金融随机分析

第四章 美式及奇异期权的二叉树定价

陈昱

cyu@ustc.edu.cn

管理科研楼 1003

63602243

2019 年 5 月

Outline

第四章 美式及奇异期权的二叉树定价

回顾 N-时段二叉树定价

- 交易时间: $\{0, h, 2h, \ldots, Nh\}$
  - $T = Nh$ 是到期日, h 时间间隔.
- 固定的下降和上升比例: $d < e^{(r-\delta)h} < u$
- 在时刻 nh, 有 $n+1$ 种状态可能 (states of nature)

$$\{u^n,\ u^{n-1}d,\ u^{n-2}d^2, \ldots, ud^{n-1},\ d^n\}$$

- 在时刻 nh 于状态 $u^m d^{n-m}$ 的 股票价格

$$S(nh, u^m d^{n-m}) = u^m d^{n-m} S(0),$$

$0 \leq m \leq n \leq N.$

♠ 美式期权价格可从到期日到时刻 0 递归地倒退得到.

- 到期日, 于状态 ω 的美式看涨期权价格为

$$X(T,\omega) = [S(T,\omega) - K]_+ .$$

- 在时刻 nh, 于状态 ω 的美式看涨期权价格为

$$X(nh,\omega) = \max \left\{ \begin{array}{l} S(nh,\omega) - K, \\ e^{-rh}\left[q_u X((n+1)h,\omega u) + q_d X((n+1)h,\omega d)\right] \end{array} \right\}$$

♠ 美式期权价格可从到期日到时刻 0 递归地倒退得到.

- 在到期日 T, 于状态 ω 的美式看跌期权价格为

$$X(T,\omega) = [K - S(T,\omega)]_+$$

- 在时刻 nh, 于状态 ω 的美式看跌期权价格为

$$X(nh,\omega) = \max \left\{ \begin{array}{l} K - S(nh,\omega), \\ e^{-rh}\left[q_u X((n+1)h,\omega u) + q_d X((n+1)h,\omega d)\right] \end{array} \right\}$$

美式期权二叉树定价的过程

1. 构造股票的 N-时段二叉树.

$$S(nh, u^m d^{n-m}) = u^m d^{n-m} S(0), \quad 0 \le m \le n \le N.$$

2. 确定美式期权在到期日所有状态下的价值.
3. 对每一个时期确定风险中性测度

$$q_u = \frac{e^{(r-\delta)h} - d}{u-d} \text{ 和 } q_d = \frac{u - e^{(r-\delta)h}}{u-d}$$

4. 利用风险中性定价公式, 向前递归地计算

$$X(Nh) \Rightarrow X((N-1)h) \Rightarrow \cdots \Rightarrow X(h) \Rightarrow X(0)$$

在每一个节点, 你需要去确定是否行权.

欧式 v.s. 美式

前三步相同:

1. 构造股票的 N-时段二叉树.
2. 确定美式期权在到期日所有状态下的价值.
3. 对每一个时期确定风险中性测度 (相同的公式).

最后一步不相同:

- 欧式期权: 利用风险中性定价公式直接计算 $X(0)$.
- 美式期权: 向前递归地求出$X(0)$. 每个节点需决定是否行权.

例 4.1 (简单期权定价) 设 $S(0)=K=40$, $r=8\%$, $\sigma=30\%$, $\delta=0$, $N=2$ 和 $T=0.5$. 利用**二叉树** 计算欧式和美式看跌期权的价格

解: 上涨比例

$$u=e^{(r-\delta)h+\sigma\sqrt{h}}=1.1853 \text{ 和 } d=e^{(r-\delta)h-\sigma\sqrt{h}}=0.8781.$$

股票价格为

$$\begin{aligned} S(h,u) &= 47.412 \text{ 和 } S(h,d)=35.124 \\ S(2h,uu) &= 56.197,\ S(2h,ud)=41.632 \text{ 和 } S(2h,dd)=30.842. \end{aligned}$$

单时段风险中性测度为

$$q_u=\frac{e^{(r-\delta)h}-d}{u-d}=0.4626 \text{ 和 } q_d=0.5374.$$

由风险中性定价公式，欧式看跌期权的价格为

$$P_E(0) = e^{-0.08/2}(q_d^2 \times 9.158) = 2.541.$$

由递归公式，美式看跌期权的价格为

$$P_A(0) = 2.568.$$

例 4.2 (简单期权定价) 考虑一个三时段的平值美式看跌期权, 每个时间段是一年.

