论数学期望定义中"绝对收敛"

孙 伟

(哈尔滨金融高等专科学校 基础部，黑龙江 哈尔滨 150030)

摘 要：从收敛分为条件收敛与绝收敛的角度出发，通过具体例子论述了条件收敛的级数，会因为更改级数各项的顺序而导致其和发生改变。而绝对收敛的级数，更改绝对收敛级数中各项的位置，其和保持不变。离散型随机变量的期望是一个确定的数值，期望或均值不会因为这个式子中各项积的顺序的更改，而改变其值。能够保证这个结论成立的只有绝对收敛。

关键词：数学期望；绝对收敛；级数

我们在概率论学习中，在学习数学期望定义时，无论是学生还是有些教师经常被数学期望定义中"绝对收敛"所困惑。经常问，为什么收敛不可以?。下面以离散型随机变量为例，探讨数学期望定义中"绝对收敛"的意义。

离散型随机变量期望定义：离散型随机变量£ 的分布律为

$P\{£ = x_k\} = P_k(k = 1, 2L)$，若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 绝对收敛，

则 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 称为随机变量的数学期望，记作 E£ ，即

$$E£ = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k = x_1 p_1 + x_2 p_2 + L + x_k P_k + L$$

由定义，我们看到，当离散型随机变量£ 的分布律为 p $\{£ = x_k\} = P_k(k = 1, 2L)$ 一旦确定，且它的期望或者说均值存在的话，$x_1 p_1 + x_2 + L + x_k P_k + L$ 就是一个确定的数值，该数值不会因为这个式子中 $x_1 p_1 + x_2 P_2 + L + x_{kP} k + L$ 各项积的顺序的更改，而改变其值。这也是要求 $x_1 P_1 + x_2 P_2 + L + x_k P_k + L$"绝对收敛"，而不是"收敛"的关键所在。

由数学分析，我们知道，级数收敛分为条件收敛与绝对收敛。对于条件收敛的级数，如果更改级数各项的位置，或者说交换级数项的顺序所得到的新形式的级数，如果和存在，其和是否保持不变? 我们来看下面的例子

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + L + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + L$ 条件收敛，设其和为

$$即\ 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + -\frac{1}{4} + L(-1)^{n-1} + L = s \qquad (1)$$

现在把级数(1)的一些项的顺序作如下调整

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{9} + - - L \qquad (2)$$

根据收敛的级数满足结合律并且和是不变的。将(2)加上括号。

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{9} + - - L$$
$$= (1 - \frac{1}{2}) - \frac{1}{4} + (\frac{1}{3} - \frac{1}{6}) - \frac{1}{8} + (\frac{1}{5} - \frac{1}{10})$$
$$-\frac{1}{12} + - - L \qquad 3)$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + - L$$
$$= \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + L) = \frac{1}{2}s$$

由此说明将条件收敛的级数(1)更改一些项的顺序后，

级数的和发生了改变，且为 $\frac{1}{2}s$

我们再作如下调整。将(1)两端同乘以 $\frac{1}{2}$。得到

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + 0 - \frac{1}{12} + L = \frac{1}{2}s \qquad (4)$$

可以写成

$$0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{10} + 0 + \frac{1}{12} + L = \frac{1}{2}s \qquad (4)$$

将(1)与(4)两端对应相加得到

$$1 + 0 + \frac{1}{3} + 0 - \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{5} + 0 + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + 0 + L$$

〔收稿日期〕 2004 - 03 - 31

$$=\frac{3}{2}s \tag{5}$$

由(5)看到,左端就是在级数(1)的基础上更换了顺序,然而,级数(1)的和却变为$\frac{3}{2}s$

由此看到,条件收敛的级数,如果更改级数各项的顺序所得到的新形式的级数,如果和存在,其和是改变的。但是一个绝对收敛的级数,更改级数中各项的顺序所得到的新级数,是否收敛,如果收敛,其和是否改变?

