金融随机分析

第二章 基本定价原则

陈　　昱

cyu@ustc.edu.cn

管理科研楼 1003

2019 年 10 月

Outline

第二章 基本定价原则

2.1 看跌-看涨平价公式 (Put-call parity)

2.2 广义平价公式 (交换期权)

2.3 期权价格的基本性质 (style, maturity, strike)

欧式看涨期权与看跌期权 (Call options & put options)

- 到期日 T
- T 时刻标的资产交割 S_T
- 执行价格 K

记 $\max(x,0)=(x)_+$ 和 “FV” 为期权价格在 T 时刻价值.

- 看涨期权:

$$\begin{aligned} \textbf{多头收益} &= (S_T-K)_+ \\ \textbf{多头净收益} &= (S_T-K)_+ - \mathrm{FV} \end{aligned}$$

- 看跌期权:

$$\begin{aligned} \textbf{多头收益} &= (K-S_T)_+ \\ \textbf{多头净收益} &= (K-S_T)_+ - \mathrm{FV} \end{aligned}$$

无套利定价

套利 指的是在时刻 0 从 0 元出发，经过投资策略后以概率 1 获得非负收益，且以正的概率获得大于 0 的收益.

- 套利的**等价刻画**
  在时刻 0 从财富 a 出发，经过投资策略后以概率 1 获得大于等于 a 的无风险收益，且以正的概率获得大于 a 的无风险收益.

无套利定价指的是定价不会使得市场中产生套利机会！

一价定律 (Law of one price):

时刻 T 的收益相同$\Rightarrow$ 时刻 0 的价格相同.

- 由货币学派的代表人物弗里德曼(1953)提出.

证明: 利用无套利原则. 设有两个金融产品 A 和 B, 在 T 时刻的收益均为 S_T, 若在时刻 0 的价格不同分别为 s_1 和 s_2. 设 $s_1 < s_2$, 则在时刻 0 以 s_1 买入 A, 同时做空 B (借入 B 以价格 s_2 卖出), 则于时刻 T 用 A 的收益 S_T 买入 B, 则时刻 T 的收益为

$$s_2 - s_1 > 0.$$

一价定律 (Law of one price):

时刻 T 的收益相同 $\Rightarrow$ 时刻 0 的价格相同.

- 由货币学派的代表人物弗里德曼(1953)提出.

证明: 利用无套利原则. 设有两个金融产品 A 和 B, 在 T 时刻的收益均为 S_T, 若在时刻 0 的价格不同分别为 s_1 和 s_2. 设 $s_1 < s_2$, 则在时刻 0 以 s_1 买入 A, 同时做空 B (借入 B 以价格 s_2 卖出), 则于时刻 T 用 A 的收益 S_T 买入 B, 则时刻 T 的收益为

$$s_2 - s_1 > 0.$$

- T: 到期日
- S_t: 时刻 t 的股票价格, $0 \le t \le T$
- $C(K, T)$: 到期日 T 交割价 K 的欧式看涨期权价格(时刻 0)
- $P(K, T)$: 到期日 T 交割价 K 的欧式看跌期权价格
- r: 利率 (连续复利)

时刻 T 的支付:

$$(S_T - K)_+ - (K - S_T)_+ = S_T - K,$$

由一价定律,可以得到下面的 $\boxed{\text{看跌-看涨平价公式}}$:

$$C(K, T) - P(K, T) = \mathrm{PV}(S_T) - e^{-rT} K,$$

其中 $\mathrm{PV}(S_T)$ 是 S_T 在时刻 0 的预付远期价格.

