金融随机分析

风险中性定价

陈昱

cyu@ustc.edu.cn

管理科研楼 1003

63602243

2019 年 5 月

第九章　风险中性定价

9.1 测度变换

9.2 单个布朗运动的 Girsanov 定理

9.3 风险中性测度定价

9.4 鞅表示定理与复制资产组合的存在性

Theorem (定理 9.1)

设 $Z \geq 0$ 是 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的随机变量且 $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z] = 1$. 定义

$$\mathbb{Q}(A) = \int_A Z \mathrm{d}\mathbb{P} \quad \text{对任意的 } A \in \mathcal{F}.$$

1. $\mathbb{Q}$ 是 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的概率测度.
2. 对任一随机变量 X,
$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[XZ].$$
3. 如果 $Z > 0$ a.s., 则
$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[X] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{X}{Z}\right].$$

这里, Z 称作 of $\mathbb{Q}$ 关于 $\mathbb{P}$ 的 Radon-Nikodym 导数.

证明思想:

1. 首先, $\mathbb{Q}\{\Omega\} = \int_\Omega Z d\mathbb{P} = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z] = 1$. 考察可加性: $\mathbb{Q}\{\cup_{i=1}^{\infty} A_i\} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{Q}\{A_i\}$, 其中 $\{A_i : A_i \in \mathcal{F}, i \in \mathbb{N}\}$ 不相交.

2. 设 $X = 1_A$, 有

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X] &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[1_A] = \mathbb{Q}\{A\} = \int_A Z d\mathbb{P} \\
&= \int_\Omega 1_A Z d\mathbb{P} = \int_\Omega XZ d\mathbb{P} \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[XZ].
\end{aligned}
$$

再利用标准方法将其推广到一般的随机变量 X.

3. 对 $Z > 0$ a.s., 在 (2) 中用 $\frac{X}{Z}$ 取代 X.

Radon-Nikodym 导数

- 由定义 $\mathbb{Q}(A) = \int_A Z \mathrm{d}\mathbb{P}$, 我们有(不严谨)

$$\mathrm{d}\mathbb{Q} = Z \mathrm{d}\mathbb{P}$$

和 Radon-Nikodym 导数

$$Z = \frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}$$

- 则我们有

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X] = \int_\Omega X \mathrm{d}\mathbb{Q} = \int_\Omega XZ \mathrm{d}\mathbb{P} = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[XZ]$$

且如果 $Z > 0$ a.s.,

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Y] = \int_\Omega Y \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_\Omega \frac{Y}{Z} \mathrm{d}\mathbb{Q} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{Y}{Z}\right].$$

Definition (等价测度)

设 $\mathbb{P}$ 和 $\mathbb{Q}$ 是$(\Omega, \mathcal{F})$ 上的两个概率测度. $\mathbb{P}$ 和 $\mathbb{Q}$ 称作是等价的, 如果他们在$\mathcal{F}$ 的零测集上是一致的.

如果 $Z = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} > 0$ a.s., 则 $\mathbb{P}$ 和 $\mathbb{Q}$ 是等价的.

- 如果 $\mathbb{P}\{A\} = 0$ 对某 $A \in \mathcal{F}$, 我们有

$$\mathbb{Q}\{A\} = \int_A Z d\mathbb{P} = 0$$

- 如果 $\mathbb{Q}\{B\} = 0$ 对某 $B \in \mathcal{F}$, 则 $\frac{1_B}{Z} = 0$ a.s. $\mathbb{Q}$. 因此

$$\mathbb{P}\{B\} = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[1_B] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{1_B}{Z}\right] = 0.$$

例9.1 (测度变换) 设 X 是 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的一个标准正态随机变量. 定义 $Y := X + \theta$, 其中 θ 为某常数. 在 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上求一个新的测度 $\mathbb{Q}$ 使得 Y 在 $\mathbb{Q}$ 下服从标准正态分布.

