金融随机分析

第三章 二叉树模型

陈 昱

cyu@ustc.edu.cn

管理科研楼 1003

63602243

2019 年 4 月

Outline

第一章 二叉树模型

§1.1 单时段二叉树模型

期权定价的过程

定价模型				
二叉树模型		**定价模型**		
Black-scholes 模型	$\Rightarrow$	(复制模型)	$\Rightarrow$	**期权价格**
$\vdots$		风险中性方法		

1.1.1 二叉树模型.

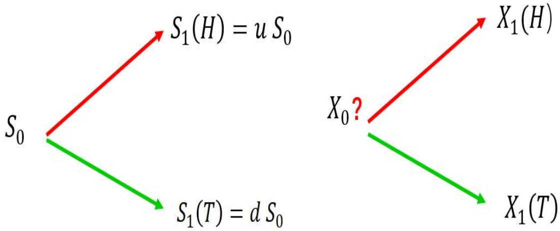
定义 1.1 (二叉树模型). 在下一时刻股票价格只有两个状态("增长 (u) 和降低 (d)")且改变的比例是**固定的**

$$0 < d < u,$$

其中 d 是"下降" 比例, u 是"上升" 比例.

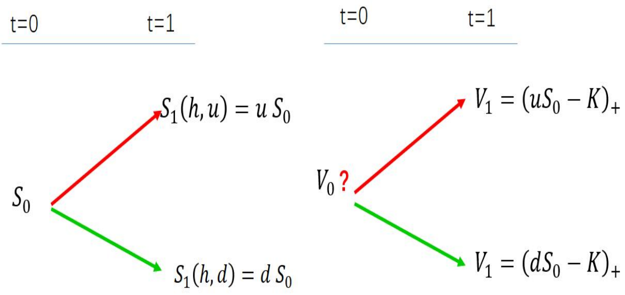
- h: 到期日, 为方便记$h = 1$.
- ▷ r_f: 无风险简单利率(h 时间).
- $S(0)$: 初始股票价格
- $S_1(H) = uS(0)$: 在时刻 1 处于状态 u 的股票价格
- $S_1(T) = dS(0)$: 在时刻 1 处于状态 d 的股票价格
- $X_1(H)$ 和 $X_1(T)$: 在时刻 1 于状态 u 和状态 d 的期权收益.

§1.1 单时段二叉树模型



目标: 求出期权价格 $\mathbf{X_0}$.

§1.1 单时段二叉树模型



目标: 求出期权价格 V_0.

1.1.2 复制资产组合

- 考虑一个以股票为标的资产的期权，假定标的股票价格遵循上图所示.
- 看涨期权到期日（$h=1$）的价值，其中K为敲定价格，

$$V_1 = \begin{cases} V_1(H) = \max(S_1(H) - K, 0) \\ V_1(T) = \max(S_1(T) - K, 0) \end{cases}$$

- 通过股票和货币市场交易复制期权，利用**无风险套利原则**定义期权初始价格。

有效市场的实质:一个交易策略可以不劳而获,那么它必将承受风险, 否则, 便存在套利机会. 更具体的说

定义: 套利

- 零初始财富
- 损失的概率等于零
- 获利的概率大于等于零

在单时段的二叉树模型, 为排除套利机会, 我们必须假定

$$0 < d < 1 + r_f < u.$$

定理:

- 股票价格如果满足不存在无风险套利关系，则

$$0 < d < 1 + r_f < u$$

充分性:

- $d > 0$ 是因为股票价格为正。
- **假设**$d \geq 1 + r_f$, 投资者可以在$t = 0$时刻从银行借入资金购买股票, 即使是最差的情况在$t = 1$时刻, 股票收益都能够偿还借款利息, 此外仍有余钱的概率为正, 因为$u > d \geq 1 + r_f$, 提供了套利机会.
- **假设**$u \leq 1 + r_f$, 投资者可以$t = 0$时刻卖空股票, 将所得收益投资于货币市场, 即使是在股票的最好情况下, 在$t = 1$时刻, 货币市场投资都大于或等于偿还股票的花费, 因为$d < u \leq 1 + r_f$, 这也提供了一个套利机会.

以上我们论证了含有股票和货币市场两种资产的市场无套利,必有

$$0 < d < 1 + r_f < u.$$

反之亦然，如果上式成立，则市场无套利.

必要性:

- 假设投资者初始财富为X_0，持有Δ_0份股票，在$t = 1$时刻财富为X_1，则

$$X_1 = (X_0 - \Delta_0 S_0)(1 + r_f) + \Delta_0 S_1.$$

即

$$X_1 = \begin{cases} (X_0 - \Delta_0 S_0)(1 + r_f) + \Delta_0 u S_0 \\ (X_0 - \Delta_0 S_0)(1 + r_f) + \Delta_0 d S_0 \end{cases}$$

如果$0 < d < 1 + r_f < u$，在忽略Δ_0的情况下，令初始财富等于零，无法使X_1在正的概率下大于零，在零概率下小于等于零。

证明

以上我们论证了含有股票和货币市场两种资产的市场无套利,必有

$$0 < d < 1 + r_f < u.$$

反之亦然，如果上式成立，则市场无套利.

必要性:

- 假设投资者初始财富为X_0，持有Δ_0份股票，在$t = 1$时刻财富为X_1，则

$$X_1 = (X_0 - \Delta_0 S_0)(1 + r_f) + \Delta_0 S_1.$$

即

$$X_1 = \begin{cases} (X_0 - \Delta_0 S_0)(1 + r_f) + \Delta_0 u S_0 \\ (X_0 - \Delta_0 S_0)(1 + r_f) + \Delta_0 d S_0 \end{cases}$$

如果$0 < d < 1 + r_f < u$，在忽略Δ_0的情况下，令初始财富等于零，无法使X_1在正的概率下大于零，在零概率下小于等于零。

例 1.1.1 考虑一单时段模型，$h=1$，$S(0)=4$，$u=2$，$d=1/2$，$r=1/4$. 求执行价格为 $K=5$ 的欧式看涨期权价格.