预付远期价格 (Prepaid forward price) $\mathrm{PV}(S_T)$ 是 S_T 在时刻 0 的价格. 由下面几种可能算法:

- 无股息:
$$\mathrm{PV}(S_T) = S_0.$$
- 离散股息:
$$\mathrm{PV}(S_T) = S_0 - \mathrm{PV}(\mathrm{Div}).$$
- 连续股息 (比率 δ):
$$\mathrm{PV}(S_T) = e^{-\delta T} S_0.$$

- 股息会使得股票在除息日的价格会下跌，而下跌的幅度恰好是股息量.
- 连续股息收益率δ会使得股票增长幅度比没有支付股息的股票价格增长幅度减少δ.
- 如果支付连续股息的股票今天的价格(时刻0)是S_0，那么没有股息的情况下，股票的价格会从S_0增长到T时刻的$S_T e^{\delta T}$. 换句话说，股票的价格会从今天的$S_0 e^{-\delta T}$增长到T时刻的S_T.
  - 股票起始价格为S_0，该股票支付连续股息收益率为δ
  - 股票起始价格为$S_0 e^{-\delta T}$，该股票无任何连续股息
- 规则:对期限为T而且支付连续股息收益率为δ的股票欧式期权，我们把今天的股票价格降为$S_0 e^{-\delta T}$，然后按照无股息的股票期权来考虑.

定理 2.1 欧式期权的看跌-看涨平价公式为

(1) 无股息

$$C(K,T) - P(K,T) = S_0 - e^{-rT}K.$$

(2) 离散股息

$$C(K,T) - P(K,T) = S_0 - \mathrm{PV}(\mathrm{Div}) - e^{-rT}K.$$

(3) 连续股息 (比率 δ)

$$C(K,T) - P(K,T) = e^{-\delta T}S_0 - e^{-rT}K.$$

例2.1 (看跌-看涨平价公式) 假定一无股息的股票初始价格为 \$40, 连续复利利率为 8%, 期权到期日为三个月. 交割价格为 \$40 的欧式看跌期权价格是 \$1.99. 那到期日相同, 交割价格为 \$40 的欧式看涨期权无套利价格是?
解: 由看跌-看涨平价公式,

$$
\begin{aligned}
C(K,T) &= P(K,T) + S_0 - e^{-rT}K \\
&= 1.99 + 40 - 40e^{-0.08\times 0.25} = 2.87. \quad \square
\end{aligned}
$$

注意到

$$PV_{0,0.025}(K) = 40e^{-0.08\times 0.25} = 39.21.$$

以 \$ 2.87 买入看涨期权, 以 \$ 1.99 卖出看跌期权, 借出 \$ 39.21; (共投入 \$ 40) 则到三个月以后, 我们有股票.

例2.2 (看跌-看涨平价公式) 假定一股票初始价格为 \$40, 连续复利利率为 8%, 期权到期日为三个月. 交割价格为 \$40 的欧式看涨期权价格是 \$0.74. 那到期日相同，交割价格为 \$40 的欧式看跌期权无套利价格是?

1) 设股票在第二个月末付了 \$7 的股息，在到期日之前付了 \$5 的股息.
2) 设股票付了比率 6% 的连续股息.

解:

1): 注意PV(Div)$= 5e^{-0.08/4} + 7e^{-0.08/6} = 11.808$, 由看跌-看涨平价公式,

$$\begin{aligned} P(K,T) &= C(K,T) - S_0 + \mathrm{PV}(\mathrm{Div}) + e^{-rT}K \\ &= 0.74 - 40 + 11.808 + e^{-0.08/4}40 \\ &= 11.756. \end{aligned}$$

2): 由看跌-看涨平价公式,

$$\begin{aligned} P(K,T) &= C(K,T) - e^{-\delta T}S_0 + e^{-rT}K \\ &= 0.74 - e^{-0.06/4}40 + e^{-0.08/4}40 \\ &= 0.543. \end{aligned}$$

Outline

第二章 基本定价原则

2.1 看跌-看涨平价公式 (Put-call parity)

2.2 广义平价公式 (交换期权)

2.3 期权价格的基本性质 (style, maturity, strike)

2.2.1 交换期权

考虑两个资产.

- 资产 1 的价格: $\{S_t\}_{0\leq t\leq T}$.
- 资产 2 的价格: $\{Q_t\}_{0\leq t\leq T}$.
- $C(S_0, Q_0, T)$: 在时刻 T 用资产 2 交换资产 1 的权利的价格(仅在 $S_T > Q_T$ 时被执行).
- $P(S_0, Q_0, T)$: 在时刻 T 用资产 1 交换资产 2 的权利的价格(仅在 $Q_T > S_T$ 时被执行).