解: 定义 $Z = e^{-\theta X - \frac{1}{2}\theta^2}$. 易见
1) $Z > 0$ a.s.
2) $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z] = \int_{\mathbb{R}} e^{-\theta x - \frac{1}{2}\theta^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+\theta)^2}{2}} \mathrm{d}x = 1.$

我们定义新的测度为

$$\mathbb{Q}(A) := \int_A Z \mathrm{d}\mathbb{P} \quad \text{对任意的 } A \in \mathcal{F}.$$

则我们有 Y 在 $\mathbb{Q}$ 下服从标准正态分布.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{Q}(Y \le a) &= \int_{\{Y\le a\}} \mathrm{d}\mathbb{Q} = \int_{\{Y\le a\}} Z \mathrm{d}\mathbb{P} \\
&= \int_{\{X\le a-\theta\}} e^{-\theta X-\frac{1}{2}\theta^2} \mathrm{d}\mathbb{P} \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[e^{-\theta X-\frac{1}{2}\theta^2} 1_{\{X\le a-\theta\}}\right] \\
&= \int_{-\infty}^{a-\theta} e^{-\theta x-\frac{1}{2}\theta^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{a-\theta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+\theta)^2}{2}} \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

因此，Y 在 $\mathbb{Q}$ 下服从标准正态分布.

Outline

第十章　风险中性定价

9.1 测度变换

9.2 单个布朗运动的 Girsanov 定理

9.3 风险中性测度定价

9.4 鞅表示定理与复制资产组合的存在性

Definition (Radon-Nikodym 导数过程)

设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 是一个概率空间, $\{\mathcal{F}(t)\}_{0\le t\le T}$ 是一个域流, 即 $\mathcal{F}(t)$ 是一个 σ-域, 且

$$\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t), \quad s < t.$$

设 $Z > 0$ a.s. 且 $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z] = 1$.

则我们称

$$Z(t) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z|\mathcal{F}(t)], \quad 0 \le t \le T.$$

为 Radon-Nikodym 导数过程.

Lemma (引理 9.1 Radon-Nikodym 导数过程性质)

Radon-Nikodym 导数过程 $Z(t)$ 有如下性质, 对 $0 \le s \le t \le T$,

1) $Z(t)$ 是 $\mathbb{P}$-鞅.

2) $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[Y] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[YZ(t)]$, 如果 Y 是 $\mathcal{F}(t)$-可测的.

3) $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[Y|\mathcal{F}(s)] = \frac{1}{Z(s)}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[YZ(t)|\mathcal{F}(s)]$, 如果 Y 是 $\mathcal{F}(t)$-可测的.

证明: 1) 对 $0 \le s \le t \le T$,

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z(t)|\mathcal{F}(s)] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z|\mathcal{F}(t)]\,|\mathcal{F}(s)\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z|\mathcal{F}(s)] = Z(s)$$

2) 对任意的 $\mathcal{F}(t)$-可测的随机变量 Y,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[Y] &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[YZ] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[YZ|\mathcal{F}(t)]\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[Y\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z|\mathcal{F}(t)]\right] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[YZ(t)].\end{aligned}$$

3) 对任意 $\mathcal{F}(t)$-可测的 Y, 利用条件期望的定义有

- $\frac{1}{Z(s)}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[YZ(t)|\mathcal{F}(s)\right]$ 是 $\mathcal{F}(s)$-可测的.
- $\int_A \frac{1}{Z(s)}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[YZ(t)|\mathcal{F}(s)\right]\mathrm{d}\mathbb{Q} = \int_A Y\mathrm{d}\mathbb{Q}$ 对任意的 $A \in \mathcal{F}(s)$.

$$
\begin{aligned}
& \int_A \frac{1}{Z(s)}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[YZ(t)|\mathcal{F}(s)\right]\mathrm{d}\mathbb{Q} \\
= \ & \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[1_A\frac{1}{Z(s)}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[YZ(t)|\mathcal{F}(s)\right]\right] \\
= \ & \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[1_A\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[YZ(t)|\mathcal{F}(s)\right]\right], \text{ by (2)} \\
= \ & \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[1_A YZ(t)|\mathcal{F}(s)\right]\right], \text{ by } A \in \mathcal{F}(s) \\
= \ & \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[1_A YZ(t)\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[1_A Y\right], \text{ by (2)} \\
= \ & \int_A Y\mathrm{d}\mathbb{Q}.
\end{aligned}
$$

Theorem (定理 9.2 单个布朗运动的 Girsanov 定理)

设 $\{W(t)\}_{0\le t\le T}$ 是 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上的布朗运动且 $\{\mathcal{F}(t)\}_{0\le t\le T}$ 是此布朗运动的域流. 设 $\{\theta(t)\}_{0\le t\le T}$ 是适应过程. 定义

$$\begin{aligned} Z(t) &= \exp\left\{-\int_0^t \theta(s)\mathrm{d}W(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \theta^2(s)\mathrm{d}s\right\} \\ W^{\mathbb{Q}}(t) &= W(t) + \int_0^t \theta(s)\mathrm{d}s \end{aligned}$$