- 设初始财富是 1.2. 购买0.5份股票，需要花费2，需要借入资金0.8. 则在时刻1的财富为

$$X_1=(X_0-\Delta_0 S_0)(1+r_f)+\Delta_0 S_1=0.5S_1-0.8(1+0.25)$$

- $t=1$时，如果股票价格为8，则期权的价值为3，$X_1=3$；如果股票价格2，则期权的价值为0，$X_1=0$.
- 上述的投资组合(股票和无风险债券)完全复制了期权.
- 根据无套利原则，期权的当期价格$t=0$，应等于投资组合的价值.
- 复制期权所需要的初始财富$X_0=1.2$叫做期权在时刻0的无套利价格
- 如果期权的初始价格为1.21元，如何套利呢？1.19元呢？

二项式期权定价

假设：

- 股票份数可以无限细分
- 无风险借贷的利率相等
- 股票的买价和卖价相等(没有买卖价差)
- 在任何时刻，股价的可能性只有两种

- 假设投资者初始财富为X_0，持有Δ_0份股票，在$t=1$时刻财富为X_1，则

$$X_1=(X_0-\Delta_0 S_0)(1+r_f)+\Delta_0 S_1.$$

即

$$X_1=X_0(1+r_f)+\Delta_0(S_1-(1+r_f)S_0)$$

$$\begin{cases} X_0+\Delta_0(\frac{1}{(1+r_f)}S_1(H)-S_0)=\frac{1}{(1+r_f)}V_1(H) \\ X_0+\Delta_0(\frac{1}{(1+r_f)}S_1(T)-S_0)=\frac{1}{(1+r_f)}V_1(T) \end{cases}$$

选择$\tilde{p}$，使得

$$S_0=\frac{1}{(1+r_f)}(\tilde{p}S_1(H)+(1-\tilde{(p)})S_1(T))$$

- 假设投资者初始财富为X_0，持有Δ_0份股票，在$t=1$时刻财富为X_1，则

$$X_1=(X_0-\Delta_0 S_0)(1+r_f)+\Delta_0 S_1.$$

即

$$X_1=X_0(1+r_f)+\Delta_0(S_1-(1+r_f)S_0)$$

$$\begin{cases} X_0+\Delta_0(\frac{1}{(1+r_f)}S_1(H)-S_0)=\frac{1}{(1+r_f)}V_1(H) \\ X_0+\Delta_0(\frac{1}{(1+r_f)}S_1(T)-S_0)=\frac{1}{(1+r_f)}V_1(T) \end{cases}$$

选择$\tilde{p}$，使得

$$S_0=\frac{1}{(1+r_f)}(\tilde{p}S_1(H)+(1-\tilde{(p)})S_1(T))$$

- 假设投资者初始财富为X_0，持有Δ_0份股票，在$t=1$时刻财富为X_1，则

$$X_1 = (X_0 - \Delta_0 S_0)(1+r_f) + \Delta_0 S_1.$$

即

$$X_1 = X_0(1+r_f) + \Delta_0(S_1 - (1+r_f)S_0)$$

$$\begin{cases} X_0 + \Delta_0(\frac{1}{(1+r_f)}S_1(H) - S_0) = \frac{1}{(1+r_f)}V_1(H) \\ X_0 + \Delta_0(\frac{1}{(1+r_f)}S_1(T) - S_0) = \frac{1}{(1+r_f)}V_1(T) \end{cases}$$

选择$\tilde{p}$，使得

$$S_0 = \frac{1}{(1+r_f)}(\tilde{p}S_1(H) + (1-\tilde(p))S_1(T))$$

- 由$S_0 = \frac{1}{(1+r_f)}(\tilde{p}S_1(H) + (1-\tilde{p})S_1(T))$得**风险中性概率**:

$$\tilde{p} = \frac{1+r_f-d}{u-d}, \quad \tilde{q} = 1-\tilde{p} = \frac{u-(1+r_f)}{u-d},$$

- 第一个方程两边同乘以$\tilde{p}$, 第二个方程两边同乘以$1-\tilde{p}$, 然后相加

$$\Delta_0 = \frac{V_1(H) - V_1(T)}{S_1(H) - S_1(T)}$$

$$X_0 = \frac{1}{(1+r_f)}(\tilde{p}V_1(H) + (1-\tilde{p})V_1(T)) = V_0$$

复制期权

- 由$S_0 = \frac{1}{(1+r_f)}(\tilde{p}S_1(H) + (1-\tilde{p})S_1(T))$得**风险中性概率**:

$$\tilde{p} = \frac{1+r_f-d}{u-d}, \quad \tilde{q} = 1-\tilde{p} = \frac{u-(1+r_f)}{u-d},$$

- 第一个方程两边同乘以$\tilde{p}$, 第二个方程两边同乘以$1-\tilde{p}$, 然后相加

$$\Delta_0 = \frac{V_1(H)-V_1(T)}{S_1(H)-S_1(T)}$$

$$X_0 = \frac{1}{(1+r_f)}(\tilde{p}V_1(H) + (1-\tilde{p})V_1(T)) = V_0$$

期权定价：风险中性定价

- 二项式期权定价

$$V_0 = \frac{1}{(1+r_f)}(\tilde{p}V_1(H) + (1-\tilde{p})V_1(T))$$

$$S_0 = \frac{1}{(1+r_f)}(\tilde{p}S_1(H) + (1-\tilde{p})S_1(T))$$

- $\tilde{p}$与$\tilde{q}$ 均大于零，它们不是真实的概率p和q，对于真实的概率在风险厌恶的假设下

$$S < \frac{1}{(1+r_f)}(pS_1(H) + (1-p)S_1(T))$$

1.1.2 复制资产组合

- B: 投资国债的资金数量 (若为负数, 表示借入 $|B|$ 资金.) B 即例1.1.1的$X_0 - \Delta_0 S_0$.
- Δ: 购买股票的数量

