数学期望的应用举例

郭立娟, 张 野
(长沙航空职业技术学院, 湖南 长沙 410124)

【摘 要】数学期望是随机变量的重要数字特征之一。文章通过等式和不等式的证明、效益与利润和疾病普查的例子, 阐述数学期望在数学其他分支和实际问题中的广泛应用。

【关键词】随机变量; 数学期望; 应用
【中图分类号】O211.9 【文献标识码】A 【文章编号】1008- 1151(2006)07- 0169- 02

知识来源于人类的实践活动, 又反过来运用到改造世界的实践活动中, 其价值也就在于此。教师在教授概率论的理论知识的时候, 若能结合学生所学专业举出相应的实例, 不仅可以极大地调动学生学习的积极性, 而且让学生了解知识与人类实践紧密联系的丰富底蕴, 使学生切身体会到"数学的确有用"。本文通过探讨数学期望这一随机变量的重要数字特征在数学其他分支和实际问题中的一些应用以期起到抛砖引玉的作用。

一、数学期望在数学其他分支中的应用

例 1 证明组合等式$\sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k = n(n+1)2^{n-2}$。

证明: 概率模型法

在贝努利模型中, 以 X 表示 n 次试验中 A 出现的次数, 则

$$P(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad (k=0,1,2,\cdots,n)$$

设 $X_i=\begin{cases}1, & \text{第}i\text{次中A出现}\\ 0, & \text{第}i\text{次中A不出现}\end{cases}$

则 $X=X_1+X_2+\cdots X_n$, $EX=np$, $DX=np(1-p)$

所以 $EX(X_2)=(EX)^2+DX=(np)^2+np(1-p)=np(np+1-p)$

又 $E(X^2)=\sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

$\therefore E(X^2)=\sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k p^k (1-p)^{n-k}=np(np+1-p)$

取 $p=\frac{1}{2}$ 有 $\sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k (\frac{1}{2})^k (1-\frac{1}{2})^{n-k}=n\frac{1}{2}(n\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2})$

故 $\sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k=n(n+1)2^{n-2}$ 证毕

例 2 设 f(x)是[a, b]上凹函数, 则 $f(\frac{a+b}{2})\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$。

证明: 设连续随机变量 X 的概率密度为

$$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a\le x\le b\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

则 $EX=\int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)dx=\int_a^b \frac{x}{b-a}dx=\frac{a+b}{2}$

而 $E[f(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)dx=\int_a^b \frac{f(x)}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

由詹森(Jensen)不等式知

$$f(\frac{a+b}{2})\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \qquad \text{证毕}$$

注: 詹森(Jensen)不等式

设是一随机变量, $\xi\in(a,b)(-\infty\le a<b\le+\infty)$

第一, 设 $y=f(x)$, $x\in(a,b)$是连续的上凹函数, 若 $E\xi$和 $Ef(\xi)$存在, 则: $E(f(\xi))f(E(\xi))$;

第二, 设 $y=f(x)$, $x\in(a,b)$, 是连续的下凹函数, 若 $E\xi$和 $Ef(\xi)$存在, 则: $E(f(\xi))f(E(\xi))$。

从上面的例题可以看出, 有时应用数学期望的性质和计算证明等式或不等式, 比运用代数方法证明要简单明了。数学期望为数学的不同分支之间架起了桥梁。

二、数学期望在实际问题中的应用

(一) 在效益、利润等经济问题中的应用

例 3 某人用 10 万元进行为期一年的投资, 有两种投资方案: 一是购买股票; 二是存入银行获取利息。买股票的收益取决于经济形势, 若经济形势好可获利 4 万元, 形势中等可获利 1 万元, 形势不好要损失 2 万元。如果存入银行, 假设利率为 8%, 可得利息 8000 元, 又设经济形势好、中、差的概率分别为 30%、50%、20%。试问应选择哪一种方案可使投资的效益较大?

