1.数学期望最大化原则

数学期望收益最大化准则是指使用不确定性下各种可能行为结果的预期值比较各种行动方案优劣。这一准则有其合理性，它可以对各种行为方案进行准确的优劣比较，同时这一准则还是收益最大准则在不确定情形下的推广。

问题：是否数学期望最大化准则是一最优的不确定性下的行为决策准则？

圣彼德堡悖论

Daniel Bernoulli （1700-1782）是出生于瑞士名门著名数学家。其在1738 年发表《对机遇性赌博的分析》提出解决“圣彼德堡悖论”的“风险度量新理论”。

指出：<u>人们在投资决策时不是用“钱的数学期望”来作为决策准则，而是用“道德期望”来行动的</u>。而道德期望并不与得利多少成正比，而与初始财富有关。穷人与富人对于财富增加的边际效用是不一样的。

Daniel Bernoulli
（1700-1782)

典型案例：圣彼德堡悖论（**Saint Petersbury Paradox**）

考虑一个投币游戏，如果第一次出现正面的结果，可以得到**1**元，第一次反面，第二次正面得 2 元，前两次反面，第三次正面得 4 元，……如果前 n-1 次都是反面，第 n 次出现正面得 2^{n-1} 元。问：游戏的参加应先付多少钱，才能使这场赌博是“公平”的？

该游戏的数学期望值：

$$E(.)=\frac{1}{2}\times1+\frac{1}{4}\times2+\frac{1}{8}\times4+\cdots+\frac{1}{2^n}\times2^{n-1}+\cdots=\infty$$

但实验的结果表明一般理性的投资者参加该游戏愿意支付的成本（门票）仅为**2-3**元。

圣彼德堡悖论：面对无穷的数学期望收益的赌博，为何人们只愿意支付有限的价格？

2.期望效用原则

Daniel Bernoulli （1700-1782）是出生于瑞士名门著名数学家，**1725-1733**年期间一直在圣彼德堡科学院研究投币游戏。其在1738 年发表《对机遇性赌博的分析》提出解决“圣彼德堡悖论”的“风险度量新理论”。指出人们在投资决策时不是用“钱的数学期望”来作为决策准则，而是用“道德期望”来行动的。而道德期望并不与得利多少成正比，而与初始财富有关。穷人与富人对于财富增加的边际效用是不一样的。

即人们关心的是最终财富的效用，而不是财富的价值量，而且，财富增加所带来的边际效用（货币的边际效用）是递减的。

伯努利选择的道德期望函数为对数函数，即对投币游戏的期望值的计算应为对其对数函数期望值的计算：

$$E(.)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\alpha\log 2^n\approx 1.39\alpha$$

其中，$\alpha>0$ 为一个确定值。

另外， **Crammer（1728）**采用幂函数的形式的效用函数对这一问题进行了分析。假定：

$$u(x)=\sqrt{x}$$

则

$$E[u(x)]=\sum_{x=1}^{\infty}p(x)u(x)=\sum_{x=1}^{\infty}\frac{1}{2^{x}}\sqrt{2^{x-1}}=\frac{1}{2-\sqrt{2}}$$

$$x=\{E[u(x)]\}^2=2.914$$

因此，期望收益最大化准则在不确定情形下可能导致不可接受的结果。而贝努利提出的用期望效用取代期望收益的方案，可能为我们的不确定情形下的投资选择问题提供最终的解决方案。

根据期望效用，**20%**的收益不一定和**2**倍的**10%**的收益一样好；**20%**的损失也不一定与**2**倍的**10%**损失一样糟。

2.3 期望效用函数

- 期望效用函数理论是20世纪50年代，冯·诺一曼和摩根斯坦(Von Neumann and Morgenstern)在公理化假设的基础上，运用逻辑和数学工具，建立了不确定条件下对理性人(rational actor)选择进行分析的框架。不过，该理论是将个体和群体合而为一的。
- 后来，阿罗和德布鲁（Arrow and Debreu）将其吸收进瓦尔拉斯均衡的框架中，成为处理不确定性决策问题的分析范式，进而构筑起现代微观经济学并由此展开的包括宏观、金融、计量等在内的宏伟而又优美的理论大厦。

（上）**John von Neumann (1903-1957)**

（下）**Oskar Morgenstern (1902-1977)**

- **1944 年在巨著《对策论与经济行为》中用数学公理化方法提出期望效用函数。这是经济学中首次严格定义风险**

- 所谓期望效用函数是定义在一个随机变量集合上的函数，它在一个随机变量上的取值等于它作为数值函数在该随机变量上取值的数学期望。用它来判断有风险的利益就是比较“钱的函数的数学期望”（“而不是钱的数学期望”）。