使得 $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\int_0^T \theta^2(s)Z^2(s)\mathrm{d}s\right] < \infty$. 则

1. $\{Z(t)\}_{0\le t\le T}$ 是 $\mathbb{P}$- 鞅.
2. $\{W^{\mathbb{Q}}(t)\}_{0\le t\le T}$ 在 $\mathbb{Q}$ 是布朗运动, 其中 $\mathrm{d}\mathbb{Q} = Z(T)\mathrm{d}\mathbb{P}$.

证明

- 由 Ito 公式,

$$
\begin{aligned}
dZ(t) &= Z(t)\left(-\theta(t)\mathrm{d}W(t) - \frac{1}{2}\theta^2(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\theta^2(t)\mathrm{d}t\right) \\
&= -\theta(t)Z(t)\mathrm{d}W(t).
\end{aligned}
$$

由 $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\int_0^T \theta^2(s)Z^2(s)\mathrm{d}W(s)\right] < \infty$, 我们得到

$$
Z(t) = 1 - \int_0^t \theta(s)Z(s)\mathrm{d}W(s), \quad 0 \le t \le T
$$

是一个 Ito 过程, 无漂移项 (没有 $\mathrm{d}t$ 这一项), 故为 $\mathbb{P}$-鞅.

- 特别地 $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z(T)] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z(0)] = 1$.

回顾 $W^{\mathbb{Q}}(t) = W(t) + \int_0^t \theta(s)\mathrm{d}s$. 我们利用 Levy's 刻画定理证明其是 $\mathbb{Q}$-布朗运动.

1) $W^{\mathbb{Q}}(0) = 0$.

2) $W^{\mathbb{Q}}(t)$ 有连续路径

3) 二次变差为

$$\left(\mathrm{d}W^{\mathbb{Q}}(t)\right)^2 = (\mathrm{d}W(t) + \theta(t)\mathrm{d}t)^2 = \mathrm{d}t$$

4) 我们需要证明 $W^{\mathbb{Q}}(t)$ 是 $\mathbb{Q}$-鞅.

首先,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\left(W^{\mathbb{Q}}(t)Z(t)\right) &= Z(t)\mathrm{d}W^{\mathbb{Q}}(t) + W^{\mathbb{Q}}(t)\mathrm{d}Z(t) + \mathrm{d}W^{\mathbb{Q}}(t)\mathrm{d}Z(t) \\
&= Z(t)\left[\mathrm{d}W(t) + \theta(t)\mathrm{d}t\right] - W^{\mathbb{Q}}(t)\theta(t)Z(t)\mathrm{d}W(t) \\
&\quad - \left[\mathrm{d}W(t) + \theta(t)\mathrm{d}t\right]\theta(t)Z(t)\mathrm{d}W(t) \\
&= \left[1 - \theta(t)W^{\mathbb{Q}}(t)\right] Z(t)\mathrm{d}W(t).
\end{aligned}
$$

故 $W^{\mathbb{Q}}(t)Z(t)$ 是 $\mathbb{P}$-鞅.

则, 对 $0 \le s \le t \le T$, 由引理的 3),

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[W^{\mathbb{Q}}(t)|\mathcal{F}(s)\right] &= \frac{1}{Z(s)}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[W^{\mathbb{Q}}(t)Z(t)|\mathcal{F}(s)\right] \\
&= \frac{1}{Z(s)}W^{\mathbb{Q}}(s)Z(s) \\
&= W^{\mathbb{Q}}(s). \qquad \square
\end{aligned}
$$

Outline

第十章　风险中性定价

9.1　测度变换

9.2　单个布朗运动的 Girsanov 定理

9.3　风险中性测度定价

9.4　鞅表示定理与复制资产组合的存在性

设 $\{W(t)\}_{0\le t\le T}$ 是 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上的布朗运动且 $\{\mathcal{F}(t)\}_{0\le t\le T}$ 为此布朗运动的域流.

