用分片代数曲面构造管道曲面的过渡曲面

陈发来　　陈长松　　邓建松
中国科学技术大学数学系　合肥 230026

摘　要

本文借助围绕一个顶点处代数曲面的光滑拼接条件，提出并研究了用分片代数曲面构造三通管道的过渡曲面问题。我们首先对空间区域进行适当的剖分以确定分片代数曲面的定义区域。然后，通过求解一个线性方程组来构造出光滑拼接的分片代数曲面。同时我们还讨论了在代数曲面片的 B–B 表示下，Bézier纵标对过渡曲面的形状的局部控制问题。结果表明，用分片代数曲面构造过渡曲面不仅可以降低曲面的次数，而且更有利于曲面形状的控制。

关键词:　分片代数曲面，过渡曲面，管道曲面，几何连续

§1　引言

近几年来，在计算机辅助几何设计与计算机图形学等领域中，隐式曲面

$$f(x,y,z)=0 \tag{1.1}$$

受到了越来越多的重视。这是因为隐式曲面有着许多参数曲面无法比拟的优越性。首先，隐式表示 (1.1) 自然定义了一个封闭的几何形体，这有利于构造一些具有复杂形状的几何实体而无需考虑曲面之间的光滑拼接问题。其次，隐式表示能简单地判断空间的点是否在曲面上或内或外，因而易于解决点的分类问题以及物体间的碰撞检测问题。此外，利用隐式表示可以方便地构造所谓的过渡曲面或混合曲面，这在计算机动画中尤其能发挥其优势。

应用隐式曲面构造复杂形体始于 Blinn [2] 及 Wyvill [3] 等人的工作。他们提出一种称之为 meta-ball 的隐式曲面来构造诸如人体的器官、面部，云雾等较复杂的形体。Bloomenthal 等人 [4] 则提出了更一般形式的隐式曲面即所谓的卷积曲面来模拟更加复杂的形体。此外， Kacic-Alesic [5] 等则提出了用骨架的方法来构造易于变形的几何实体。

代数曲面 (即 (1.1) 式中的 f 为一多项式) 作为一类特殊的隐式曲面，除了具有隐式曲面的大多特性之外，其简单的多项式表示，使得它具有更直观的几何表示形式并使计算得到简化，从而更便于应用于实际造型之中。

代数曲面最重要的应用之一是用于构造 blending 曲面或称为过渡曲面。最早 Rossignac 和 Requicha 在 [10] 中提出用滚球法进行过渡曲面的设计。用这种方法得到的过渡曲面次

数很高，表达式复杂，而且在滚球半径较大时会出现自交现象。[8] 用 Liming 技巧来过渡初始曲面，[9] 基于所谓的替代法构造过渡曲面。然而，他们的方法所得到的过渡曲面的次数仍较高。Hoffmann 和 Hopcroft 提出的 potential 方法 [7], 以及伍铁如应用 Groebner 基方法 [12] 都得到了相对较低次数的过渡曲面。遗憾的是，由这些方法构造的过渡曲面经常无法调整，且没有灵活而直观的可调参数对它进行局部控制。

本文首次尝试用分片代数曲面来构造管道曲面的过渡曲面。用分片代数曲面构造过渡曲面的主要优点是，在同样的光滑度要求下，过渡曲面的次数比用单个代数曲面构造的过渡曲面次数更低；同时，通过代数曲面片的 B–B 表示，过渡曲面的形状可以得到更直观的局部控制。本文的结果有力地证明了这一点。

本文以下各节安排如下：§2 利用两代数曲面几何连续的条件给出代数曲面片围绕一个顶点处光滑拼接的协调条件，这一协调条件是用分片代数曲面构造过渡曲面的基础；§3 根据代数曲面围绕一个顶点处光滑拼接的条件，具体地给出构造三通管道的过渡曲面的方法，并讨论了如何通过分片代数曲面的 B-B 表示来对过渡曲面的形状进行局部控制。最后在 §4 中，我们总结了用分片代数曲面造型的优越性，并提出了需要进一步研究的问题。

§2　代数曲面片围绕一个顶点处的光滑拼接条件

§2.1　代数曲面的 B–B 表示

代数曲面 (1.1)(简记为 $V(f)$) 不仅可以表示为幂次形式

$$f(x,y,z) := \sum_{\substack{i+j+k\leqslant n\\ i,j,k\geqslant 0}} c_{ijk}x^i y^j z^k = 0, \tag{2.1}$$