注意在时刻 T 两个权利的收益分别为

$$(S_T - Q_T)_+ \quad \text{和} \quad (Q_T - S_T)_+ .$$

资产 1 称为标的资产, 资产 2 称为交割资产.

注意在时刻 T 有等式

$$(S_T - Q_T)_+ - (Q_T - S_T)_+ = S_T - Q_T.$$

我们得到如下的 $\boxed{\text{广义平价公式}}$ (在时刻 0 的价格)

$$C(S_0, Q_0, T) - P(S_0, Q_0, T) = \mathrm{PV}(S_T) - \mathrm{PV}(Q_T).$$

例2.3 假定一无股息股票 A 价格为$20, 一无股息股票 B 价格为$25. 如果 A 为标的资产， B 为交割资产. 则

$$Call - put = \$20 - \$25 = -\$5.$$

则看跌期权价格总是比看涨期权价格贵 $5.

2.2.2 外汇期权 (货币期权，foreign-exchange options)

- 国内货币: \$ (美元) 的利率 $r_{\$}$
- 外国货币: € (欧元) 的利率 $r_{€}$
- 现在交换比率: $€\,1 = \$\,x_0$
- $C_{\$}(x_0, K, T)$: 在时刻 T 以 \$ K 买入 1 欧元的权利的价格
- $P_{\$}(x_0, K, T)$: 在时刻 T 以 \$ K 卖出 1 欧元的权利的价格

由于

$$\begin{aligned} \mathrm{PV}(€\,1) &= €\,e^{-r_{€}T} = \$\,x_0 e^{-r_{€}T}, \\ \mathrm{PV}(\$\,K) &= \$\,K e^{-r_{\$}T}, \end{aligned}$$

我们得到广义的**平价公式 (以美元\$ 计)**:

$$C_{\$}(x_0, K, T) - P_{\$}(x_0, K, T) = x_0 e^{-r_{€}T} - K e^{-r_{\$}T}$$

Outline

第二章 基本定价原则

2.1 看跌-看涨平价公式 (Put-call parity)

2.2 广义平价公式 (交换期权)

2.3 期权的基本性质 (style, maturity, strike)

我们将在以面三个方面比较期权：

2.3.1 **不同的交割价格**

2.3.2 **不同的 styles** (欧式 v.s. 美式)

2.3.3 美式看涨期权提前行权

2.3.4 **不同的到期日**

2.3.1 关于交割价的单调性

性质 1: 如果 $K_1 < K_2$, 则

$$C(K_1) \geq C(K_2) \quad \text{且} \quad P(K_1) \leq P(K_2).$$

证明: 考虑时刻 T 的收益, 由 $K_1 < K_2$, 知

$$(S_T - K_1)_+ \geq (S_T - K_2)_+ .$$

由一价定律 (无套利), 我们有

$$C(K_1) \geq C(K_2).$$

类似地,

$$(K_1 - S_T)_+ \leq (K_2 - S_T)_+ .$$

由一价定律

$$P(K_1) \leq P(K_2).$$

2.3.1 关于交割价的单调性

性质 1: 如果 $K_1 < K_2$, 则

$$C(K_1) \geq C(K_2) \quad \text{且} \quad P(K_1) \leq P(K_2).$$

证明: 考虑时刻 T 的收益, 由 $K_1 < K_2$, 知

$$(S_T - K_1)_+ \geq (S_T - K_2)_+ .$$

由一价定律 (无套利), 我们有

$$C(K_1) \geq C(K_2).$$

类似地,

$$(K_1 - S_T)_+ \leq (K_2 - S_T)_+ .$$

由一价定律

$$P(K_1) \leq P(K_2).$$

2.3.2 关于交割价的 Lipschitz 性

性质 2: 如果 $K_1 < K_2$, 则

$$\begin{aligned} C(K_1) - C(K_2) &\leq e^{-rT}\left(K_2 - K_1\right), \\ P(K_2) - P(K_1) &\leq e^{-rT}\left(K_2 - K_1\right). \end{aligned}$$

