# 金融随机分析

## 第四章概率基础—有限概率空间

陈昱

cyu@ustc.edu.cn

东区管理科研楼1003

2019 年 4 月

概率基础—有限概率空间

### 3.1.1 样本空间和随机事件

**实例 1.** 抛掷一枚骰子, 观察出现的点数.

则骰子“出现1点”，“出现2点”，…, “出现6点”，“点数不大于6”，“点数为偶数”等都为随机事件.

---

- 对应所有实验结果记为

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

  $\Omega$ 称为样本空间.

- $\Omega$ 的子集 $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{5, 6\}$ 是随机事件.
- 所有感兴趣的随机事件构成的集合记为 $\mathcal{F}$.

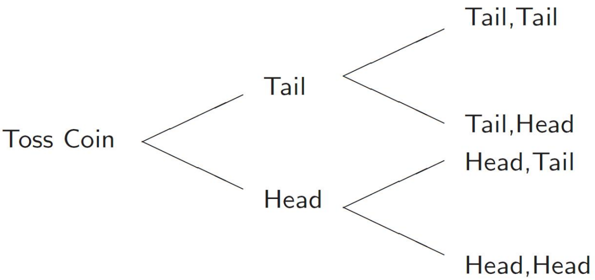
**实例 2.** 考虑连续投掷两次硬币试验. 所有实验结果为样本空间

$$\Omega_2=\{正正,正反,反正,反反\}.$$

所有的随机事件是如下集合

$$\mathcal{F}=\{\emptyset,\{正正\},\{正反,反正,反反\},\Omega_2\}$$

**实例 2.** 连续投掷两次硬币试验.




Sample Space $\Omega = \{TT, TH, HT, HH\}$.

图. 二叉树情形

### 3.1.2 $\sigma$-代数

**定义 1.1 $\sigma$-代数(事件域)**

设 $\Omega$ 为一个非空集合, $\mathcal{F}$ 为 $\Omega$ 的某些子集组成集合族. 若

(i) $\Omega \in \mathcal{F}$ (必然事件)

(ii) 若 $A \in \mathcal{F}$, 则 $\overline{A} = \Omega - A \in \mathcal{F}$. （对立事件）

(iii) 若 $A_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2, \ldots$ 则 $\cup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$ （可列并事件）

称 $\mathcal{F}$ 为 $\sigma$-代数, $(\Omega, \mathcal{F})$ 为可测空间.

- $\sigma$-代数对余运算跟并运算满足封闭性.
- $\mathcal{F}$ 是一个 $\sigma$-代数等价于满足 (i), (ii) 和

  (iii)' 若 $A_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2, \ldots$ 则 $\cap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$. (可列交事件)

### 3.1.2 可测空间的性质

设 $(\Omega, \mathcal{F})$ 为可测空间. 则

(iv) $\emptyset \in \mathcal{F}$（不可能事件）

(v) 若 $A, B \in \mathcal{F}$,则 $A - B \in \mathcal{F}$ （差事件）

(vi) 若 $A_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2, \ldots, n$,则

$$\cup_{i=1}^{n} A_i, \cap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}.$$

(有限并，有限交)

**实例2 $\sigma$-域**

连续投掷两次硬币试验. 概率空间

$$\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$$

- $A_1 = \{TT\}$ 两次都是反面.
- $A_2 = \{TH\}$ 第一次正面第二次反面.
- $A_3 = \{TH, HT\}$ 两次中恰有一正一反.
- $A_4 = \{HH, TT\}$ 两次结果相同.

不同的$\sigma$-域

$$\mathcal{F}_0 = \Big\{\emptyset, \Omega\Big\}.$$

$$\mathcal{G} = \Big\{\emptyset, \{TT, HH\}, \{TH, HT\}, \Omega\Big\}.$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^* = \Big\{&\emptyset, \{TT\}, \{TH\}, \{HT\}, \{HH\}, \{TT, TH\}, \{TT, HT\},\\ &\{TT, HH\}, \{TH, HT\}, \{TH, HH\}, \{HT, HH\}, \{TT, TH, HT\},\\ &\{TT, TH, HH\}, \{TT, HT, HH\}, \{TH, HT, HH\}, \Omega\Big\}.\end{aligned}$$

显然

$$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{F}^*$$

### 3.1.3 概率的公理化定义

**定义 1.2** 设 $(\Omega, \mathcal{F})$ 为一可测空间. 称 $\mathbb{P}(\cdot) : \mathcal{F} \to [0, 1]$ 为一概率, 若

(i) 设 $A$ 是随机事件, 则 $0 \le \mathbb{P}(A) \le 1$

(ii) 设 $\Omega$ 为必然事件, 则 $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

(iii) 若事件 $A_1, A_2, \ldots$ 为两两不相容的事件序列, 则

$$\mathbb{P}\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 是一个概率空间.