则 (B, Δ) 称为**复制资产组合**, 我们希望

$$\begin{cases} (1+r)B + \Delta S(h,u) = X(h,u) \\ (1+r)B + \Delta S(h,d) = X(h,d) \end{cases}$$

解此等式得到,

$$\begin{cases} \Delta = \frac{X(h,u)-X(h,d)}{uS(0)-dS(0)} \\ B = \frac{uX(h,d)-dX(h,u)}{(1+r)(u-d)}. \end{cases}$$

1.1.2 复制资产组合

- B: 投资国债的资金数量 (若为负数, 表示借入 $|B|$ 资金.) B 即例1.1.1的$X_0 - \Delta_0 S_0$.
- Δ: 购买股票的数量

则 (B, Δ) 称为**复制资产组合**, 我们希望

$$\begin{cases} (1+r)B + \Delta S(h,u) = X(h,u) \\ (1+r)B + \Delta S(h,d) = X(h,d) \end{cases}$$

解此等式得到,

$$\begin{cases} \Delta = \frac{X(h,u)-X(h,d)}{uS(0)-dS(0)} \\ B = \frac{uX(h,d)-dX(h,u)}{(1+r)(u-d)}. \end{cases}$$

复制方法定价

由一价定律:

相同的收益: $(1+r)B + \Delta S(h,\omega) = X(h,\omega),\ \omega \in \{u,d\}$

$\Downarrow$

相同的价格: $B + \Delta S(0) = X(0)$

带入 B 和 Δ 的公式, 我们得到**期权价格**

$$X(0) = \frac{1}{1+r}\left(\frac{1+r-d}{u-d}X(h,u) + \frac{u-1-r}{u-d}X(h,d)\right).$$

例 1.1 考虑一单时段模型, $h=1$, $S(0)=4$, $u=2$, $d=1/2$, $r=1/4$. 求执行价格为 $K=5$ 的欧式看涨期权价格.

解: 注意到 $S(1,u)=8$, $S(1,d)=2$, 有 $X(1,u)=3$, $X(1,d)=0$. 我们需要

$$\begin{cases} (1+r)B+\Delta 8=3 \\ (1+r)B+\Delta 2=0 \end{cases}$$

解此等式得到

$$\begin{cases} \Delta=\frac{X(h,u)-X(h,d)}{uS(0)-dS(0)}=\frac{3}{1.5\times 4}=\frac{1}{2}. \\ B=\frac{uX(h,d)-dX(h,u)}{(1+r)(u-d)}=\frac{-\frac{1}{2}\times 3}{(1+0.25)\times 1.5}=-0.8. \end{cases}$$

于是$X_0=B+\Delta S_0=-0.8+0.5\times 4=1.2.$

或者直接利用公式得到期权价格为

$$X(0) = \frac{1}{1+r}\left(\frac{1+r-d}{u-d}X(h,u) + \frac{u-1-r}{u-d}X(h,d)\right)$$

$$= \frac{1}{1+0.25}\frac{1+0.25-0.5}{2-0.5}\times 3 = 1.2$$

即, 在初始时刻投资国债 -0.8, 买入 1/2 份股票 (共计 1.2).

- 则在时刻 1, 如果股票上涨, 则收益为 3;
- 若股票下降, 则收益为 0.
- 对应于期权收益.

在上例中, 如果假设初始财富是 1.2, 该如何进行复制?

1.1.3 市场完全性

定义 1.2 (完全市场). 一个二叉股票市场模型称为是完全的, 如果任何欧式期权有一个复制的投资组合(B, Δ).

定理 1.1 一个二叉股票市场模型是完全的当且仅当

$$d < u.$$

证明. 市场完全当且仅当下列方程组有解

$$\begin{cases} (1+r)B + \Delta u S(0) = X(h, u) \\ (1+r)B + \Delta d S(0) = X(h, d) \end{cases}$$

即 $d < u$.

套利投资组合 (arbitrage portfolio)

定义 1.2 (套利投资组合) 投资组合 (B, Δ) 称为套利投资组合，如果它满足下面三个性质:

1. $B + \Delta S(0) = 0$
2. $(1+r)B + \Delta S(h,\omega) \geq 0$ 对**所有** $\omega \in \{u, d\}$
3. $(1+r)B + \Delta S(h,\omega) > 0$ 对**某个** $\omega \in \{u, d\}$.

无套利 (arbitrage-free)

定义 1.3 一个二叉股票价格模型称为是无套利，如果不存在套利投资组合.

定理 1.2 一个二项股票市场模型是**无套利的**当且仅当

$$d < 1 + r < u.$$

证明:

(1) 如果 $1 + r \leq d < u$, 则可从银行借钱并买入股票获得套利.

(2) 如果 $d < u \leq 1 + r$, 则可做空股票并将钱投资到银行而获得套利.

定理 1.2 一个二项股票市场模型是**无套利的**当且仅当

$$d < 1 + r < u.$$

证明:

(1) 如果 $1 + r \le d < u$, 则可从银行借钱并买入股票获得套利.

(2) 如果 $d < u \le 1 + r$, 则可做空股票并将钱投资到银行而获得套利.