证明:考虑看涨期权的收益

$$(S_T - K_1)_+ - (S_T - K_2)_+ \leq K_2 - K_1.$$

将其折现到时刻 0, 我们有

$$C(K_1) - C(K_2) \leq e^{-rT}(K_2 - K_1).$$

类似地, 由

$$(K_2 - S_T)_+ - (K_1 - S_T)_+ \leq K_2 - K_1,$$

得到

$$P(K_2) - P(K_1) \leq e^{-rT}\left(K_2 - K_1\right).$$

2.3.2 关于交割价的 Lipschitz 性

性质 2: 如果 $K_1 < K_2$, 则

$$\begin{aligned} C(K_1) - C(K_2) &\leq e^{-rT}(K_2 - K_1), \\ P(K_2) - P(K_1) &\leq e^{-rT}(K_2 - K_1). \end{aligned}$$

证明:考虑看涨期权的收益

$$(S_T - K_1)_+ - (S_T - K_2)_+ \leq K_2 - K_1.$$

将其折现到时刻 0, 我们有

$$C(K_1) - C(K_2) \leq e^{-rT}(K_2 - K_1).$$

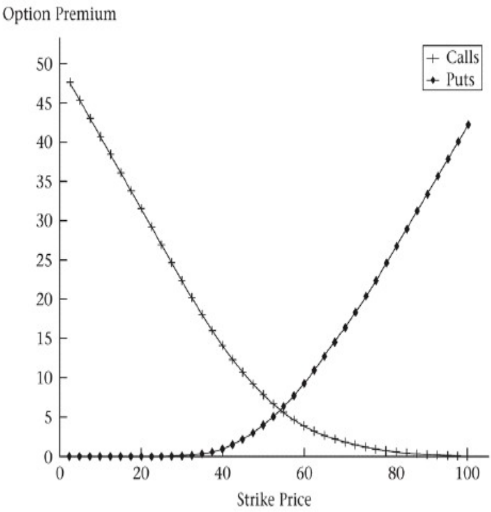
类似地, 由

$$(K_2 - S_T)_+ - (K_1 - S_T)_+ \leq K_2 - K_1,$$

得到

$$P(K_2) - P(K_1) \leq e^{-rT}(K_2 - K_1).$$

关于交割价


Option Premium
50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
Calls
Puts
0
20
40
60
80
100
Strike Price

2.3.3 关于交割价的凸性 (Convexity)

$f(\cdot):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 称为**凸函数**, 如果对任意的 $x<y$ 和 $\lambda\in[0,1]$, 有

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\le\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y).$$

- 等价地, $f(\cdot)$ 是凸函数当且仅当, 对任意的 $x<y<z$,

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\le\frac{f(y)-f(z)}{y-z}$$

- 如果 $f''(\cdot)$ 几乎处处存在, $f(\cdot)$ 是凸函数当且仅当

$$f''(\cdot)\ge 0.$$

性质 2.3. $C(K)$ 和 $P(K)$ 关于 K 是凸函数.

证明: 对任意的 $0 \le \lambda \le 1$ 和 $K_1, K_2 > 0$, 易证

$$\begin{aligned}[S_T - \lambda K_1 - (1-\lambda)K_2]_+ &= [\lambda(S_T - K_1) + (1-\lambda)(S_T - K_2)]_+ \\ &\le \lambda(S_T - K_1)_+ + (1-\lambda)(S_T - K_2)_+\end{aligned}$$

折现到时刻 0, 我们有

$$C(\lambda K_1 + (1-\lambda)K_2) \le \lambda C(K_1) + (1-\lambda)C(K_2),$$

即 $C(K)$ 关于 K 是凸的. 类似地, 可以证明 $P(K)$ 关于 K 是凸的.

2.3.3 关于交割价的凸性 (Convexity)

推论: 对 $K_1 < K_2 < K_3$, 我们有

$$\frac{C(K_1) - C(K_2)}{K_1 - K_2} \leq \frac{C(K_2) - C(K_3)}{K_2 - K_3}$$

且

$$\frac{P(K_1) - P(K_2)}{K_1 - K_2} \leq \frac{P(K_2) - P(K_3)}{K_2 - K_3}.$$

例 2.2 不同交割价格

考虑三个基于同一只股票的看涨期权，到期日为一年，简单利率为 $r = 20\%$.