## § 3.1 概率空间

概率的公理化定义是基于下述概率三元组，其中$\Omega$是概率空间，随机试验所有可能结果的集合，$\mathcal{F}$ 为 $\Omega$ 的某些子集组成集合族，是**集函数概率$\mathbb{P}$的“定义域”**.

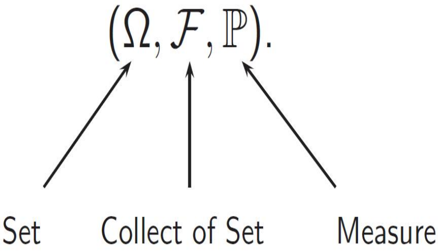



图. 概率三元组

考虑可测空间$(\Omega, \mathcal{F}^*)$, 在其上我们定义一个概率, 让$0 < p < 1$,

$$\mathbb{P}(A) = \begin{cases} (1-p)^2 & if \;\; A = \{TT\} \\ p(1-p) & if \;\; A = \{TH\} \; or \; \{HT\} \\ p^2 & if \;\; A = \{HH\} \end{cases}$$

可以验证定义的$\mathbb{P}$在可测空间$(\Omega, \mathcal{F}^*)$满足概率的公理化定义.

### 3.1.4. 概率的性质

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
2. (有限可加性) 若事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 为两两不相容的事件, 则
$$\mathbb{P}\left(\cup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i).$$
3. (可减性) 若 $A \subset B$, 则 $\mathbb{P}(B - A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$.
4. (单调性) 若 $A \subset B$, 则 $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$
5. $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$

### 3.1.4. 概率的性质

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
2. (有限可加性) 若事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 为两两不相容的事件，则

$$\mathbb{P}\left(\cup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i).$$

3. (可减性) 若 $A \subset B$, 则 $\mathbb{P}(B - A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$.
4. (单调性) 若 $A \subset B$, 则 $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$
5. $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$

### 3.1.4. 概率的性质

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
2. (有限可加性) 若事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 为两两不相容的事件, 则
$$\mathbb{P}\left(\cup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i).$$
3. (可减性) 若 $A \subset B$, 则 $\mathbb{P}(B - A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$.
4. (单调性) 若 $A \subset B$, 则 $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$
5. $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$

### 3.1.4. 概率的性质

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
2. (有限可加性) 若事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 为两两不相容的事件，则
$$\mathbb{P}\left(\cup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i).$$
3. (可减性) 若 $A \subset B$, 则 $\mathbb{P}(B - A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$.
4. (单调性) 若 $A \subset B$, 则 $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$
5. $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$

### 3.1.4. 概率的性质

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
2. (有限可加性) 若事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 为两两不相容的事件，则
$$\mathbb{P}\left(\cup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i).$$
3. (可减性) 若 $A \subset B$, 则 $\mathbb{P}(B - A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$.
4. (单调性) 若 $A \subset B$, 则 $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$
5. $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$

### 3.1.4. 概率的性质（续）

6. (加法定理) 若事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 为 $n$ 个事件, 则

$$\mathbb{P}\left(\cup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i<j} \mathbb{P}(A_i A_j) + \cdots + (-1)^{n-1} \mathbb{P}(A_1 \cdots A_n).$$

7. (次可加性) 若事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 为 $n$ 个事件, 则

$$\mathbb{P}\left(\cup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i).$$

**例 3.3 ($[0,1]$ 上的均匀 Lebesgue 测度)**

考虑单位区间 $[0,1]$ 上随机选取的数均匀地分布在 $[0,1]$.