1.1.4 风险中性测度

定义 1.4 (q_u, q_d) 称为风险中性测度, 如果它满足

(1) $q_u S(h,u) + q_d S(h,d) = (1+r)S(0)$,

(2) $q_u + q_d = 1$,

(3) $q_u, q_d > 0$.

由 (1) 和 (2), 我们有

$$q_u = \frac{1+r-d}{u-d} \quad \text{和} \quad q_d = \frac{u-1-r}{u-d},$$

由 (3), 风险中性测度存在当且仅当

$$d < 1+r < u$$

或等价地, 二叉市场模型是无套利的.

风险中性定价公式

定理: 风险中性定价公式是

$$X(0)=\frac{1}{1+r}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[X(h)\right],$$

其中 $\mathbb{Q}$ 样本空间上 $\{u,d\}$ 的风险中性测度:

$$\mathbb{Q}(\{u\})=q_u \quad \text{和} \quad \mathbb{Q}(\{d\})=q_d.$$

证明 由复制方法得到的期权定价公式是

$$\begin{aligned}
X(0) &= \frac{1}{1+r}\left(\frac{1+r-d}{u-d}X(h,u)+\frac{u-1-r}{u-d}X(h,d)\right)\\
&= \frac{1}{1+r}\left(q_uX(h,u)+q_dX(h,d)\right)\\
&= \frac{1}{1+r}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[X(h)\right]. \qquad \square
\end{aligned}$$

Outline

第三章 二叉树模型

1.1 单时段二叉树模型

- 简单模型
- 连续股息模型

1.2 多时段二叉树模型

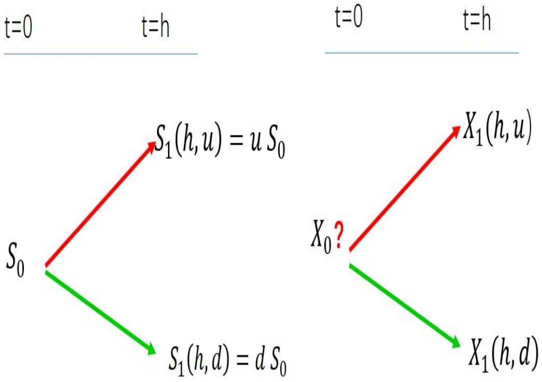
1.3 构造二叉树

更一般地,

考虑股票具有连续股息且连续复利的无风险利率的二叉树模型.

- h: 到期日
- r: 连续复利的无风险利率
- δ: 连续复利分红比率
- $S(0)$: 初始股票价格
- $S(h,u)=uS(0)$: 在时刻 h 处于状态 u 的股票价格
- $S(h,d)=dS(0)$: 在时刻 h 处于状态 d 的股票价格
- $X(h,u)$: 在时刻 h 处于状态 u 时期权的支付
- $X(h,d)$: 在时刻 h 处于状态 d 时期权的支付

单时段二叉树模型



目标：求出期权价格 X(0).

复制资产组合

- B: 投资国债的资金数量
- Δ: 购买股票的数量

则 (B, Δ) 称为**复制资产组合**, 如果

$$\begin{cases} e^{rh}B + \Delta e^{\delta h} S(h, u) = X(h, u) \\ e^{rh}B + \Delta e^{\delta h} S(h, d) = X(h, d) \end{cases}$$

解此等式得到,

$$\begin{cases} B = e^{-rh} \frac{uX(h,d) - dX(h,u)}{u-d} \\ \Delta = e^{-\delta h} \frac{X(h,u) - X(h,d)}{uS(0) - dS(0)} \end{cases}$$

复制方法 由一价定律:

$$
\begin{array}{rcl}
\text{相同的未来收益} & : & e^{rh}B + \Delta e^{\delta h} S(h,\omega) = X(h,\omega),\ \omega \in \{u,d\} \\
 & \Downarrow & \\
\text{相同的价格} & : & B + \Delta S(0) = X(0)
\end{array}
$$

带入 B 和Δ 的公式, 我们得到**期权价格**

$$
X(0) = e^{-rh}\left(\frac{e^{(r-\delta)h} - d}{u-d} X(h,u) + \frac{u - e^{(r-\delta)h}}{u-d} X(h,d)\right).
$$

例 1.2 (复制方法) 考虑一单时段二叉树模型:

- $S(0) = 41$, $u = 60/41$, $d = 30/41$.
- $h = 1$, $r = 8\%$, $\delta = 0\%$.

确定到期日一年, 执行价格为 40 的欧式看涨期权价格.

解: 我们有$S(1,u) = 60/41 \times 41 = 60$ 且 $S(1,d) = 30/41 \times 41 = 30$. 求解等式

$$\begin{cases} e^{0.08}B + 60\Delta = (60-40)_+ = 20 \\ e^{0.08}B + 30\Delta = (30-40)_+ = 0, \end{cases}$$

其中 (B,Δ) 定义如前, 我们有

$$B = -18.462 \quad \text{和} \quad \Delta = 0.667$$

因此,

$$C(40) = B + \Delta S(0) = 8.871.$$

例 1.2 (复制方法) 考虑一单时段二叉树模型:

- $S(0) = 41$, $u = 60/41$, $d = 30/41$.
- $h = 1$, $r = 8\%$, $\delta = 0\%$.

确定到期日一年, 执行价格为 40 的欧式看涨期权价格.