交割价格 K	50	59	65
期权价格 $C(K)$	14	8.9	5

是否存在套利?

解:

- 单调性: $C(K)$ 关于 K 单调递减.
- Lipschitz:

$$\begin{cases} C(50) - C(59) = 14 - 8.9 = 5.1 < (59 - 50)/1.2 = 7.5 \\ C(59) - C(65) = 8.9 - 5 = 3.9 < (65 - 59)/1.2 = 5 \end{cases}$$

例 2.2 不同交割价格

考虑三个基于同一只股票的看涨期权, 到期日为一年, 简单利率为 $r = 20\%$.

交割价格 K	50	59	65
期权价格 $C(K)$	14	8.9	5

是否存在套利?

解:

- 单调性: $C(K)$ 关于 K 单调递减.
- Lipschitz:

$$\begin{cases} C(50) - C(59) = 14 - 8.9 = 5.1 < (59 - 50)/1.2 = 7.5 \\ C(59) - C(65) = 8.9 - 5 = 3.9 < (65 - 59)/1.2 = 5 \end{cases}$$

- 凸性: 然而,

$$\begin{aligned}\frac{C(50)-C(59)}{50-59} &= \frac{14-8.9}{-9} = -0.567\\ \frac{C(59)-C(65)}{59-65} &= \frac{8.9-5}{-6} = -0.65,\end{aligned}$$

即,

$$\frac{C(50)-C(59)}{50-59} > \frac{C(59)-C(65)}{59-65}.$$

- 由于 $C(K)$ 不凸, 我们知道**存在套利**. 而且, $C(59)$ **overpriced**!

如何套利?

注意

$$C(59)=C(0.4\times 50+0.6\times 65)>0.4C(50)+0.6C(65),$$

即等价地,

$$10C(59)>4C(50)+6C(65).$$

做多四个 50-交割价看涨和 6 个 65-交割价看涨, 且做空是个59-交割价看涨. 则有

$$\text{在时刻 0 的收益}: 10C(59)-4C(50)-6C(65)=3.$$

在时刻 T 得到收益:

$$\begin{array}{ll} 0, & \text{if } S_T\le 50,\\ 4\left(S_T-50\right)\ge 0, & \text{if } 50<S_T\le 59,\\ 4\left(S_T-50\right)-10(S_T-59)=390-6S_T\ge 0, & \text{if } 59<S_T\le 65,\\ 4\left(S_T-50\right)-10(S_T-59)+6(S_T-65)=0, & \text{if } 65<S_T. \end{array}$$

2.3.2 关于不同类型 (欧式 v.s. 美式)的不等式

回顾：

- 欧式期权是指必须在期权到期日当天才能行使的期权.
- 美式期权是指可以在到期日之前任何一天被执行的期权.

- $C_E(S_0, K, T)$: 欧式看涨期权的价格.
  在时刻 T 以价格 \$ K 买入资产的权利.
- $C_A(S_0, K, T)$: 美式看涨期权的价格.
  在时刻 T 或之前以价格 \$ K 买入资产的权利.
- $P_E(S_0, K, T)$: 欧式看跌期权的价格.
  在时刻 T 以价格 \$ K 卖出资产的权利.
- $P_A(S_0, K, T)$: 美式看跌期权的价格.
  在时刻 T 或之前以价格 \$ K 卖出资产的权利.

2.3.2 关于不同类型 (欧式 v.s. 美式)的不等式

不等式 2.1:

$$C_E(S_0, K, T) \le C_A(S_0, K, T) \le S_0.$$
$$P_E(S_0, K, T) \le P_A(S_0, K, T) \le K.$$

证明:

对美式看涨期权, 你能得到最好的是立刻以 0 元买入股票.

对美式看跌期权, 你能得到最好的是直接得到行权价. □

2.3.2 关于不同类型 (欧式 v.s. 美式)的不等式

不等式 2.1:

$$C_E(S_0, K, T) \leq C_A(S_0, K, T) \leq S_0.$$
$$P_E(S_0, K, T) \leq P_A(S_0, K, T) \leq K.$$

证明:

对**美式看涨**期权, 你能得到最好的是**立刻以 0 元买入股票**.