- $\Omega = [0,1]$
- $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0,1])$ 是包含 $[0,1]$ 的所有闭集的最小的 $\sigma$- 代数.
- 对任何的 $[a,b] \in \mathcal{F}$, $a \leq b$,

$$\mathbb{P}([a,b]) = b - a.$$

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 是一个概率空间.

**例 3.2 (抛掷 $n$ 次硬币)**

独立重复的抛掷硬币$n$次。

- $\Omega_n = \{\omega = (\omega_1 \cdots \omega_n) : \omega_i \in \{H, T\}, i = 1, \ldots, n\}$.
- $\mathcal{F} = \{A : A \subset \Omega_n\}$ 是包含$\Omega$所有子集的 $\sigma$- 代数.
- 对任何的 $A \in \mathcal{F}$, 定义概率

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{2^n}.$$

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 是一个概率空间.

**例 3.2 (抛掷 $n$ 次硬币)**

独立重复的抛掷硬币$n$次。

- $\Omega_n = \{\omega = (\omega_1 \cdots \omega_n) : \omega_i \in \{H, T\}, i = 1, \ldots, n\}$.
- $\mathcal{F} = \{A : A \subset \Omega_n\}$ 是包含$\Omega$所有子集的 $\sigma$- 代数.
- 定义概率

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = p^{\#H(\omega_1 \cdots \omega_n)}(1-p)^{\#T\omega_1 \cdots \omega_n)}$$

对任何的 $A \in \mathcal{F}$, 我们有

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\}).$$

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 是一个概率空间.

## 3.2.1 随机变量

**定义 1.3** 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 是一个概率空间. 映射 $X : \Omega \to \mathbb{R}$ 满足对任意 $x \in \mathbb{R}$,

$$\{\omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$$

则称 $X$ 是 $\mathcal{F}$ 上的随机变量.

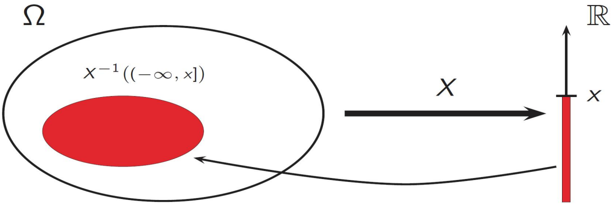



图. 随机变量的定义

## 随机变量的例子

- 掷一枚骰子，则$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，

$$\mathbb{P}(A_j) = \frac{1}{6}$$

  其中$A_j$表示掷出$j$点，$1 \le j \le 6$.
- $\mathcal{F} = \{\{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}, \Omega, \}$，设$X(\omega) = \omega, \omega \in \Omega$，现问$X$是否是$\mathcal{F}$上的随机变量？
- $\{\omega, X(\omega) \le 1\} = \{1\} \notin \mathcal{F}$，所以$X$不是$\mathcal{F}$上的随机变量。
- 这样定义的随机变量$X$

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega = 1, or\ 3, or\ 5 \\ 0 & \omega = 2, or\ 4, or\ 6 \end{cases}$$

  是随机变量.

## 随机变量的例子

- 掷一枚骰子，则$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$，
$$\mathbb{P}(A_j) = \frac{1}{6}$$
其中$A_j$表示掷出$j$点，$1 \le j \le 6$.
- $\mathcal{F} = \{\{1,3,5\},\{2,4,6\},\Omega,\}$，设$X(\omega) = \omega, \omega \in \Omega$，现问$X$是否是$\mathcal{F}$上的随机变量？
- $\{\omega, X(\omega) \le 1\} = \{1\} \notin \mathcal{F}$，所以$X$不是$\mathcal{F}$上的随机变量。
- 这样定义的随机变量$X$
$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega = 1, or\ 3, or\ 5 \\ 0 & \omega = 2, or\ 4, or\ 6 \end{cases}$$
是随机变量.

## 随机变量的例子

- 掷一枚骰子，则$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$，
$$\mathbb{P}(A_j)=\frac{1}{6}$$
其中$A_j$表示掷出$j$点，$1\le j\le 6$.
- $\mathcal{F}=\{\{1,3,5\},\{2,4,6\},\Omega,\}$，设$X(\omega)=\omega,\omega\in\Omega$，现问$X$是否是$\mathcal{F}$上的随机变量？
- $\{\omega,X(\omega)\le 1\}=\{1\}\notin\mathcal{F}$，所以$X$不是$\mathcal{F}$上的随机变量。
- 这样定义的随机变量$X$
$$X(\omega)=\begin{cases}1 & \omega=1, or\ 3, or\ 5\\ 0 & \omega=2, or\ 4, or\ 6\end{cases}$$
是随机变量.