解: 由题设可知, 在经济形势好和中等的情况下, 购买股票是合算的; 但如果经济形势不好, 那么采取存银行的方案合算。然而现实是不知道哪种情况会出现, 因此要比较两种投资方案获利的期望大小。

购买股票的获利期望是 $E_1=4\times0.3+1\times1.5+(-2)\times0.2=1.3$ (万元)

存入银行的获利期望是 $E_2=0.8$(万元)

因为 $E_1>E_2$, 所以购买股票的期望收益比存入银行的期望收益大, 应采用购买股票的方案。

例 4 按节气出售的某种节令商品, 每售出 1 公斤可获利 a 元, 过了节气处理剩余的这种商品, 每售出 1 公斤净亏损 b 元。设某店在季度内这种商品的销量 X 是一随机变量, X 在区间 (t_1, t_2) 内服从均匀分布。为使商店所获利润的数学期望最大, 问该店应进多少货?

解: 设 t(单位: 公斤) 表示进货数 $t_1\le t\le t_2$, 进货 t 所获利润记为 Y, 则 Y 是随机变量,

$$Y=\begin{cases}aX-(t-X)b, & t_1\le X<t\\ at, & t<X\le t_2\end{cases}$$

X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{t_2-t_1}, & t_1<x<t_2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$ (下转第 181 页)

【收稿日期】2006- 03- 22

【作者简介】郭立娟(1978-), 女, 湖北武汉人, 长沙航空职业技术学院助教, 中南大学硕士研究生, 研究方向: 保险精算与风险理论。

德上升为法律规范，有助于在道德与法律的双重规范之下调整家庭关系，促进家庭稳定和社会发展。

2.在立法中明确赡养抗辩权的地位，有助于从道德和法律中提升人性。赡养抗辩权是一种具体的权利，它明确了应当进行抚养和教育的先行义务。种豆得豆，种瓜得瓜是一句古话，明示着有因必有果，一分耕耘一分收获的千年古训。要是一个不称职的父母在其应当履行本应履行的义务时却逃避履行，那么我认为，他当然的应该不享有由于履行此义务而带来的相应的权利，子女在成年后，父母年老需要赡养时，得享有赡养抗辩的权利。只有明确这样的相应因果，才能使人们明白不履行对未成年子女抚养和教育义务的相应法律后果，规范日常行为，从而在法律和道德中提升了作为一个人本应具有的善良和负责的人性。

3.突显赡养抗辩权的法律地位是正义的法的要求。亚里士多德称：“法律的实际意义应该是促成全部人民都能促进于正义与善德的制度”

(1)奥古斯丁主张：“法律就是正义。”

(2)格老秀斯指出：“法律乃是正当理性的命令，它依据行为是否与合理的自然相谐和，而断定其为道德上的卑鄙，或道德上的必要。”

(3)简言之，法律应以正义作为其主导性价值早已是人类社会的一种共识，正如：“法律若以正义实现为追求，该法便是善法；舍弃了正义的价值标准，法便是恶法。恶法不为法，人人有权予以抵抗。”

(4)同样，道德所体现的内在精神也是对社会理想的追求。理想性是道德的灵魂。道德总是想以‘应然’的价值指令把社会生活引向理想的层次，具体包括生活的幸福、人际关系的和谐、社会秩序的稳定等，同时也包括人类所一直执著追求的公平与公正。

因此，一个不称职的父母，在孩子未成年时不抚养他，不教育他(她)，使他(她)的物质生活和心理健康遭受损害，而这个受了损害的孩子长大后还要赡养他的不称职的，甚至可以说是逃避法律责任的父母，这样的法律是正义的吗？是符合道德要求的吗？笔者认为回答当然是否定的。

六、结语

中国是一个正在发展中的现代法治国家，不但公民的法律意识要提高，更要提高公民的道德水平，要使平等享有权利，积极履行义务的法律观念深入人心。美国法学家米尔恩指出：“其实并非如此：圣徒精神和英雄主义是在超越职责要求的行为中展示出来的。但是，在得以具有超越职责要求的行为之前，必须先有职责。圣徒精神和英雄主义的概念是以义务概念的存在为先决条件。圣徒和英雄们比道德要求于他们做的更多。’我们当然不能忘掉孝敬父母的传统美德，但是我们同样不能够让一个不称职的父母滥用权利，我们应该树立独立的法律意识，在法律中体现优良的传统美德，在道德中升华正义的法律。

【参考文献】

[1]亚里士多德.政治学[M].北京：商务印书馆，1965.