- 一个适应的**利率过程** $R(t)$.
- **折现过程** $D(t)=e^{-\int_0^t R(s)\mathrm{d}s}$ 满足

$$\mathrm{d}D(t)=-R(t)D(t)\mathrm{d}t.$$

- **股票价格过程**
  $S(t)=S(0)\exp\left\{\int_0^t\left(\alpha(s)-\frac{\sigma^2(s)}{2}\right)\mathrm{d}s+\int_0^t\sigma(s)\mathrm{d}W(s)\right\}$
  满足

$$\mathrm{d}S(t)=\alpha(t)S(t)\mathrm{d}t+\sigma(t)S(t)\mathrm{d}W(t),$$

  其中 $\alpha(t)$ 和 $\sigma(t)$ 是适应过程, $\sigma(t)>0$ a.s.

Definition (定义 9.2 风险中性测度)

$\mathbb{Q}$ 称作是*风险中性测度*如果其等价于 $\mathbb{P}$ 且折现的股票价格过程 $D(t)S(t)$ 是 $\mathbb{Q}$-鞅.

如果找到 $\mathbb{Q}$？ Girsanov 定理!

由

$$\begin{aligned} d(D(t)S(t)) &= S(t)dD(t) + D(t)dS(t) + dS(t)dD(t) \\ &= \sigma(t)D(t)S(t)\left[\frac{\alpha(t)-R(t)}{\sigma(t)}dt + dW(t)\right], \end{aligned}$$

我们只需要找到 $\mathbb{Q}$ 使得

$$W^{\mathbb{Q}}(t) := W(t) + \int_0^t \frac{\alpha(s)-R(s)}{\sigma(s)}ds.$$

是 $\mathbb{Q}$-布朗运动.

Definition (定义 9.2 风险中性测度)

$\mathbb{Q}$ 称作是*风险中性测度*如果其等价于 $\mathbb{P}$ 且折现的股票价格过程 $D(t)S(t)$ 是 $\mathbb{Q}$-鞅.

如果找到 $\mathbb{Q}$？ Girsanov 定理!

由

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\left(D(t)S(t)\right) &= S(t)\mathrm{d}D(t) + D(t)\mathrm{d}S(t) + \mathrm{d}S(t)\mathrm{d}D(t) \\ &= \sigma(t)D(t)S(t)\left[\frac{\alpha(t)-R(t)}{\sigma(t)}\mathrm{d}t + \mathrm{d}W(t)\right], \end{aligned}$$

我们只需要找到 $\mathbb{Q}$ 使得

$$W^{\mathbb{Q}}(t) := W(t) + \int_0^t \frac{\alpha(s)-R(s)}{\sigma(s)}\mathrm{d}s.$$

是 $\mathbb{Q}$-布朗运动.

- 由 Girsanov 定理, $\theta(t)=\frac{\alpha(t)-R(t)}{\sigma(t)}$, 风险中性测度 $\mathbb{Q}$ 由 Radon-Nikodym 导数定义(关于 $\mathbb{P}$).

$$Z=\exp\left\{-\int_0^T\frac{\alpha(t)-R(t)}{\sigma(t)}\mathrm{d}W(t)-\frac{1}{2}\int_0^T\left(\frac{\alpha(t)-R(t)}{\sigma(t)}\right)^2\mathrm{d}t\right\}.$$

或等价地,

$$\mathrm{d}\mathbb{Q}=Z\mathrm{d}\mathbb{P}.$$

- 由 $\mathrm{d}W^{\mathbb{Q}}(t)=\mathrm{d}W(t)+\frac{\alpha(t)-R(t)}{\sigma(t)}\mathrm{d}t$, 我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}S(t)&=\alpha(t)S(t)\mathrm{d}t+\sigma(t)S(t)\mathrm{d}W(t)\\&=R(t)S(t)\mathrm{d}t+\sigma(t)S(t)\mathrm{d}W^{\mathbb{Q}}(t)\end{aligned}$$

和

$$\mathrm{d}\left(D(t)S(t)\right)=\sigma(t)D(t)S(t)\mathrm{d}W^{\mathbb{Q}}(t)$$

Theorem (定理 9.3)

在风险中性测度 $\mathbb{Q}$ 下, 折现的自筹资金资产组合价格过程 $D(t)V(t)$ 是 $\mathbb{Q}$-鞅.