对**美式看跌**期权, 你能得到最好的是**直接得到行权价**. □

2.3.2 关于不同类型 (欧式 v.s. 美式)的不等式

不等式 2

$$(\mathrm{PV}(S_T) - \mathrm{PV}(K))_+ \le C_E(S_0, K, T) \le C_A(S_0, K, T)$$
$$(\mathrm{PV}(K) - \mathrm{PV}(S_T))_+ \le P_E(S_0, K, T) \le P_A(S_0, K, T).$$

证明: 由看跌-看涨平价公式,

$$\begin{aligned} C_E(S_0, K, T) &= P_E(S_0, K, T) + \mathrm{PV}(S_T) - \mathrm{PV}(K) \\ &\ge \mathrm{PV}(S_T) - \mathrm{PV}(K). \end{aligned}$$

注意到 $C_E(S_0, K, T) \ge 0$. 因此,

$$C_E(S_0, K, T) \ge (\mathrm{PV}(S_T) - \mathrm{PV}(K))_+ .$$

2.3.2 关于不同类型(欧式 v.s. 美式)的不等式

不等式 2

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{PV}(S_T) - \mathrm{PV}(K))_+ &\le C_E(S_0, K, T) \le C_A(S_0, K, T) \\
(\mathrm{PV}(K) - \mathrm{PV}(S_T))_+ &\le P_E(S_0, K, T) \le P_A(S_0, K, T).
\end{aligned}
$$

证明: 由看跌-看涨平价公式,

$$
\begin{aligned}
C_E(S_0, K, T) &= P_E(S_0, K, T) + \mathrm{PV}(S_T) - \mathrm{PV}(K) \\
&\ge \mathrm{PV}(S_T) - \mathrm{PV}(K).
\end{aligned}
$$

注意到 $C_E(S_0, K, T) \ge 0$. 因此,

$$
C_E(S_0, K, T) \ge (\mathrm{PV}(S_T) - \mathrm{PV}(K))_+ .
$$

2.3.3 美式看涨期权提前行权 (无股息)

性质 2.4: 如果股票**无股息**, 美式看涨期权**不应该提前行权**, i.e.,

$$C_A(S_0, K, T) = C_E(S_0, K, T).$$

证明: 对任何 $t < T$, 由看跌-看涨平价公式,

$$\begin{aligned} C_A(S_t, K, T-t) &\geq C_E(S_t, K, T-t) \\ &= P_E(S_t, K, T-t) + S_t - e^{-r(T-t)}K \\ &> S_t - K. \end{aligned}$$

如果在时刻 t 提前行权, 则将失去 $C_A(S_t, K, T-t)$ 得到 $S_t - K$.
这样将**失去** $C_A(S_t, K, T-t) - (S_t - K) > 0$.

不应该提前行权!

2.3.3 美式看涨期权提前行权 (有股息)

性质 2.5: 对美式看涨期权, 如果

$$K - \mathrm{PV}_{t,T}(K) > \mathrm{PV}_{t,T}(\mathrm{Div}),$$

则在时刻 $t < T$ 提前行权是不理智的.

$\mathrm{PV}_{t,T}$ 表示 T 时刻的资产在 t 时刻的折现值.

证明: 对任意 $t < T$, 由看跌-看涨平价公式, 有

$$\begin{aligned} C_A(S_t, K, T-t) &\geq C_E(S_t, K, T-t) \\ &= P_E(S_t, K, T-t) + S_t - \mathrm{PV}_{t,T}(\mathrm{Div}) - \mathrm{PV}_{t,T}(K) \\ &= S_t - K + P_E(S_t, K, T-t) + K - \mathrm{PV}_{t,T}(\mathrm{Div}) - \mathrm{PV}_{t,T}(K) \\ &> S_t - K. \quad \square \end{aligned}$$

2.3.3 美式看涨期权提前行权 (有股息)

性质 2.5: 对美式看涨期权, 如果

$$K - \mathrm{PV}_{t,T}(K) > \mathrm{PV}_{t,T}(\mathrm{Div}),$$

则在时刻 $t < T$ 提前行权是不理智的.