也可以表示为 B–B 形式 (参见 [11])

$$f(\boldsymbol{p}) := \sum_{\substack{i+j+k+l=n\\ i,j,k,l\geqslant 0}} b_{ijkl}\frac{n!}{i!\,j!\,k!\,l!}s^i t^j u^k v^l = 0, \tag{2.2}$$

其中，(s,t,u,v) 为点 $\boldsymbol{p}=(x,y,z)$ 关于某一四面体 $V_0V_1V_2V_3$ 的重心坐标。b_{ijkl} 称为代数曲面 (2.2) 对应于格点 $V_{ijkl}=(\frac{i}{n},\frac{j}{n},\frac{k}{n},\frac{l}{n})$ 的 Bézier纵标。代数曲面 (2.2) 位于四面体 $V_0V_1V_2V_3$ 之内的部分称为一个代数曲面片。

使用代数曲面的 B-B 表示的主要优点在于，通过调整 Bézier纵标可以较方便地控制代数曲面片的形状。例如，令 $b_{n000}=0$，则代数曲面片通过顶点 V_0; 令 $b_{n,0,0,0}=b_{n-1,1,0,0}=b_{n-1,0,1,0}=0$，则代数曲面过顶点 V_0 并在该顶点处与平面 $V_0V_1V_2$ 相切。如果 $f(V_{ijkl})$ 的值是负的 (正的), 则减小 (增大)b_{ijkl} 的值会使曲面 $f(\boldsymbol{p})$ 远离 V_{ijkl}；反之，增大 (减小)b_{ijkl} 的值会使曲面靠近 V_{ijkl}。有关这一方面的详细讨论，请读者参阅 [11] 一文。

§2.2　代数曲面片之间的光滑拼接

给定两个代数曲面，如何定义它们之间拼接的光滑性？Garrity 与 Warren [6] 以流形的观点给出了一种较为普遍性的定义。

定义 2.1 *设两代数曲面 V 与 W 交于一条不可约的代数曲线 C 。称 V 与 W 沿公共边界 C 具有 k 阶几何连续 (简记为 G^k) ，如果对 C 上的每一点 P ， V 与 W 在 P 点附近构成一个 C^k 的流形。*

在大多数情况下，上述几何连续性的定义与几何直观是一致的。如一阶几何连续即切平面连续；二阶几何连续性即曲率连续。

上述几何连续性的定义很难应用于具体问题之中。为此， Garrity 与 Warren 进一步给出了两代数曲面连续拼接的具体条件 [6] ：

定理 2.2 *设代数曲面 $V(f)$ 与 $V(h)$ 横截地交于一不可约代数曲线 C 。则代数曲面 $V(g)$ 与 $V(f)$ 沿 C G^k 连续的充要条件是存在多项式 $\alpha(x,y,z)$ 与 $\beta(x,y,z)$, 使得 $g=\alpha f+\beta h^{k+1}$ 。*

在实际应用中， $V(h)$ 常常取为一平面。由上述定理我们有

推论 2.3 *设 m 次代数曲面 $g=0$ 和 $n(n\leq m)$ 次代数曲面 $f=0$ 在平面 π 上有公共的交线，如果存在多项式 $\alpha(x,y,z)$ 和 $\beta(x,y,z)$ ，使得 $g=\alpha f+\beta\pi^{k+1}$, 其中 α 和 β 分别为 $m-n$ 和 $m-k-1$ 次多项式，则代数曲面 $g=0$ 和 $f=0$ 沿交线 G^k 连续。*

§2.3　围绕一个顶点处代数曲面片的光滑拼接

在用分片代数曲面构造复杂曲面的造型中，经常会遇到多个代数曲面片围绕一个共同顶点的光滑拼接问题，我们称之为*伞处的拼接问题*([1]) 。为了方便起见，我们考虑如图 1 所示的分片代数曲面定义区域，它由 m 个四面体 $T_i=Z_1Z_2V_{i-1}V_i$, $i=1,2,...,m$ 组成 (这里的下标均需要模 m, 如 V_m 等同于 V_0), 四面体的公共棱边为 Z_1Z_2, 相邻四面体 T_i 与 T_{i+1} 的公共面为 $\pi_i=Z_1Z_2V_i$ 。