证明: 设 $\Delta(t)$ 是在时刻 t 持有的股票份额. 考虑投资组合

$$V(t) = \Delta(t)S(t) + (V(t) - \Delta(t)S(t))\,R(t).$$

由自筹资金的性质, 易得

$$\begin{aligned} \mathrm{d}V(t) &= \Delta(t)\mathrm{d}S(t) + (V(t) - \Delta(t)S(t))\,R(t)\mathrm{d}t \\ &= V(t)R(t)\mathrm{d}t + \Delta(t)S(t)\sigma(t)\mathrm{d}W^{\mathbb{Q}}(t) \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\,(D(t)V(t)) &= V(t)\mathrm{d}D(t) + D(t)\mathrm{d}V(t) + \mathrm{d}D(t)\mathrm{d}V(t) \\ &= \Delta(t)\sigma(t)D(t)S(t)\mathrm{d}W^{\mathbb{Q}}(t) \end{aligned}$$

- 设 $X(T)$ 是 $\mathcal{F}(T)$-可测的随机变量，表示某欧式衍生品在到期日 T 的收益.
- 我们想求出 $X(0)$ (定价) 和自筹资金交易策略 $\{\Delta(t)\}_{0\le t\le T}$ (对冲) 使得
$$X(T) = V(T) \text{ a.s.}$$
- 一旦求得 $\{\Delta(t)\}_{0\le t\le T}$，我们定义$X(t) := V(t)$. 由 $D(t)V(t)$ 是 $\mathbb{Q}$-鞅,
$$\begin{aligned} D(t)X(t) &= D(t)V(t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[D(T)V(T)|\mathcal{F}(t)\right] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[D(T)X(T)|\mathcal{F}(t)\right]. \end{aligned}$$
- 因此，我们得到风险中性测度定价公式
$$X(t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T R(s)\mathrm{d}s}X(T)\middle|\mathcal{F}(t)\right].$$

考虑在 Black-Scholes 框架下.

- 利率 $r > 0$ 为常数且折现过程 $D(t) = e^{-rt}$ 满足

$$\mathrm{d}D(t) = -rD(t)\mathrm{d}t.$$

- 股票价格过程 $S(t) = S(0)e^{\left(\alpha-\sigma^2/2\right)t+\sigma W(t)}$ 满足

$$\mathrm{d}S(t) = \alpha S(t)\mathrm{d}t + \sigma S(t)\mathrm{d}W(t).$$

- 设 $\mathbb{Q}$ 是风险中性测度满足

$$W^{\mathbb{Q}}(t) = W(t) + \frac{\alpha - r}{\sigma}t \text{ 是 } \mathbb{Q} \text{ 布朗运动.}$$

- 则 $S(t) = S(0)e^{\left(r-\sigma^2/2\right)t+\sigma W^{\mathbb{Q}}(t)}$ 满足

$$\mathrm{d}S(t) = rS(t)\mathrm{d}t + \sigma S(t)\mathrm{d}W^{\mathbb{Q}}(t).$$

- 由 $S(t)=S(0)e^{\left(r-\sigma^2/2\right)t+\sigma W^{\mathbb{Q}}(t)}$, 我们有

$$\begin{aligned} S(T)/S(t) &= e^{\left(r-\sigma^2/2\right)(T-t)+\sigma W^{\mathbb{Q}}(T)-\sigma W^{\mathbb{Q}}(t)} \\ &:= e^{\left(r-\sigma^2/2\right)\tau-\sigma\sqrt{\tau}Y} \end{aligned}$$

  其中 $\tau=T-t$ 和 $Y=-\frac{W^{\mathbb{Q}}(T)-W^{\mathbb{Q}}(t)}{\sqrt{T-t}}$.

- Y 在 $\mathbb{Q}$ 下服从 $N(0,1)$ 且独立于$\mathcal{F}(t)$.
- 由风险中性测度定价公式和独立性,

$$\begin{aligned} C(t,S(t)) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-r(T-t)}\left(S(t)S(T)/S(t)-K\right)_+\Big|\mathcal{F}(t)\right] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-r(T-t)}\left(S(t)e^{\left(r-\sigma^2/2\right)\tau-\sigma\sqrt{\tau}Y}-K\right)_+\Big|\mathcal{F}(t)\right] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-r\tau}\left(S(t)e^{\left(r-\sigma^2/2\right)\tau-\sigma\sqrt{\tau}Y}-K\right)_+\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-r\tau}\left(S(t)e^{\left(r-\sigma^2/2\right)\tau-\sigma\sqrt{\tau}y}-K\right)_+ e^{-\frac{y^2}{2}}\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