$\mathrm{PV}_{t,T}$ 表示 T 时刻的资产在 t 时刻的折现值.

证明: 对任意 $t < T$, 由看跌-看涨平价公式, 有

$$\begin{aligned}
&C_A(S_t, K, T-t) \geq C_E(S_t, K, T-t) \\
&\quad = \quad P_E(S_t, K, T-t) + S_t - \mathrm{PV}_{t,T}(\mathrm{Div}) - \mathrm{PV}_{t,T}(K) \\
&\quad = \quad S_t - K + P_E(S_t, K, T-t) + K - \mathrm{PV}_{t,T}(\mathrm{Div}) - \mathrm{PV}_{t,T}(K) \\
&\quad > \quad S_t - K. \quad \square
\end{aligned}$$

- 这**不意味**着当

$$PV_{t,T}(\mathrm{Div}) > K - PV_{t,T}(K)$$

就应该在时刻 $t < T$ 提前行权!

- 但**如果股息足够高**, 就存在提前行权的动力.

e.g.,考虑一个极端例子. 一个执行价格为 90的美式看涨期权, 股票价格为 100, 将支付 99.99 的股息. 如果以行权价 90 买入价值 100 的股票, 则净头寸为 10; 如果超过了最后一次分股息时间, 则期权无价值.

性质 2.6. 对于美式看跌期权, 如果

$$\mathrm{PV}_{t,T}(\mathrm{Div}) > K - \mathrm{PV}_{t,T}(K),$$

则在时刻 $t < T$ 提前行权是不理智的.

证明: 在时刻 $t < T$, 我们有

$$\begin{aligned}
& P_A(S_t, K, T-t) \geq P_E(S_t, K, T-t) \\
& \quad = \quad C_E(S_t, K, T-t) - S_t + \mathrm{PV}_{t,T}(\mathrm{Div}) + \mathrm{PV}_{t,T}(K) \\
& \quad = \quad K - S_t + C_E(S_t, K, T-t) - K + \mathrm{PV}_{t,T}(\mathrm{Div}) + \mathrm{PV}_{t,T}(K) \\
& \quad > \quad K - S_t.
\end{aligned}$$

□

如果股息足够高, 则不会提前行权, 从而失去股票.

2.3.4 关于不同的到期日的比较

假定 $0 < t < T_1 < T_2$.

性质 2.7 对于美式期权:

$$\begin{aligned} C_A(S_t, K, T_1 - t) &\leq C_A(S_t, K, T_2 - t), \\ P_A(S_t, K, T_1 - t) &\leq P_A(S_t, K, T_2 - t). \end{aligned}$$

性质 2.8 欧式看涨 (无股息):

$$C_E(S_t, K, T_1 - t) \leq C_E(S_t, K, T_2 - t).$$

证明: $C_E(S_0, K, T) = C_A(S_0, K, T)$.

2.3.4 关于不同的到期日的比较

假定 $0 < t < T_1 < T_2$.

性质 2.7 对于美式期权:

$$\begin{aligned} C_A(S_t, K, T_1 - t) &\leq C_A(S_t, K, T_2 - t), \\ P_A(S_t, K, T_1 - t) &\leq P_A(S_t, K, T_2 - t). \end{aligned}$$

性质 2.8 欧式看涨 (无股息):

$$C_E(S_t, K, T_1 - t) \leq C_E(S_t, K, T_2 - t).$$

证明: $C_E(S_0, K, T) = C_A(S_0, K, T)$.

欧式看涨 (有股息):

$$C_E(S_t, K, T_1 - t) \ ? \ C_E(S_t, K, T_2 - t)$$

- e.g., 考虑一个股票, 将于两周后支付清算股利[1]. 到期日为一周的欧式看涨期权是有价值的; 而到期日为三周的欧式看涨期权是没有价值的.

欧式看跌:

$$P_E(S_t, K, T_1 - t) \ ? \ P_E(S_t, K, T_2 - t)$$

- e.g., 考虑一个破产公司. 看跌期权价值是行权价的折现价. 故到期日越久折现价就越低.

[1]清算股利是资本的返还而不是资本所带来的收益.