

三角剖分上 HCT 样条插值曲面

丁友东 * 邓建松

(中国科学技术大学数学系)

(* 复旦大学数学所)

摘要 讨论了基于 HCT 三角剖分的分片三次多项式, 局部有一阶导数连续, 整体几何连续的 HCT 样条插值曲面的构造方法, 并给出了数值算例.

关键词 三角剖分, HCT 样条, 几何连续, 插值, 曲面

中图法分类号 O174.41, TP391.72

AMS Classification (1995) 65Y25, 68U07

1 引言

在计算几何和计算机图形学领域, 外形设计中曲面造型是一个重要的研究方向. 在实际应用中, 经常要碰到空间离散数据点的插值拟合问题, 给定一组三维散乱数据 $\{P_i = (x_i, y_i, z_i)\}_{i=0}^n$ 及每一点处的法向量 $\{n_{P_i}\}_{i=0}^n$, 求一个具有一定光滑性的样条曲面, 插值这些给定的数据点, 且在每点处的切平面的法向量与所给法向量平行. 对这类问题常用的做法是先对空间数据点进行三角剖分, 形成空间三角网格, 然后再在每个空间三角形上构造光滑参数曲面片, 例如 Bernstein-Bézier(B-B) 三角光滑插值曲面片. 如果两相邻 B-B 三角曲面片要达到 r 阶导数连续, 要求在公共边界曲线上 0 到 r 阶任意方向导数都要相等, 这个条件在应用上太强了, 且没有必要. 就应用而言, 实用的光滑拼接条件是指两曲面片沿连接处位置连续和切平面连续, 即几何 C^1 连续, 简记为 GC^1 连续, 也有人称它为视觉连续(visual continuity)^[1]. 对几何连续拼接问题, 现已出现了不少文献在讨论^[2,3,4,5,7]. 本文将在分析相邻两曲面片连续条件的基础上, 提出一种基于 HCT 三角剖分上的 HCT 样条的构造方法, 由于所构造的样条曲面次数低, 又有一定的光滑性, 因而在应用上将有较大的价值.

2 几何连续条件

首先我们考虑相邻两曲面片的 GC^1 连续条件设 $\rho_1 = \Delta T_1 T_2 T_3$ 和 $\rho_2 = \Delta T'_1 T'_2 T_3$ 为两个空间三角形, 有公共边 $T_2 T_3$, 在 ρ_1, ρ_2 上分别定义了 n 次 Bernstein-Bézier(B-B) 三角参数曲面片

$$\begin{cases} B^n(r) = \sum_{i+j+k=n} b_{ijk} B_{ijk}^n(r) \\ \hat{B}^n(r') = \sum_{i+j+k=n} b'_{ijk} B_{ijk}^n(r') \end{cases} \quad (1)$$

其中 $r = (u, v, w), r' = (u', v', w')$ 为相应于 ρ_1, ρ_2 的重心座标, $\{b_{ijk}\}_{i+j+k=n}, \{b'_{ijk}\}_{i+j+k=n}$ 为三维

空间中的点,也称为 Bézier 控制点, $\{B_{ijk}^n(r)\},\{B_{ijk}^n(r')\}$ 为 Bernstein 基函数. 记 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 为一个方向,则由方向导数公式

$$\begin{cases} \frac{\partial B^n(r)}{\partial \alpha} = n \sum_{i+j+k=n-1} (\alpha_1 b_{i+1,j,k} + \alpha_2 b_{i,j+1,k} + \alpha_3 b_{i,j,k+1}) B_{ijk}^{n-1}(r), \\ \frac{\partial \hat{B}^n(r')}{\partial \alpha} = n \sum_{i+j+k=n-1} (\alpha_1 b'_{i+1,j,k} + \alpha_2 b'_{i,j+1,k} + \alpha_3 b'_{i,j,k+1}) B_{ijk}^{n-1}(r') \end{cases} \quad (2)$$

由^[1], $B^n(r),\hat{B}^n(r')$ 在公共边界曲线上达到 GC^1 连续的条件为

$$\begin{cases} B^n(r) = \hat{B}(r') \\ \det[D_\alpha B^n(r), D_\beta \hat{B}^n(r'), D\Gamma(v)] = 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$\forall u=u'=0, v=v', w=w', v+w=1$$