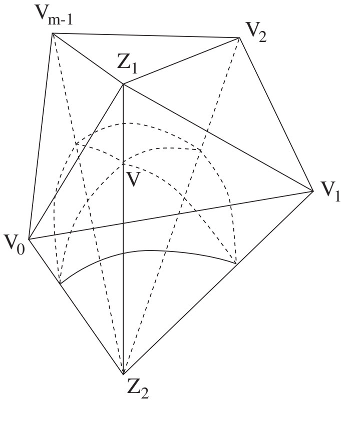

图 1: 围绕一个顶点处分片代数曲面的定义区域

设在四面体 T_i 内代数曲面片的表示为 $g_i(x,y,z)=0$, 它们的次数都是 n 。根据推论 2.3 ，为保证代数曲面片 $g_i=0$ 与 $g_{i+1}=0$ 之间 k 阶光滑拼接，我们取

$$g_{i+1}=g_i+\alpha_i\pi_i^{k+1},\quad i=1,2,\ldots,m, \tag{2.3}$$

其中 α_i 为 $n-k-1$ 次多项式。如此便构造了一个 k 阶光滑的伞。

注意 (2.3) 中的 α_i 不是任意取定的，实际上 (2.3) 包含了如下一个协调条件

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \pi_i^{k+1} = 0. \tag{2.4}$$

只有当 α_i 满足协调条件 (2.4)，由 (2.3) 定义的伞才是 k 阶连续的伞。综合上述，我们有

定理 2.4 *由 (2.3) 定义的伞是一个 G^k 连续的伞的充要条件是协调方程 (2.4) 有解。*

§3　三通管道曲面的过渡曲面的构造

这一节，我们以三通管道曲面的过渡曲面的构造为例，来说明代数曲面片的拼接技术是如何应用于构造较复杂的几何形体的。

§3.1　问题的提出

给定三个管道曲面：

$$\begin{cases} f_1 = y^2 + z^2 - r_1^2 = 0, & x \geqslant h_1 > 0, \\ f_2 = z^2 + x^2 - r_2^2 = 0, & y \geqslant h_2 > 0, \\ f_3 = x^2 + y^2 - r_3^2 = 0, & z \geqslant h_3 > 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

我们要在三维区域

$$\{(x,y,z) : |x| \leqslant h_1, |y| \leqslant h_2, |z| \leqslant h_3\} \tag{3.2}$$

内寻找分片代数曲面 $g=0$，使得它本身有 G^1 的光滑度，同时又要在平面 $F_1 := x-h_1=0$, $F_2 := y-h_2=0$ 和 $F_3 := z-h_3=0$ 处分别与 $f_1=0, f_2=0$ 和 $f_3=0$ G^1 光滑拼接。如此构造的分片代数曲面 $g=0$ 是三个管道曲面的过渡曲面。

下面我们将以一个对称的情形为例来说明过渡曲面的构造。我们假设：$r_1=r_2=r_3=r, h_1=h_2=h_3=h$ $(h>r>0)$。我们发现，对于这种对称情形，可以找到三次的分片代数曲面来与 $f_i=0$ G^1 光滑拼接，并且该分片三次代数曲面有三个自由参数可供调节。然而，以前的结论是至少要四次的代数曲面才能做到这一点，并且该四次代数曲面的形状完全确定了。

§3.2　空间的分割

用分片代数曲面构造复杂曲面的困难之一也是灵活之处在于，空间分割 (即分片代数曲面的定义区域) 的任意性。对于本文中的问题，我们采取如下的空间分割方法 (见图 2)。

我们在由 $x \pm h=0, y \pm h=0, z \pm h=0$ 界定的立方体中选取公共棱边 Z_1Z_2：$Z_1=(h,h,h)$, $Z_2=(-h,-h,-h)$；以及顶点 $V_1=(h,0,-h)$, $V_2=(0,h,-h)$, $V_3=(-h,h,0)$,

