,
七等奖 70 分,洗衣粉一袋,价值 5 元,
八等奖 85 分,香皂一块,价值 3 元,
九等奖 90 分,毛巾一条,价值 2 元,
十等奖 75 分与 80 分为优惠奖,仅收成本

收稿日期:2007-03-25
基金项目:黑龙江省教育厅科学技术研究项目(11511423)
*数学系 2002 级学生

22 元,将得到洗发精一瓶.

解 表面上看整个活动对顾客有利,一等奖到九等奖是白得的,只有十等奖收费,也仅收成本。事实上,用概率知识分析一下:摸出 10 个球的分值只有 11 种情况,用 X 表示摸奖者获得的奖励金额数,一等奖即得分 100 分,对应事件 $(X = 2\,500)$,该事件的概率服从超几何分布,

$P(X = 2\,500) = \frac{C_{10}^{10} C_{10}^{10}}{C_{20}^{10}}$, X 取值为 2 500 ,1 000 ,176 ,88 ,44 ,8 ,5 ,3 ,2 ,- 22 ,概率可以类似求出,其概率分布为:

X	2 500	1 000	176	88	44
P	0.000 005	0.000 005	0.000 541	0.000 541	0.010 96

X	8	5	3	2	- 22
P	0.077 941	0.238 693	0.077 941	0.010 96	0.582 411

$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i = -10.098$,表明商家在平均每一次的抽奖中获得 10.098 元钱,而平均每个抽奖者将花 10.098 元钱来享受这种免费抽奖,却没有机会获得大奖.

2.3 生产利润问题

例 3 一部机器在一天内发生故障的概率为 0.2,机器发生故障则全天停止工作.若一周 5 个工作日里无故障,可获利润 10 万元;发生 1 次故障仍可获利润 5 万元;发生 2 次故障所获利润 0 元;发生 3 次或 3 次以上故障就要亏损 2 万元,求这个工厂一周的期望利润.

解 设 ζ 为一周内机器发生故障的天数,则 ζ 二项分布 $B(5, 0.2)$,

$$P(\zeta = k) = C_5^k \times 0.2^k \times 0.8^{5-k}, \quad k = 0,1,2,3,4,5$$

$$P(\zeta = 0) = C_5^0 \times 0.2^0 \times 0.8^5 = 0.328,$$

$$P(\zeta = 1) = C_5^1 \times 0.2^1 \times 0.8^4 = 0.410,$$

$$P(\zeta = 2) = C_5^2 \times 0.2^2 \times 0.8^3 = 0.205,$$

$$P(\zeta \geq 3) = 1 - P(\zeta = 0) - P(\zeta = 1) - P(\zeta = 2) = 0.057.$$

以 η 表示所获利润,则 η 的概率分布为:

η	10	5	0	- 2
P	0.328	0.410	0.205	0.057

$$E\eta = 10 \times 0.328 + 5 \times 0.410 + 0 \times 0.205 + (-2) \times 0.057 = 5.216(\text{万元}).$$

故工厂一周内期望利润是 5.216 万元.

2.4 投资效益问题

例 4 某人用 10 万元进行为期一年的投资,有两种投资方案:一是购买股票;二是存入银行获取利息.买股票的收益取决于经济形势,若经济形势好可获利 4 万元,形势中等可获利 1 万元,形势不好要损失 2 万元.如果存入银行,假设利率为 8 %,可得利息 8000 元,又设经济形势好、中、差的概率分别为 30 %、50 %、20 %.试问应选择哪一种方案可使投资的效益较大?

解 由题设可知,在经济形势好和中等的情况下,购买股票是合算的;但如果经济形势不好,那么采取存银行的方案合算.然而现实是不知道哪种情况会出现,因此,要比较两种投资方案获利的期望大小.

购买股票的获利期望是

$$E_1 = 4 \times 0.3 + 1 \times 1.5 + (-2) \times 0.2 = 1.3(\text{万元});$$

存入银行的获利期望是 $E_2 = 0.8$(万元).

因为 $E_1 > E_2$,所以购买股票的期望收益比存入银行的期望收益大,应采用购买股票的方案.

总之,知识来源于人类的实践活动,又反过来运用到改造世界的实践活动中,其价值也就在于此。教师在教授概率论的理论知识的时候,若能结合学生所学专业举出相应的实例,不仅可以极大地调动学生学习的积极性,还能让学生了解知识与人类实践紧密联系的丰富底蕴,使学生切身体会到“数学的确有用”。本文通过探讨数学期望这一随机变量的重要数字特征在实际问题中的一些应用以期起到抛砖引玉的作用。

参考文献

[1] 严士健.概率论基础[M].北京:科学出版社,1982.
[2] 杨宗磐.概率入门[M].北京:科学出版社,1981.
[3] 胡细宝,王丽霞.概率论与数理统计[M].北京:北京邮电大学出版社,2003.
[4] 陈东明.离散型随机变量的期望与方差的应用[J].数学通讯,2003(11).

编辑:文心