其中 $\Gamma(v)=B^n(0,v,1,-v)$, α, β 为公共边界曲线两个不平行于 $T_1 T_2$ 的任意方向. 特别地, 我们取 $\alpha=\beta=(1,0,-1)$, 容易证明有

定理 1 $B^n(r),\hat{B}^n(r')$ 在公共边界曲线 $\Gamma(v=B^n(0,v,1-v))$ 上达到 GC^1 连续的一个充分条件为

$$b_{0,j,n-j} = b'_{0,j,n-j}, \quad j = 0, 1, \dots, n \quad (4)$$

及

$$\left(1 - \frac{l}{n}\right)(v_0 a_l + \mu_0 b_l + \lambda_0 c_l) + \frac{l}{n}(v_1 a_{l-1} + \mu_1 b_{l-1} + \lambda_1 c_{l-1}) = 0, \quad l = 0, 1, \dots, n \quad (5)$$

其中 $v_0, \mu_0, \lambda_0, v_1, \mu_1, \lambda_1$ 为实常数.

由于

$$v_0 a_i + \mu_0 b_i + \lambda_0 c_i = \mu_0 b'_{1,i,n-i-1} + v_0 b_{1,i,n-i-1} + \lambda_0 b'_{0,i+1,n-i-1} - (v_0 + \mu_0 + \lambda_0) b_{0,i,n-i}$$

由定理 1, 易知下列推论成立

推论 1 $B^n(r),\hat{B}^n(r')$ 在公共边界曲线 $\Gamma(v)=B^n(0,v,1-v)$ 上达到 GC^1 连续的一个充分条件为(4)及

$$b_{1,j,n-1-j} = \lambda_1 b_{1,j,n-j-1} + \lambda_2 b_{0,j+1,n-j-1} + \lambda_3 b_{0,j,n-j}, \quad j = 0, 1, \dots, n-1 \quad (6)$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 为任意实常数, 且 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$.

特别地, $n=3$ 时, $B^3(r),\hat{B}^3(r')$ 在公共边界曲线 $\Gamma(v)=B^3(0,v,1-v)$ 上达到 GC^1 连续的一个充分条件为

$$b_{0,j,3-j} = b'_{0,j,3-j}, \quad j = 0, 1, 2, 3 \quad (7)$$

及

$$\begin{cases} v_0 a_0 + \mu_0 b_0 + \lambda_0 c_0 = 0 \\ v_1 a_2 + \mu_1 b_2 + \lambda_1 c_2 = 0 \\ 2(v_0 a_1 + \mu_0 b_1 + \lambda_0 c_1) + (v_1 a_0 + \mu_1 b_0 + \lambda_1 c_0) = 0 \\ (v_0 a_2 + \mu_0 b_2 + \lambda_0 c_2) + 2(v_1 a_1 + \mu_1 b_1 + \lambda_1 c_1) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

其中 $v_0, \mu_0, \lambda_0, v_1, \mu_1, \lambda_1$ 为实常数.

3 HCT 样条曲面

现在我们来讨论具体的构造方法. 设 $\{P_i=(x_i,y_i,z_i)\}_{i=1}^N$ 为一组三维散乱数据点, 在每一个数据点给定曲面的法向量方向 n_{P_i} , 如果 n_{P_i} 没有给出, 可以用数值方法决定. 对散乱数据点, 先按某种优化准则进行三维三角网格化^[6]; 然后对所构造的三角形网格 Δ 进行如下加细, 设 ρ_k 为三角形网格 Δ 的一个空间三角形, 取其一个内点 O_k , 例如可取 O_k 为三角形 ρ_k 的形心, 连接

O_k 与 ρ_k 的三个顶点 $P_{k_1}, P_{k_2}, P_{k_3}$, 把 ρ_k 分成三个小三角形, 如对三角形网格 Δ 的每一个三角形均如此处理, 可以得到一个新的三角形网格 Δ' . 设 P_k 为三角形网格 Δ 的一个顶点, 三角形网格 Δ 中以 P_k 作为三角形一条边的一个顶点的边的另一顶点按反时针方向为 $P_{k_1}, P_{k_2}, \dots, P_{k_M}$, 如果 n_{P_i} 没有给出, 可取

$$n_{P_k} = -\frac{1}{M}(P_k P_{k_1} + P_k P_{k_2} + \dots + P_k P_{k_M}) \quad (9)$$

记点 P_k 的切平面为 π_k , 将 $P_{k_1}, P_{k_2}, P_{k_M}$ 投影到切平面 π_k , 得到 $Q_{k_1}, Q_{k_2}, Q_{k_M}$, 对三角形网格 Δ 的每一个顶点均如此处理.