[2]古斯丁.忏悔录[M].北京：商务印书馆，1963.

[3]西方伦理学名著选辑(上卷)[M].北京：商务印书馆 1964.

[4]徐显明.论‘法治’的构成要件[J].法学研究，1996，(3).

[5]米尔恩.人权哲学[M].北京：中国政法大学出版社，1994.

[6]马长山.法治社会中法与道德关系及其实践把握[J].法学研究，1999.(1).

[7]徐向华.论法律和道德的作用关系[J].政治与法律，1997(5).

(上接第 169 页)

$$EY=\int_{t_1}^{t}[aX-(t-X)b]\frac{1}{t_2-t_1}dx+\int_{t}^{t_2}at\frac{1}{t_2-t_1}dx=\frac{-\frac{a+b}{2}t^2+(bt_1+at_2)t-\frac{a+b}{2}t_1^2}{t_2-t_1}$$

令 $\frac{dEY}{dt}=0$，得驻点 $t=\frac{at_2+bt_1}{a+b}$

由此可知，该店应进 $\frac{at_2+bt_1}{a+b}$ 公斤商品，才可使利润的数学期望最大。

股票、销售等风险投资，都带有一定的随机性，运用数学期望这一随机变量的总体特征来预计收益或决策投资是比较客观的。

(二)在医学疾病普查中的应用

医疗系统的检验人员在实际工作中经常遇到在大量人群中普查某种疾病。如甲肝的普查就需要对某地区大量人进行血检。假设需要检查 N 个人的血，如果逐人验血，则共需要检验 N 次，平均每人一次。若把这 N 个人大致分为 $\frac{N}{k}$ 组，每组 k 个人，把这 k 个人的血样混合，首先检验混合血样，平均每人 $\frac{1}{k}$ 次；如果结果呈阳性，则再逐个血样检验，即共需 k+1 次，平均每人需 $\frac{k+1}{k}$ 次，当被普查人数纵多时，应用分组检验的方法能大大减少检验的次数。

例 5 某地区的群众患有肝炎的概率为 0.004 左右，假若要对该地区 5000 人进行肝炎感染的普查，问用分组检验方法是否比逐人检查减少检查次数？

解：设将这 5000 人分成 $\frac{5000}{k}$ 组，每组 k 个人，每人所需检验的次数为随机变量 X，则 X 的概率分布为：

X	$\frac{1}{k}$	$\frac{k+1}{k}$
P	$(1-0.004)^k$	$1-(1-0.004)^k$

每人平均所需检验次数的期望为：

$$EX=\frac{1}{k}(1-0.004)^k+\frac{k+1}{k}[1-(1-0.004)^k]$$
$$=\frac{1}{k}0.996^k+1\cdot\frac{1}{k}0.996^k+\frac{1}{k}-0.996^k$$
$$=1+\frac{1}{k}-0.996^k$$

易见，当 k=2, 3, 4, …时，EX，即每人平均所需次数小于 1。这比逐人家差的次数要少。并且由数学分析的知识可知当 k 取 16 时，最小。即将 5000 人大致分为每组 16 人检验时约需要次即可。

【参考文献】

[1]胡细宝，王丽霞.概率论与数理统计[M].北京：北京邮电大学出版社，2003.

[2]翁耀明.运用概率方法证明某些数学不等式[J].数学的实践与认识，2005，(11).

[3]张艳娥，刘国义，纪爱兵，孙建平.数学期望在疾病普查中的应用[J].数理医药学杂志，2003，(1).