**定义 1.4** 设 $X$ 是 $\mathcal{F}$ 上的随机变量. 对 $x \in \mathbb{R}$, 称

$$F(x) = \mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) \leq x\}) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

为随机变量 $X$ 的分布函数.

分布函数的性质

1. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, 且$\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$. (**规范性**)
2. 如果$x < y$, 则$F(x) \leq F(y)$. (**非降性**)
3. $F$是右连续性的. (**右连续性**)

**定义 1.5** 设 $X$ 为一随机变量，如果取值仅为有限个或可数个值，则称 $X$ 为离散型随机变量. 记其全部取值为$\{a_1, a_2, \ldots\}$, 则

$$p_i = \mathbb{P}(X = a_i), \quad i = 1, 2, \ldots$$

称为 $X$ 的概率质量函数.

- $p_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots$;
- $\sum_{i \geq 1} p_i = 1$.

| 可能值 | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $\cdots$ | $a_i$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 概率 | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $\cdots$ | $p_i$ | $\cdots$ |

Table 1: 分布表

## 例子

Consider $(\Omega, \mathcal{F}^*, \mathbb{P})$ and the r.v.

$$X(A) = \begin{cases} 0 & \text{if } A = \{TT\}, \\ 1 & \text{if } A = \{TH\} \text{ or } \{HT\}, \\ 2 & \text{if } A = \{HH\}. \end{cases}$$

The distribution function of $X$ is

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < 0, \\ (1-p)^2 & \text{if } 0 \leq x < 1, \\ 1 - p^2 & \text{if } 1 \leq x < 2, \\ 1 & \text{if } x \geq 2. \end{cases}$$

**定义 1.6** 一随机变量 $X$ 称为连续型随机变量，如果存在一个函数 $f$，满足以下的条件：

(1) 对所有的 $-\infty < x < \infty$，有 $f(x) \geq 0$;

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$;

(3) 对所有的 $-\infty < x < \infty$，有 $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

$f$ 称为 $X$ 的概率密度函数.

**正态分布** $\omega=(-\infty,\infty)$, 随机变量$X\in\mathbb{R}$, 如果随机变量$X$有密度函数 $f$,

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

则称随机变量$X$服从正态分布, 记为$X\sim N(\mu,\sigma^2)$.

**例 3.4 (股票价格)** 考虑一个股票价格模型：设 $(\Omega_3, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 为连续抛掷三次硬币的概率空间. 定义

$$S_0(\omega) = 4, \ \forall\, \omega \in \Omega_3$$

$$S_1(\omega) = \begin{cases} 8, & \omega_1 = H \\ 2, & \omega_1 = T \end{cases}$$

$$S_2(\omega) = \begin{cases} 16, & \omega_1 = \omega_2 = H \\ 4, & \omega_1 \neq \omega_2 \\ 1, & \omega_1 = \omega_2 = T. \end{cases}$$

$$S_3(\omega) = \begin{cases} 32, & \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = H \\ 8, & \omega_1, \omega_2, \omega_3 \text{ 其中有两个为 } H \\ 2, & \omega_1, \omega_2, \omega_3 \text{ 其中有一个为 } H \\ 1/2, & \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = T. \end{cases}$$

$S_0 = 4$

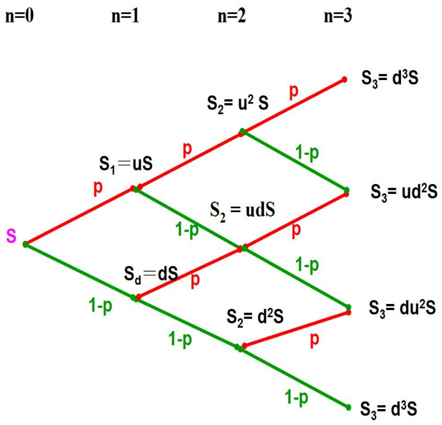



图. 股票价格的二叉树模型 (3-时段)

随机变量的函数 (满足一定的性质如连续性) 仍为随机变量.