设级数$\sum\limits_{u_n}^{\infty}$绝对收敛,且$\sum\limits_{u_n}^{\infty}=s$,更改级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u'_n$中项的顺序所得到的新级数为。下面分两种情况探讨,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u'_n$是否收敛,且是否满足$\sum\limits_{u'_n}^{\infty}=\sum\limits_{u_n}^{\infty}$

1、当级数$\sum\limits_{u_n}^{\infty}$是正项级数;更序后的新级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u'_n$也是正项级数

设新级数$\sum\limits_{u'_n}^{\infty}$部分和为$u'_1+u'_2+L+u'_n=s'_n$

由于

$s'_n=u'_1+u'_2+L+u'_n\leq u_1+u_2+L+u_n+L=s$

即正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u'_n$的部分和有界,因而

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u'_n$ 收敛 且 $\lim\limits_{n\to\infty}s'_n=s'\leq s$

同理 因为 $u_1+u_2+u_n\leq u'_1+u'_2+L\ +u'_n+L$ 有 $s\leq s'$

所以 有 $s'=s$ 即$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u'_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$

故当级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$是正项级数,更序后的新级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u'_n$收敛,且和不变

2、当级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$是任意级数。构造如下两个级数

$$v_n=\frac{|u_n|+u_n}{2} \qquad w_n=\frac{u_n-u_n}{2}$$

显然 $u_n=v_n-w_n$ $|u_n|=v_n+w_n$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n,\sum\limits_{n=1}^{\infty}w_n$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n,\sum\limits_{n=1}^{\infty}w_n$都是正项级数,又因为

$$0\leq v_n\leq|u_n| \qquad 0\leq w_n\leq|u_n|$$

而已知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛 所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n,\sum\limits_{n=1}^{\infty},\sum\limits_{n=1}^{\infty}w_n$是收敛的正项级数,

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n=v$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}w_n=w$,则

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(v_n-w_n)=v-w$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(v_n+w_n)=v+w$

对于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的更换顺序的级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u'_n$,同样相应于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n,\sum\limits_{n=1}^{\infty}w_n$也有更序后的$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v'_n,\sum\limits_{n=1}^{\infty}w'_n$都是正项级数,且由第一种情况已证明,它们都是收敛的且和保持不变。即

即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v'_n=v,\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u'_n|(v'_n+w'_n)=v+w$ 。

所以,新级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u'_n$的绝对收敛,又因为

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u'_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(v'_n-w'_n)=v-w$

即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u'_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$和不变

由上所述,更改绝对收敛的级数中各项的顺序所得到的新级数,是收敛的,且其和保持不变。

事实上,由黎曼定理,如果一个级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$条件收敛,则适当地交换各项的位置,可以作成收敛于任意给定的数σ的收敛级数,还可以作成发散级数。而由绝对收敛级数的性质,更改绝对收敛的级数中各项的顺序所得到的新级数,是收敛的,且其和保持不变。因此,在期望定义中,要求$x_1p_1+x_2P_2+L+x_kp_k+L$“绝对收敛”.而不是“收敛”。

在概率论的期望定义中,要求$x_1p_1+x_2P_2+L+x_kp_k+L$绝对收敛的前提下,才将$x_1p_1+x_2P_2+L+x_kP_k+L$定义为随机变量£的数学期望。在期望定义中若不是绝对收敛,就不能将$x_1p_1+x_2P_2+L+x_kp_k+L$作为随机变量的数学期望。此时我们说期望或均值不存在。看下面的例子

设随机变量£的取值为$x_k=(-1)^k\frac{2^k}{K},K=1,2,3,L$

相应的概率为 $P_k=\frac{1}{2^k},k=1,2.3L$

因为 $P_k\geq0,\sum\limits_{k=1}^{\infty}P_k=1$ 所以 P_k 是随机变量£的概率分布

此时 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_kP_k+x_2p_2+L+x_kp_k+L$

$=\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2^k}{k}\frac{1}{2^k}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}$

由 $1n(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+L-1<x\leq1$

得到 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_kp_k=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=-1n2$

一般情况下,我们可能就误认为是随机变量的期望

但是

$\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_kp_k|1=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+L$

是调和级数,是发散的。即$\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_kp_k$不是绝对收敛。因而,$\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_kp_k=-1n2$不能作为随机变量£的数学期望。随机变量的期望不存在。

综上所述,在数学期望定义中,要求绝对收敛。就是因为随机变量的数学期望是一个确定的数值,不会因为改变$x_1P_1+x_2P_2+L+x_kP_k+L$中各项的位置,致使其数值发生改变。绝对收敛的级数具有这样的性质。而条件收敛是无法保证这一性质的成立的。

参考文献

[1]袁荫棠.概率论与数理统计[M]北京:中国人民大学出版社 1989,(12).

[2]同济大学数学系 微积分下册[M] 北京:高等教育出版社 2000,(1).

[3]赵树嫄 微积分[M] 北京:中国人民大学出版社 2002,(5).

责任编校:冯晶珩