现考虑 Bézier 三角样条曲面的 B-B 表示. 设 $\triangle P_1 P_2 P_3$ 为三角剖分的任一个空间三角形, O 为其形心, 在三个小三角形 $\triangle P_1 P_2 O, \triangle O P_2 P_3, \triangle P_1 O P_3$ 上为三次 B-B 曲面片, 而在整个三角形 $\triangle P_1 P_2 P_3$ 上有 C^1 连续的 Bézier 三角样条曲面的 Bézier 控制点如图 1 所示.

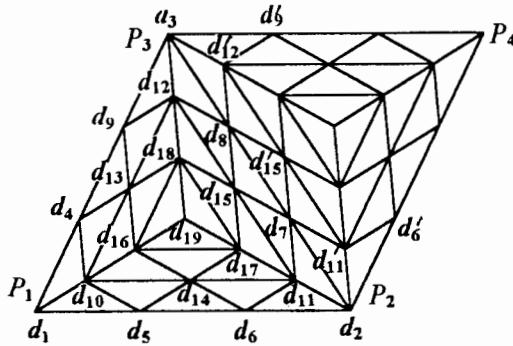


图 1 Bézier 控制点

Fig. 1 The Bézier control points

首先, 由插值性, 取 $d_1 = P_1, d_2 = P_2, d_3 = P_3$, 又设点 P_1 处的曲面法向量方向和切平面为 $n_1, \pi_1; P_2, P_3$ 在 π_1 的投影为 Q_2, Q_3 , 则可取

$$d_4 = P_1 + \frac{1}{3}P_1 Q_3, d_5 = P_1 + \frac{1}{3}P_1 Q_2$$

同样处理得到 d_6, d_7, d_8, d_9 .

其次, 由三角形 $\triangle P_1 P_2 P_3$ 内 Bézier 三角样条曲面的 C^1 连续条件, 有

$$d_{10} = \frac{1}{3}(d_1 + d_4 + d_5), d_{11} = \frac{1}{3}(d_2 + d_6 + d_7), d_{12} = \frac{1}{3}(d_3 + d_8 + d_9)$$

第三, 假如 $P_2 P_3$ 为内边, 则对相邻三角形 $\triangle P_1 P_2 P_3$, 可以得到

$$d'_2 = d_2, d'_3 = d_3, d'_7 = d_7, d'_8 = d_8$$

同样处理可以得到 d'_{11}, d'_{12} ; 设

$$\begin{aligned} a_0 &= d_{12} - d_3, & b_0 &= d'_{12} - d_3, & c_0 &= d_0 - d'_3, \\ a_2 &= d_{11} - d_7, & b_2 &= d'_{11} - d_7, & c_2 &= d_2 - d_7 \end{aligned}$$

满足(8), 则 d_{15} 和 d'_{15} 可由(8)唯一决定;

假如 $P_1 P_2$ 为边界边, 设中点处的单位外向导数为 n_{12} , 则 d_{13} 可任意给定或由下式决定:

$$n_{13} = \frac{3(d_3 + 2d_9 + d_4 - d_{10} - d_{12} - 2d_{13}) + 3\lambda_2(d_1 + d_4 - d_3 - d_9)}{4\mu_2} \quad (10)$$

其中 λ_2, μ_2 为与三角形 $\triangle P_1 P_2 P_3$ 有关的常数;

对三角形 $\triangle P_1P_2P_3$ 的任一边, 均依据其是内边还是边界边按上面两种方法分别处理; 最后, 仍由三角形 $\triangle P_1P_2P_3$ 内 Bézier 三角样条曲面的 C^1 连续条件, 有

$$\mathbf{d}_{16} = \frac{1}{3}(\mathbf{d}_{10} + \mathbf{d}_{13} + \mathbf{d}_{14}, \mathbf{d}_{17}) = \frac{1}{3}(\mathbf{d}_{11} + \mathbf{d}_{15} + \mathbf{d}_{14}),$$

$$\mathbf{d}_{18} = \frac{1}{3}(\mathbf{d}_{12} + \mathbf{d}_{15} + \mathbf{d}_{13}, \mathbf{d}_{19}) = \frac{1}{3}(\mathbf{d}_{16} + \mathbf{d}_{17} + \mathbf{d}_{18})$$

至此, 三角形 $\triangle P_1P_2P_3$ 上所有 Bézier 控制点均已求出.