**例 3.5 (期权收益)** 在上述股票价格的二叉树模型中, 到期日为 3 时段, 执行价格为 5 的欧式看涨期权, 其在时段 3 的收益记为 $V_3$. 则

$$V_3(\omega) = (S_3(\omega) - 5)_+ = \begin{cases} 27, & \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = H \\ 3, & \omega_1, \omega_2, \omega_3 \text{ 其中有两个为 } H \\ 0, & \omega_1, \omega_2, \omega_3 \text{ 其中有一个为 } H \\ 0, & \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = T. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V_3 = 27) &= p^3, \\ \mathbb{P}(V_3 = 3) &= 3p^2(1-p), \\ \mathbb{P}(V_3 = 0) &= 1 - p^2(3 - 2p). \end{aligned}$$

# 随机变量几乎处处等价

我们称随机变量$X$和$Y$几乎处处等价, 记为$X = Y, a.s.$, 如果

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \neq Y(\omega)\}) = 0,$$

等价地

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = Y(\omega)\}) = 1.$$

**例子** 考虑$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的随机变量$X$, $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F}$是其上的$\sigma$代数, $\mathbb{P}$是$[0,1]$上的Lesbegue测度, 定义$X(\omega) = \omega$,

$$Y(\omega) = \begin{cases} \omega & if \;\; \omega \neq \frac{1}{2} \\ 2 & if \;\; \omega = \frac{1}{2} \end{cases}$$

则有

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \neq Y(\omega)\}) = \mathbb{P}(\{\frac{1}{2}\}) = 0.$$

# 随机事件的独立性

- 称事件$A_1$和事件$A_2$是**独立的**，如果

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2).$$

- 称事件族$\{A_i, i \in \mathcal{I}\}$**相互独立的**，如果

$$\mathbb{P}(\bigcap_{i \in \mathcal{J}} A_i) = \prod_{i \in \mathcal{J}} \mathbb{P}(A_i)$$

对任何有限集$\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$都成立。

- $\Omega = \Big\{\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n); , \omega_i \text{ is } -1 \text{ or } 1 \text{ for each } i\Big\}$;
- $\mathcal{F}$ is the collection of all subsets of $\Omega$;
- Want: (i) market movement in different periods to be independent.
  (ii) Fix $0 < p < 1$. Probability of $\omega_i = 1$ ("up") for each $i$ equals $p$.

$q = 1 - p$.

Thus $\mathbf{P}\Big(\{\omega; \omega_i = x_i\}\Big) = q^{(1-x_i)/2} p^{(1+x_i)/2}$, and

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\Big(\{\omega = (x_1, \ldots, x_n)\}\Big) &= \prod_1^n \mathbf{P}\Big(\{\omega_i = x_i\}\Big) = \prod_1^n q^{(1-x_i)/2} p^{(1+x_i)/2} \\
&= q^{(1/2)\sum_1^n (1-x_i)} p^{(1/2)\sum_1^n (1+x_i)}
\end{aligned}$$

For any $A \subset \Omega$,

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{(\omega_1, \ldots, \omega_n) \in A} q^{(1/2)\sum_1^n (1-\omega_i)} p^{(1/2)\sum_1^n (1+\omega_i)}$$

This is a probability model for independent movements in each period of a multi-period, binomial model.

Note: In the formula

$$\mathbf{P}\Big(\{(\omega_1,\ldots,\omega_n)\}\Big) = q^{(1/2)\sum_1^n(1-\omega_i)}p^{(1/2)\sum_1^n(1+\omega_i)}$$

$$N(\omega) = \frac{1}{2}\sum_1^n(1+\omega_i) = \text{ number of 1's in } (\omega_1,\ldots,\omega_n)$$

$$n - N(\omega) = \frac{1}{2}\sum_1^n(1-\omega_i) = \text{ number of } -1\text{'s in } (\omega_1,\ldots,\omega_n)$$

Can write instead $\mathbf{P}\Big(\{(\omega_1,\ldots,\omega_n)\}\Big) = q^{n-N(\omega)}p^{N(\omega)}$