解: 我们有$S(1,u) = 60/41 \times 41 = 60$ 且 $S(1,d) = 30/41 \times 41 = 30$. 求解等式

$$\begin{cases} e^{0.08}B + 60\Delta = (60-40)_+ = 20 \\ e^{0.08}B + 30\Delta = (30-40)_+ = 0, \end{cases}$$

其中 (B,Δ) 定义如前, 我们有

$$B = -18.462 \quad 和 \quad \Delta = 0.667$$

因此,

$$C(40) = B + \Delta S(0) = 8.871.$$

套利投资组合 (在连续股息情形下)

定义 1.2' 投资组合 (B, Δ) 称为套利投资组合, 如果他满足下面三个性质:

1. $B + \Delta S(0) = 0$
2. $e^{rh}B + \Delta e^{\delta h}S(h,\omega) \geq 0$ 对所有 $\omega \in \{u, d\}$
3. $e^{rh}B + \Delta e^{\delta h}S(h,\omega) > 0$ 对某个 $\omega \in \{u, d\}$.

无套利 (在连续股息情形下)

定义 1.3' 一个二叉股票价格模型称为是无套利, 如果不存在套利投资组合.

定理 1.2' 在连续股息情形下，一个二叉股票市场模型是**无套利的** 当且仅当

$$d < e^{(r-\delta)h} < u.$$

证明:

(1) 如果 $e^{(r-\delta)h} \le d < u$, 则可从银行借钱并买入股票获得套利.

(2) 如果 $d < u \le e^{(r-\delta)h}$, 则可做空股票并将钱投资到银行而获得套利.

定理 1.2' 在连续股息情形下，一个二叉股票市场模型是**无套利的** 当且仅当

$$d < e^{(r-\delta)h} < u.$$

证明:

(1) 如果 $e^{(r-\delta)h} \leq d < u$，则可从银行借钱并买入股票获得套利.

(2) 如果 $d < u \leq e^{(r-\delta)h}$，则可做空股票并将钱投资到银行而获得套利.

风险中性测度 (连续股息情形)

定义 1.4 (q_u, q_d) 称为风险中性测度, 如果它满足

(1) $q_u e^{\delta h} S(h, u) + q_d e^{\delta h} S(h, d) = e^{rh} S(0)$,

(2) $q_u + q_d = 1$,

(3) $q_u, q_d > 0$,

由 (1) 和 (2), 我们有

$$\begin{cases} q_u = \frac{e^{(r-\delta)h} - d}{u - d} \\ q_d = \frac{u - e^{(r-\delta)h}}{u - d}, \end{cases}$$

由 (3), 风险中性测度存在当且仅当

$$d < e^{(r-\delta)h} < u$$

或等价地, 二叉市场模型是无套利的.

风险中性定价公式

定理: 风险中性定价公式是

$$X(0) = e^{-rh}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[X\left(h\right)\right],$$

其中 $\mathbb{Q}$ 样本空间上 $\{u, d\}$ 的风险中性测度:

$$\mathbb{Q}(\{u\}) = q_u \quad \text{和} \quad \mathbb{Q}(\{d\}) = q_d.$$

证明 由复制方法得到的期权定价公式是

$$\begin{aligned} X(0) &= e^{-rh}\left(\frac{e^{(r-\delta)h} - d}{u-d}X(h,u) + \frac{u - e^{(r-\delta)h}}{u-d}X(h,d)\right) \\ &= e^{-rh}\left(q_u X(h,u) + q_d X(h,d)\right) \\ &= e^{-rh}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[X\left(h\right)\right]. \qquad \square \end{aligned}$$

例 1.3 (风险中性定价) 考虑一单时段市场模型

- $S(0) = 41$, $u = 60/41$, 和 $d = 30/41$.
- $h = 1$, $r = 8\%$, 和 $\delta = 0\%$.

确定一年期执行价格为 40 的欧式看涨期权的价格.

解: 由 $u = \frac{60}{41}$ 和 $d = \frac{30}{41}$, 知风险中性测度为

$$\begin{cases} q_u = \frac{e^{(r-\delta)h} - d}{u-d} = 0.48 \\ q_d = \frac{u - e^{(r-\delta)h}}{u-d} = 0.52 \end{cases}$$

因此, **由风险中性定价公式得**,

$$C(40) = e^{-rh}\left(q_u C(h,u) + q_d C(h,d)\right) = 8.871.$$

注: (风险中性测度)

给定两个选择:

(a) 收益 \$1000

(b) 以概率 1/2 收益 \$2000 或 \$0.

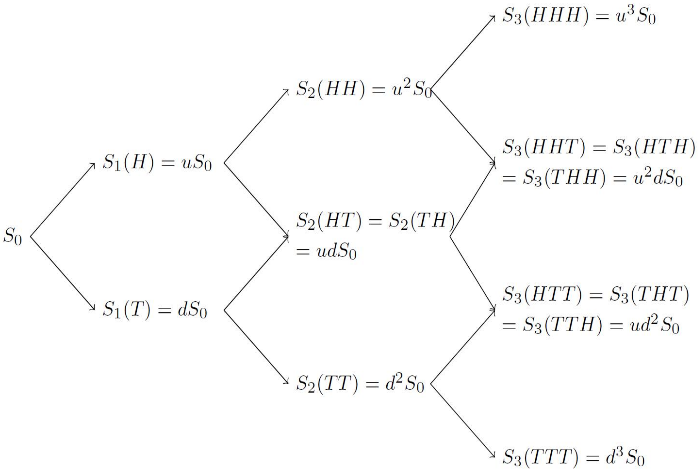
- 风险厌恶投资者选择 (a)
- 风险中性投资者对 (a) 或 (b) 无差异.

两个重要的注释:

1. 在风险中性测度下, 任何资产 (股票、期权、国债)的期望回报率都等于无风险利率.
2. 风险中性测度是为了期权定价方便而人为创造的测度.