如果对三角剖分的任一个三角形均按上面叙述方法求出其对应的 Bézier 控制点, 则由推论 1, 如此决定的三次 Bézier 三角样条曲面在相邻三角形之间具有 GC^1 连续性, 而在每个三角形内, 具有 C^1 连续性.

4 数值例子

设 Θ 为一上半单位球面, 如图 2 所示, 在球面 Θ 上取五个数据点 $P_1=(1,0,0), P_2=(0.1, 0), P_3=(-1,0,0), P_4=(0,-1,0), P_5=(0,0,1)$, 及其单位外法向量 $\mathbf{n}_1=(1,0,0), \mathbf{n}_2=(0,$

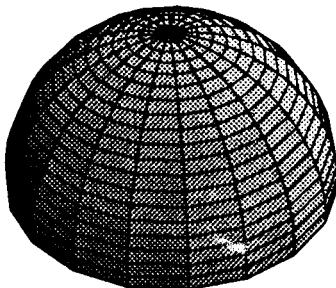


图 2 半球面

Fig. 2 Semsphere surface

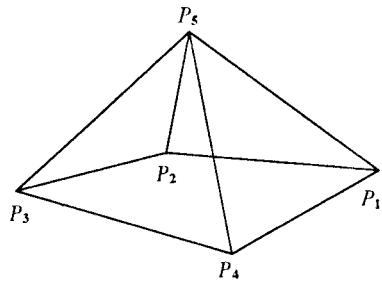


图 3 三角剖分

Fig. 3 The triangulation

$1, 0), \mathbf{n}_3=(-1, 0, 0), \mathbf{n}_4=(0, -1, 0), \mathbf{n}_5=(0, 0, 1)$, 形成一个空间三角剖分, 如图 3 所示. 则按上面叙述方法可以计算出四个三角形上的所有 Bézier 控制顶点, 所构造的三次 Bézier 三角样条曲面如图 4. 从图中可看出, 逼近效果良好, 如果取的数据点密集一些, 效果会更好.

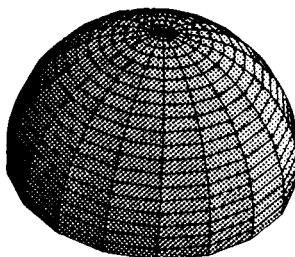


图 4 插值曲面

Fig. 4 The interpolating surface

参 考 文 献

- [1] Barnhill R E. A Survey of the Representation and Design of Surfaces. IEEE CG& A, 1981, 10: 9-16
- [2] Barnhill R E, Farin G. C¹ quintic interpolation over triangles: two explicit representation. Int. J. for Num. Methods in Engineering, 1981, 17: 1763-1778
- [3] Farin G. Triangular Bernstein-Bézier Patches. CAGD, 1986, 3: 83-127
- [4] Hahn J M. Geometric Continuous Patch Complexes. CAGD, 1989, 6: 55-67
- [5] Loop C. A G¹ triangular Spline Surface of Arbitrary Topological Type. CAGD, 1994, 11: 303-330
- [6] 丁友东. 计算机辅助几何设计中多元样条的插值拟合研究. 中国科学技术大学博士学位论文, 1997
- [7] 梁友栋. 曲线和曲面的几何连续. 数学年刊, 1990, 11: 374-386

HCT Spline Interpolating Surfaces Over Triangulation

Ding Youdong * Deng Jiansong

(Department of Mathematics, USTC)

(* Inst. of Math. Fudan Univ.)

Abstract The construction method for piecewise cubic HCT spline interpolating surfaces with local derivative continuity and global geometric continuity over triangulation is discussed, and a numerical example is given.

Key words triangulation, HCT spline, geometric continuity, interpolation, surface.

AMS Classification (1995) 65Y25, 67U07.