- $r = 10\%$ 和 $\delta = 6.5\%$, $S(0) = 300$
- $u = 1.25$ 和 $d = 0.7$

确定看跌期权价格

解: 单时段的风险中性测度为

$$q_u = \frac{e^{0.1-0.065} - 0.7}{1.25 - 0.7} = 0.61022 \text{ 和 } q_d = 0.38978.$$

由递归算法, 在时刻 0, 美式看跌期权的价格是

$$P_A(0) = 39.7263.$$

Outline

§ 4.2 奇异期权 (Exotic options)

- 奇异期权是收益比简单期权更复杂的期权.
- 奇异期权的收益不仅依赖于到期日的股票价格, 还依赖于股票价格的路径.
- 一些常见的奇异期权(收益不同!):
  - 亚式期权 (Asian options)
  - 回望期权 (Lookback options)
  - 全零期权 (All-or-nothing options)
  - 障碍期权 (Barrier options)
  - Gap options
  - Compound options

亚式期权 (Asian options)

- 算术平均价格: $A(T)=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}S(nh)$
- 几何平均价格: $G(T)=\left(\prod_{n=1}^{N}S(nh)\right)^{1/N}$
- **亚式期权的收益** (以 $A(T)$ 为例):

$$
\begin{aligned}
\text{固定行权价看涨期权收益} &= [A(T)-K]_+\\
\text{固定行权价看跌期权收益} &= [K-A(T)]_+\\
\text{浮动行权价看涨期权收益} &= [S(T)-A(T)]_+\\
\text{浮动行权价看跌期权收益} &= [A(T)-S(T)]_+
\end{aligned}
$$

回望期权 (Lookback options)

$$
\begin{aligned}
\text{固定行权价看涨期权收益} &= \left(\max_{0\le t\le T} S(t) - K\right)_+ \\
\text{固定行权价看跌期权收益} &= \left(K - \min_{0\le t\le T} S(t)\right)_+ \\
\text{浮动行权价看涨期权收益} &= S(T) - \min_{0\le t\le T} S(t) \\
\text{浮动行权价看跌期权收益} &= \max_{0\le t\le T} S(t) - S(T)
\end{aligned}
$$

Outline

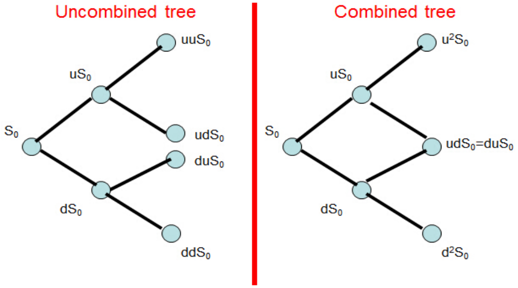
第四章 美式及奇异期权的二叉树定价

4.3.1 无合并二叉树

由于奇异期权的收益是路径依赖的，我们需要利用无合并二叉树来定价奇异期权.

- 于时间 nh, 无合并二叉树有 2^n 个节点 (状态)
- e.g., 于时间 $2h$ 无合并二叉树有 4 个节点 (状态):

$$\Omega_{2h} = \{uu, ud, du, dd\}.$$



4.3.2 奇异欧式期权二叉树定价过程

1. 构造股票价格的 N-时段无合并二叉树.

$$S(nh, u^m d^{n-m}) = u^m d^{n-m} S(0), \quad 0 \le m \le n \le N.$$

2. 确定奇异期权在到期日所有状态下的价值 $X(T)$.
3. 对每一个时期确定风险中性测度

$$q_u = \frac{e^{(r-\delta)h} - d}{u - d} \text{ 和 } q_d = \frac{u - e^{(r-\delta)h}}{u - d}$$

4. 用下式计算欧式期权价格

$$X(0) = e^{-rT} \sum_{\omega \in \Omega_T} \mathbb{Q}\{\omega\} X(T, \omega),$$

其中 Ω_T 指到期日的所有状态组成的集合(有 2^N 个元素).