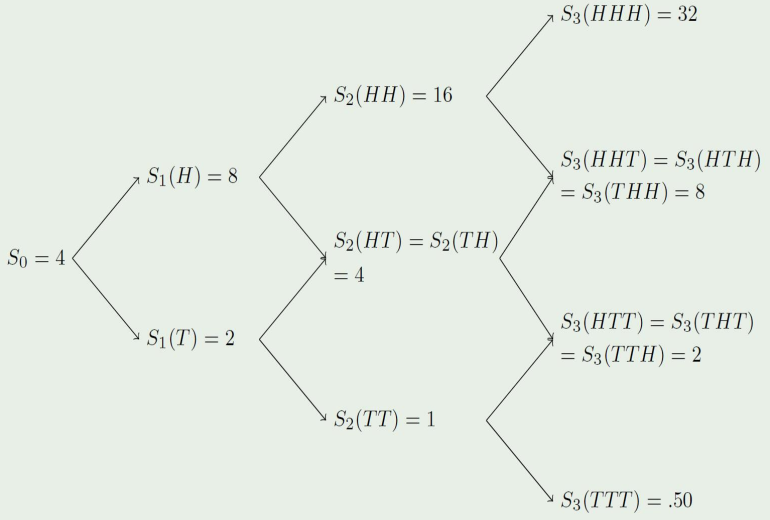
Outline

§1.2 多时段二叉树模型


S_0
$S_1(H) = uS_0$
$S_1(T) = dS_0$
$S_2(HH) = u^2 S_0$
$S_2(HT) = S_2(TH)$
$= udS_0$
$S_2(TT) = d^2 S_0$
$S_3(HHH) = u^3 S_0$
$S_3(HHT) = S_3(HTH)$
$= S_3(THH) = u^2 dS_0$
$S_3(HTT) = S_3(THT)$
$= S_3(TTH) = ud^2 S_0$
$S_3(TTT) = d^3 S_0$

§1.2 多时段二叉树模型

$S_0=4$，$u=2$，$d=\frac{1}{2}$



欧式期权在$t=0$时刻的无套利价格

- 考虑一份欧式看涨期权(到期日执行)，到期时($T=2$)以K的协议价格购买一股标的股票。
- 在$t=2$时刻，看涨期权的价值$V_2=(S_2-K)^+$，V_2和S_2依赖于第一次和第二次投掷的结果。
- 在$t=0$时刻，卖空期权，获得V_0。购买Δ_0份股票，将$(V_0-\Delta_0S_0)$的资金投入货币市场。
- 在$t=1$时刻，股票和债券的组合价值：$X_1=\Delta_0S_1+(1+r_f)(V_0-\Delta_0S_0)$

$$X_1(H)=\Delta_0S_1(H)+(1+r_f)(V_0-\Delta_0S_0) \tag{3}$$
$$X_1(T)=\Delta_0S_1(T)+(1+r_f)(V_0-\Delta_0S_0) \tag{4}$$

欧式期权在$t=0$时刻的无套利价格

- 第一次投掷后，投资者拥有的股票和债券的组合价值为X_1，并且需要调整他的头寸。
- 在$t=1$时刻，投资者持有Δ_1份股票，Δ_1依赖于第一次投掷的结果，将其余资金$X_1-\Delta_1 S_1$投资于货币市场。
- 在$t=2$时刻，组合价值：$X_2=\Delta_1 S_2+(1+r_f)(X_1-\Delta_1 S_1)=V_2$

$$V_2(HH)=\Delta_1(H)S_2(HH)+(1+r_f)(X_1(H)-\Delta_1(H)S_1(H)) \tag{5}$$
$$V_2(HT)=\Delta_1(H)S_2(HT)+(1+r_f)(X_1(H)-\Delta_1(H)S_1(H)) \tag{6}$$
$$V_2(TH)=\Delta_1(T)S_2(TH)+(1+r_f)(X_1(T)-\Delta_1(T)S_1(T)) \tag{7}$$
$$V_2(TT)=\Delta_1(T)S_2(TT)+(1+r_f)(X_1(T)-\Delta_1(T)S_1(T)) \tag{8}$$

- 方程(3)–方程(8)共有6个未知数：$V_0,\Delta_0,X_1(H),\Delta_1(H),X_1(T),\Delta_1(T)$

欧式期权在$t=0$时刻的无套利价格

- 方程(7)-方程(8)；方程(7)乘以$\tilde{p}$，方程(8)乘以$1-\tilde{p}$，然后相加

$$
\begin{aligned}
\Delta_1(T) &= \frac{V_2(TH)-V_2(TT)}{S_2(TH)-S_2(TT)} \\
X_1(T) &= \frac{1}{1+r_f}(\tilde{p}V_2(TH)+(1-\tilde{p})V_2(TT))
\end{aligned}
$$

- 采用相似的方法

$$
\begin{aligned}
\Delta_1(H) &= \frac{V_2(HH)-V_2(HT)}{S_2(HH)-S_2(HT)} \\
X_1(H) &= \frac{1}{1+r_f}(\tilde{p}V_2(HH)+(1-\tilde{p})V_2(HT))
\end{aligned}
$$

欧式期权在$t=0$时刻的无套利价格

$$\Delta_0 = \frac{X_1(H) - X_1(T)}{S_1(H) - S_1(T)}$$

$$V_0 = \frac{1}{1+r_f}(\widetilde{p}X_1(H) + (1-\widetilde{p})X_1(T))$$

财富方程

$$X_{n+1} = \Delta_n S_{n+1} + (1+r_f)(X_n - \Delta_n S_n)$$

Theorem 2.2 (多期二项式模型中的复制)

考虑一个N期的二项式资产定价模型，满足$0 < d < 1 + r_f < u$，并且：

$$\tilde{p} = \frac{(1+r_f) - d}{u - d}, \qquad \tilde{q} = 1 - \tilde{p} = \frac{u - (1+r_f)}{u - d}$$