设 $d_\pm = \frac{\ln(S/K)+(r\pm\sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$. 由 $Se^{\left(r-\sigma^2/2\right)\tau-\sigma\sqrt{\tau}y} > K$ 当且仅当 $y < d_-$, 我们有

$$
\begin{aligned}
& C(t, S(t)) \\
= \;& \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_-} e^{-y^2/2-r\tau} \left(S(t) e^{\left(r-\sigma^2/2\right)\tau-\sigma\sqrt{\tau}y} - K \right) \mathrm{d}y \\
= \;& \frac{S(t)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_-} e^{-y^2/2-\sigma\sqrt{\tau}y-\sigma^2\tau/2} \mathrm{d}y - \frac{K}{\sqrt{2\pi}} e^{-r\tau} \int_{-\infty}^{d_-} e^{-y^2/2} \mathrm{d}y \\
= \;& \frac{S(t)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_-} e^{-(y+\sigma\sqrt{\tau})^2/2} \mathrm{d}y - K e^{-r\tau} \Phi(d_-) \\
= \;& \frac{S(t)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_-+\sigma\sqrt{\tau}} e^{-y^2/2} \mathrm{d}y - K e^{-r\tau} \Phi(d_-) \\
= \;& S(t)\Phi(d_+) - K e^{-r\tau} \Phi(d_-).
\end{aligned}
$$

第十章 风险中性定价

9.1 测度变换

9.2 单个布朗运动的 Girsanov 定理

9.3 风险中性测度定价

9.4 鞅表示定理与复制资产组合的存在性

Theorem (定理 9.4 鞅表示定理)

设 $\{W(t)\}_{0\leq t\leq T}$ 是 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上的布朗运动且 $\{\mathcal{F}(t)\}_{0\leq t\leq T}$ 是此布朗运动的域流. 设 $\{M(t)\}_{0\leq t\leq T}$ 关于$\{\mathcal{F}(t)\}_{0\leq t\leq T}$ 是鞅. 则存在一适应过程$\{\Gamma(t)\}_{0\leq t\leq T}$ 满足

$$M(t)=M(0)+\int_0^t \Gamma(s)\mathrm{d}W(s),\quad 0\leq t\leq T.$$

- 设 $X(T)$ 是 $\mathcal{F}(T)$-可测的随机变量, 表示某欧式衍生品在到期日 T 的收益.
- 域流 $\{\mathcal{F}(t)\}_{0\le t\le T}$ 是布朗运动的自然域流 (基于股票价格).
- $\{X(t)\}_{0\le t<T}$ 由风险中性测度定价公式给出:

$$X(t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T R(s)\mathrm{d}s}X(T)\middle|\mathcal{F}(t)\right]$$

是否存在复制资产组合 $\{\Delta(t)\}_{0\le t\le T}$?

- 回顾 $\{D(t)X(t)\}_{0\le t\le T}$ 是 $\mathbb{Q}$-鞅，由鞅表示定理，存在某适应过程 $\{\Gamma(t)\}_{0\le t\le T}$ 满足

$$D(t)X(t) = X(0) + \int_0^t \Gamma(s)\mathrm{d}W^{\mathbb{Q}}(s), \quad 0 \le t \le T.$$

- 回顾折现的复制资产组合 $\{D(t)V(t)\}_{0\le t\le T}$ 是 $\mathbb{Q}$-鞅且

$$D(t)V(t) = V(0) + \int_0^t \Delta(s)\sigma(s)D(s)S(s)\mathrm{d}W^{\mathbb{Q}}(s).$$

- 为了有 $X(t) = V(t)$, $t \in [0, T]$, 我们需要

$$X(0) = V(0)$$

和

$$\Delta(t) = \frac{\Gamma(t)}{\sigma(t)D(t)S(t)}, \quad 0 \le t \le T.$$

总存在自筹资金复制资产组合!

存在自筹资金复制资产组合依赖于以下两个假设:

- 波动率 $\sigma(t)$ 几乎必然是正的.
- 域流 $\{\mathcal{F}(t)\}_{0\leq t\leq T}$ 是布朗运动的自然域流.

  i.e., 除了布朗运动本身的随机性以外不再有别的随机性.

在这两个假设下, 由鞅表示定理, 每个 $\mathcal{F}(T)$-可测的欧式衍生品可以被复制. 市场模型称作是完备的.

鞅表示定理仅保证其存在性并没有给出 $\{\Delta(t)\}_{0\leq t\leq T}$ 的显式表达.