4.3.2 奇异美式期权二叉树定价过程

1. 构造股票价格的 N-时段无合并二叉树.
2. 确定奇异期权在到期日所有状态下的价值 $X(T)$.
3. 对每一个时期计算风险中性测度

$$q_u = \frac{e^{(r-\delta)h} - d}{u - d} \text{ 和 } q_d = \frac{u - e^{(r-\delta)h}}{u - d}$$

4. 利用风险中性定价公式

$$X(nh, \omega) = \max \left\{ \begin{array}{l} \text{在时刻 } nh \text{ 的收益,} \\ e^{-rh}[q_u X((n+1)h, \omega u) + q_d X((n+1)h, \omega d)] \end{array} \right\}$$

向前递归地计算

$$X(Nh) \Rightarrow X((N-1)h) \Rightarrow \cdots \Rightarrow X(h) \Rightarrow X(0).$$

总结

欧式简单期权:	合并树	直接计算
美式简单期权:	合并树	递归计算
欧式奇异期权:	无合并树	直接计算
美式奇异期权:	无合并树	递归计算

例 3.1 (奇异期权定价) 假定 $S(0)=100=K$, $r=8\%$, $\delta=0\%$, $u=1.2$, $d=0.8$, $T=2$ 和 $h=1$. 确定欧式亚式看涨期权价格, 其在到期日时的收益为

$$C_E(2)=\left(\frac{S(1)+S(2)}{2}-100\right)_+.$$

解: 单时段的风险中性测度为

$$q_u=\frac{e^{0.08}-0.8}{1.2-0.8}=0.7082 \text{ 和 } q_d=0.2918.$$

欧式亚式看涨期权价格为

$$C_E(0)=e^{-0.08\times 2}\left(32q_u^2+8q_uq_d\right)=15.0853.$$

例 3.1 (奇异期权定价) 设 $S(0)=100=K$, $r=8\%$, $\delta=0\%$, $u=1.2$, $d=0.8$, $T=2$ 和 $h=1$.确定美式亚式看涨期权价格, 其在时刻 n 时的收益为

$$C_A(n)=\left(\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}S(m)-100\right)_+,\quad n=1,2.$$

解: 单时段的风险中性测度为

$$q_u=\frac{e^{0.08}-0.8}{1.2-0.8}=0.7082 \text{ 和 } q_d=0.2918$$

由递归公式, 美式亚式看涨期权价格为

$$C_A(0)=15.0853.$$

定义 4.3.1 在N阶二叉树模型中，停时τ是一个随机变量，取值为$0, 1, \ldots, N, \infty$，满足如果$\tau(\omega_1 \cdots \omega_n \omega_{n+1} \cdots \omega_N) = n$ 只与前n次掷硬币的结果$\mathcal{F}_n$有关.

定理 4.3.2 将一个鞅停止于停时得到的停止过程仍然是一个鞅。将一个上鞅(下鞅)停止于停时仍是一个上鞅(下鞅).

定理 4.3.3 设X_n, $n = 0, 1, \ldots, N$为一个下鞅, τ 是一个停时，则$\mathbb{E}[X_{n\wedge\tau}] \leq \mathbb{E}[X_n]$. 设$X_n, n = 0, 1, \ldots, N$为一个上鞅，$\tau$是一个停时，则$\mathbb{E}[X_{n\wedge\tau}] \geq \mathbb{E}[X_n]$.

定义 4.4.1 对每一个$n = 0, 1, \ldots, N$, 设G_n是依赖于前n次抛掷硬币结果的随机变量。具有内在价值过程G_n的美式衍生证券是一个合约，它可以在时刻N之前的任何时刻（包括N）被实施，并且如果在时刻n被实施，支付为G_n. 我们通过以下美式风险中性定价公式来定价这一合约的价格过程：

$$V_n = \max_{\tau \in \varphi_n} \tilde{\mathbb{E}}_n \left[I_{(\tau \leq N)} \frac{1}{(1+r)^{\tau - n}} G_\tau \right].$$

其中φ_n表示取值在$\{n, n+1, \cdots, N, \infty\}$中所有停时$\tau$的集合。

定理 4.4.2 由定义4.4.1给出的美式衍生证券价格过程具有以下性质：

- (1) 对所有的n, $V_n \geq \max\{G_n, 0\}$;
- (2) 贴现过程$\frac{1}{(1+r)^n} V_n$是个上鞅；
- (3) 如果另有一个过程Y_n, 满足：$Y_n \geq \max\{G_n, 0\}$ 且$\frac{1}{(1+r)^n} Y_n$是个上鞅，则对所有的n, $Y_n \geq V_n$.