令V_N(衍生证券在时刻N的支付)是依赖于前N次投掷$\omega_1\omega_2\ldots\omega_N$的随机变量，由后向前定义随机变量$V_{N-1}, V_{N-2}, \ldots, V_0$:

$$V_n(\omega_1\omega_2\ldots\omega_n) = \frac{1}{1+r_f}[\tilde{p}V_{n+1}(\omega_1\omega_2\ldots\omega_n H) + \tilde{q}V_{n+1}(\omega_1\omega_2\ldots\omega_n T)]$$

使得任意V_n依赖于前n次投掷的结果。接着定义：

$$\Delta_n(\omega_1\omega_2\ldots\omega_n) = \frac{V_{n+1}(\omega_1\omega_2\ldots\omega_n H) - V_{n+1}(\omega_1\omega_2\ldots\omega_n T)}{S_{n+1}(\omega_1\omega_2\ldots\omega_n H) - S_{n+1}(\omega_1\omega_2\ldots\omega_n T)}$$

如果令$X_0 = V_0$，并且从前至后通过▸ 财富方程定义组合价值$X_1, X_2, \ldots, X_N$，则：

$$X_n(\omega_1\omega_2\ldots\omega_n) = V_n(\omega_1\omega_2\ldots\omega_n) \; for \; all \;\; \omega_1\omega_2\ldots\omega_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, N$$

Theorem 2.2 证明.

$$X_n(\omega_1\omega_2\ldots\omega_n) = V_n(\omega_1\omega_2\ldots\omega_n) \text{ for all } \omega_1\omega_2\ldots\omega_n, \quad n = 0,1,2,\ldots,N$$

(1)根据定义，当$n=0$时成立；

(2)令$\omega_1\omega_2\ldots\omega_n\omega_{n+1}$固定(可任意选择)，假设第$n+1$次的投掷结果为$H$

$$\begin{aligned} X_{n+1}(\omega_1\omega_2\ldots\omega_n H) &= \Delta_n(\omega_1\omega_2\ldots\omega_n)uS_n(\omega_1\omega_2\ldots\omega_n) \\ &\quad + (1+r_f)(X_n(\omega_1\omega_2\ldots\omega_n) - \Delta_n(\omega_1\omega_2\ldots\omega_n)S_n(\omega_1\omega_2\ldots\omega_n)) \end{aligned}$$

省略$\omega_1\omega_2\ldots\omega_n$，简写成：$X_{n+1}(H) = \Delta_n uS_n + (1+r_f)(X_n - \Delta_n S_n)$。又因为：

$$\Delta_n = \frac{V_{n+1}(H) - V_{n+1}(T)}{S_{n+1}(H) - S_{n+1}(T)} = \frac{V_{n+1}(H) - V_{n+1}(T)}{(u-d)S_n}$$

□

Theorem 2.2 证明.

接上：

$$\begin{aligned}
X_{n+1}(H) &= (1+r_f)X_n - \Delta_n S_n(u-(1+r_f)) \\
&= (1+r_f)V_n + \frac{(V_{n+1}(H)-V_{n+1}(T))(u-(1+r_f))}{(u-d)} \\
&= (1+r_f)V_n + \widetilde{q}V_{n+1}(H) - \widetilde{q}V_{n+1}(T) \\
&= \widetilde{p}V_{n+1}(H) + \widetilde{q}V_{n+1}(T) + \widetilde{q}V_{n+1}(H) - \widetilde{q}V_{n+1}(T) \\
&= V_{n+1}(H)
\end{aligned}$$

当第$n+1$次投掷结果为T时，同理可证：$X_{n+1}(T)=V_{n+1}(T)$

$$X_n(\omega_1\omega_2\ldots\omega_n) = V_n(\omega_1\omega_2\ldots\omega_n) \text{ for all } \ \omega_1\omega_2\ldots\omega_n, \quad n=0,1,2,\ldots,N$$

□

1.2.1 N 时段的二叉树模型

- 可交易时间: $\{0, h, 2h, \ldots, Nh\}$.
  - $T = Nh$ 是到期日, h 每阶段时间.
- r: 无风险利率
- δ: 连续股息利率
- $S(0)$: 股票初始价格
- 固定的上升和下降比率 $d < u$.

- 在时刻 nh 的所有的状态为

$$\Omega_n = \{u^n, u^{n-1}d, \ldots, d^n\}.$$

- 在时刻 $t = nh$ 于状态 $\omega \in \Omega_n$ 的股票价格记为

$$S(t, \omega).$$

- 在时刻 nh 于状态 $\omega_k = u^k d^{n-k}$ 的股票价格是

$$S(nh, \omega_k) = u^k d^{n-k} S(0), \quad 0 \le k \le n \le N.$$

欧式期权的收益

- 在到期日于状态 $u^k d^{N-k}$ 的股票价格为

$$S(T, u^k d^{N-k})$$

- 在到期日于状态 $u^k d^{N-k}$, 执行价格 K 的欧式期权收益为

$$\text{看涨: } X(T, u^m d^{N-m}) = \left[S(T, u^m d^{N-m}) - K\right]_+,$$
$$\text{看跌: } X(T, u^m d^{N-m}) = \left[K - S(T, u^m d^{N-m})\right]_+.$$

- $S(T)$ 和 $X(T)$ 是随机的.
- 但 $S(T, u^k d^{N-k})$ 和 $X(T, u^k d^{N-k})$ 是**非随机且已知的**.

欧式期权的风险中性定价公式

定理 1.1. 欧式期权的风险中性定价公式为

$$\begin{aligned} X(0) &= e^{-rT}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X(T)] \\ &= e^{-rT}\sum_{m=0}^{N}\begin{pmatrix} N \\ m \end{pmatrix} q_u^m q_d^{N-m} X(T, u^m d^{N-m}), \end{aligned}$$

其中 $\begin{pmatrix} N \\ m \end{pmatrix} = \frac{N!}{m!(N-m)!}$.