性质（3）还可表述为：V_n是满足性质（1）（2）的最小过程。

定理 4.4.3 由定义4.4.1给出的美式衍生证券价格过程，我们有如下的美式定价算法：

$$
\begin{aligned}
V_N(\omega_1\cdots\omega_N) &= \max\{G_N(\omega_1\cdots\omega_N),0\} \\
V_n(\omega_1\cdots\omega_n) &= \max\{G_n(\omega_1\cdots\omega_n),\frac{1}{1+r}\tilde{\mathbb{E}}_n V_{n+1}\}, \\
n &= N-1,\ldots,0.
\end{aligned}
$$

定理 4.1 (欧式) 考虑一 N-时段二叉树模型，其中$d < 1 + r < u$，定义对应的风险中性测度 q_u 和 q_d. 设 V_N 是一个随机变量 (某衍生品在 Nh 的支付)，其取决于前N 次抛掷硬币结果 $\omega_1 \cdots \omega_N$，由

$$V_n(\omega_1 \cdots \omega_n) = \frac{1}{r+1}\left[q_u V_{n+1}(\omega_1 \cdots \omega_n H) + q_d V_{n+1}(\omega_1 \cdots \omega_n T)\right]$$

按时间倒向递归定义随机变量 $V_{N-1}, \ldots, V_1, V_0$. 并令

$$\Delta_n(\omega_1 \cdots \omega_n) = \frac{V_{n+1}(\omega_1 \cdots \omega_n H) - V_{n+1}(\omega_1 \cdots \omega_n T)}{S_{n+1}(\omega_1 \cdots \omega_n H) - S_{n+1}(\omega_1 \cdots \omega_n T)}$$

和

$$X_{n+1} = \Delta_n S_{n+1} + (1+r)(X_0 - \Delta_n S_n).$$

则有

$$X_N(\omega_1 \cdots \omega_N) = V_N(\omega_1 \cdots \omega_N) \ \forall\, \omega_1 \cdots \omega_N.$$

定理 4.2 (美式) 考虑 N 时段二叉树模型，其中 $d < 1 + r < u$，风险中性测度 q_u 和 q_d. 设 G_n, $n = 0, 1, \ldots, N$, 某期权在时刻 Nh 行权的收益，其取决于前 n 次抛掷硬币结果 $\omega_1 \cdots \omega_n$, V_n 是对应美式期权在时刻 n 的价格，有

$$V_n(\omega_{1:n}) = \max\left\{G_n, \frac{1}{r+1}\left[q_u V_{n+1}(\omega_{1:n}H) + q_d V_{n+1}(\omega_{1:n}T)\right]\right\}$$

按时间倒向递归定义随机变量 $V_{N-1}, \ldots, V_1, V_0$. 并令

$$\Delta_n(\omega_1 \cdots \omega_n) = \frac{V_{n+1}(\omega_1 \cdots \omega_n H) - V_{n+1}(\omega_1 \cdots \omega_n T)}{S_{n+1}(\omega_1 \cdots \omega_n H) - S_{n+1}(\omega_1 \cdots \omega_n T)}$$

和

$$C_n(\omega_{1:n}) = V_n(\omega_{1:n}) - \frac{1}{r+1}\left[q_u V_{n+1}(\omega_{1:n}H) + q_d V_{n+1}(\omega_{1:n}T)\right] \geq 0$$

$$X_{n+1} = \Delta_n S_{n+1} + (1+r)(X_n - C_n - \Delta_n S_n).$$

则有

$$X_n(\omega_1 \cdots \omega_n) = V_n(\omega_1 \cdots \omega_n) \ \forall\, \omega_1 \cdots \omega_n.$$

例 3.1 考虑一 N-时段模型, $h=1$, $S(0)=4$, $u=2$, $d=1/2$, 简单利率 $r=1/4$. 求下列回望期权价格.

$$V_3=\max_{0\le n\le 3} S_n - S_3.$$

解: 由 $r=1/4$, 知单时段的风险中性测度为

$$q_u=q_d=\frac{1}{2}.$$

则

$$V_0=\left(\frac{4}{5}\right)^3\times\frac{1}{8}\left(8+6+2+2+\frac{7}{2}\right)=1.376.$$