- $\mathbb{Q}$ 称为是样本空间 $\{d^N, ud^{N-1}, \ldots u^{N-1}d, u^N\}$ 上的风险中性测度，满足

$$\mathbb{Q}\{u^m d^{N-m}\} = \begin{pmatrix} N \\ m \end{pmatrix} q_u^m q_d^{N-m}.$$

- 单时段风险中性测度是

$$q_u = \frac{e^{(r-\delta)h} - d}{u - d} \quad 和\ q_d = \frac{u - e^{(r-\delta)h}}{u - d}.$$

基于二叉树模型的欧式期权风险中性定价过程为:

1. 构造股票价格的 N-时段二叉树模型

$$S(nh, u^k d^{n-k}) = u^k d^{n-k} S(0), \quad \text{for } 0 \le k \le n \le N.$$

2. 确定到期日欧式期权在不同状态下的收益:

$$X(T, u^N d^{N-k}), \quad 0 \le k \le N.$$

1. 对每一时段计算风险中性测度

$$q_u = \frac{e^{(r-\delta)h} - d}{u - d} \text{ 和 } q_d = \frac{u - e^{(r-\delta)h}}{u - d}.$$

4. 利用下式计算欧式期权价格:

$$X(0) = e^{-rT} \sum_{m=0}^{N} \begin{pmatrix} N \\ m \end{pmatrix} q_u^m q_d^{N-m} X(T, u^N d^{N-m})$$

例 1.4 考虑一2-时段欧式看涨期权，到期日是 2 个月，每段时期是一个月.

- $r = 6\%$ 和 $\delta = 0\%$
- $S(0) = 100$ 和 $K = 103$
- $u = 1.05$ 和 $d = 0.95$

确定期权价格.

解: $q_u = \frac{e^{0.06/12} - d}{u - d} = 0.5501$ 且 $q_d = 1 - q_d = 0.4499$. 则

$$
\begin{aligned}
& C(100, 103, \frac{1}{6}) \\
= \quad & e^{-0.06/6} \left[\begin{array}{c} q_u^2(100u^2 - 103)_+ + 2q_u q_d(100ud - 103)_+ \\ +q_d^2(100d^2 - 103)_+ \end{array} \right] \\
= \quad & 2.1721.
\end{aligned}
$$

例 1.5 考虑三时段欧式平价看跌期权，每段时期是一年.

- $r = 10\%$ 和 $\delta = 6.5\%$
- $S(0) = 300$
- $u = 1.25$ 和 $d = 0.7$.

确实期权价格.

解: 单时段风险中性测度为

$$q_u = \frac{e^{0.1-0.065} - d}{u - d} = 0.6102 \text{ 且 } q_d = 1 - q_d = 0.3898.$$

则看跌期权价格为

$$\begin{aligned} P(300, 300, 3) &= e^{-0.1\times 3}\left[3q_u q_d^2(300 - 300u^2 d) + q_d^3(300 - 300d^3)\right] \\ &= 32.5997. \end{aligned}$$

例 1.5 考虑三时段欧式平价看跌期权, 每段时期是一年.

- 简单利率 $r = 10\%$
- $S(0) = 300$
- $u = 1.25$ 和 $d = 0.7$.

确定期权价格.

解: 单时段风险中性测度为 $q_u = (1 + r - d)/(u - d) = 8/11$.

$$P(300, 300, 3) = \frac{3q_u q_d^2(300 - 300u^2 d) + q_d^3(300 - 300d^3)}{(1+r)^3}$$

$$= 32.5997.$$

第三章　二叉树模型

u 和 d 的选择

- 远期树 (Forward tree)

$$\begin{cases} u = e^{(r-\delta)h+\sigma\sqrt{h}} \\ d = e^{(r-\delta)h-\sigma\sqrt{h}}, \end{cases}$$

其中 $\sigma > 0$ 称为股票的(年化) 波动率 (volatility).

- Cox-Ross-Rubinstein 树

$$\begin{cases} u = e^{\sigma\sqrt{h}} \\ d = e^{-\sigma\sqrt{h}} \end{cases}$$

- Jarrow-Rudd 树

$$\begin{cases} u = e^{(r-\delta-0.5\sigma^2)h+\sigma\sqrt{h}} \\ d = e^{(r-\delta-0.5\sigma^2)h-\sigma\sqrt{h}} \end{cases}$$

♠ 对于有限时段 N 会得到结果不同;

♠ 当 $N \to \infty$ $(h \to 0+)$, 不同的方法得到的价格趋于相同!

例 1.4 (二叉树)

考虑一到期日是 9 个月的基于美元 (dollar-denominated) 的英镑欧式看跌期权，其中

- 目前交换价格是每英镑 1.43 美元
- 看跌期权的执行价格为 1.56 美元/英镑
- 交换比例的波动率是 $\sigma = 0.3$
- 美元的无风险利率是 8%
- 英镑的无风险利率是 9%

利用三时段的远期树来计算看跌期权价格.

解: 比率是

$$
\begin{aligned}
u &= e^{(0.08-0.09)\times 0.25+0.3\sqrt{0.25}} = 1.158933 \\
d &= e^{(0.08-0.09)\times 0.25-0.3\sqrt{0.25}} = 0.858559.
\end{aligned}
$$

则单时段的风险中性概率为

$$
q_u = \frac{e^{(0.08-0.09)\times 0.25} - d}{u-d} = 0.4626 \ \text{和}\ q_d = 0.5374.
$$

利用风险中性定价公式得到

$$
\text{看跌价格} = 0.2256.
$$