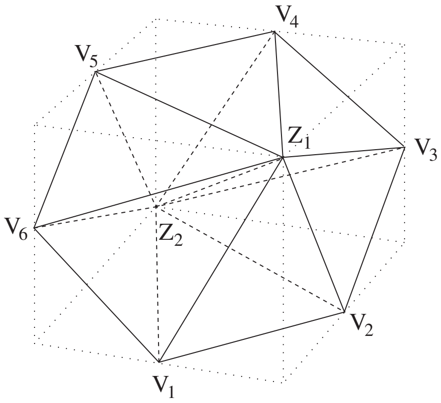

图 2: 空间分割

$V_4 = (-h, 0, h), V_5 = (0, -h, h), V_6 = (h, -h, 0)$ 。面 $\pi_i = 0$ 分别是过 Z_1, Z_2, V_i 的平面，它们的方程是

$$\begin{aligned} \pi_4 = \pi_1: &\quad x - 2y + z = 0 \\ \pi_5 = \pi_2: &\quad -2x + y + z = 0 \\ \pi_6 = \pi_3: &\quad -x - y + 2z = 0 \end{aligned}$$

则过渡曲面区域的定义区域由六个四面体 $T_i = Z_1 Z_2 V_{i-1} V_i,\ i = 1, 2, \ldots, 6$ 构成，其中 $V_0 = V_6$ 。在每一个四面体内，分别定义一个三次的代数曲面，它们在交界处光滑拼接，从而构成整个过渡曲面。

§3.3 过渡曲面的构造

设分片代数曲面 g 在 T_i 中的表示为 $g_i = 0$ ， g_i 之间满足关系式

$$g_{i+1} = g_i + \alpha_i \pi_i^2, \qquad i = 1, 2, \ldots, 6 \tag{3.3}$$

其中 α_i ， $i = 1, 2, \ldots, 6$ 为一次多项式。同时 α_i 之间还满足相容条件

$$\sum_{i=1}^{6} \alpha_i \pi_i^2 = 0. \tag{3.4}$$

另一方面，由分片代数曲面 $g = 0$ 在平面 $F_i = 0$ 处分别与曲面 $f_i = 0$ G^1 光滑拼接，可得关系式

$$\begin{cases} g_1 = \gamma_1 f_1 + \beta_1 F_1^2, \\ g_3 = \gamma_2 f_2 + \beta_2 F_2^2, \\ g_5 = \gamma_3 f_3 + \beta_3 F_3^2. \end{cases} \tag{3.5}$$

其中， β_i, γ_i ， $i = 1, 2, 3$ 为 x, y, z 的一次多项式。

联合 (3.3), (3.4) 及 (3.5), 可得方程组

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{6} \alpha_i \pi_i^2 = 0, \\ \gamma_1 f_1 + \beta_1 F_1^2 + \alpha_1 \pi_1^2 + \alpha_2 \pi_2^2 = \gamma_2 f_2 + \beta_2 F_2^2, \\ \gamma_1 f_1 + \beta_1 F_1^2 - \alpha_6 \pi_6^2 - \alpha_5 \pi_5^2 = \gamma_3 f_3 + \beta_3 F_3^2, \end{cases} \tag{3.6}$$

由于 $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ 均为 x, y, z 的一次多项式，令

$$\begin{cases} \alpha_i = a_{i,1}x + a_{i,2}y + a_{i,3}z + a_{i,4}, & i = 1, \ldots, 6, \\ \beta_i = b_{i,1}x + b_{i,2}y + b_{i,3}z + b_{i,4}, & i = 1, \ldots, 3, \\ \gamma_i = c_{i,1}x + c_{i,2}y + c_{i,3}z + c_{i,4}, & i = 1, \ldots, 3. \end{cases} \tag{3.7}$$

将上式代于 (3.6) ,比较方程两边关于 x, y, z 的系数,可得关于 $\{a_{i,j}\}_{i=1}^{6}{}_{j=1}^{4}$, $\{b_{i,j}\}_{i=1}^{3}{}_{j=1}^{4}$, $\{c_{i,j}\}_{i=1}^{3}{}_{j=1}^{4}$ 的线性方程组 $(\star)$（鉴于该方程组较为繁琐，本文从略）。求解该方程组，我们即可得到分片代数曲面 $g = 0$ 的表示

$$\begin{cases} g_1 = \gamma_1 f_1 + \beta_1 F_1^2 = 0, \\ g_2 = \gamma_1 f_1 + \beta_1 F_1^2 + \alpha_1 \pi_1^2 = 0, \\ g_3 = \gamma_2 f_2 + \beta_2 F_2^2 = 0, \\ g_4 = \gamma_2 f_2 + \beta_2 F_2^2 + \alpha_3 \pi_3^2 = 0, \\ g_5 = \gamma_3 f_3 + \beta_3 F_3^2 = 0, \\ g_6 = \gamma_3 f_3 + \beta_3 F_3^2 + \alpha_5 \pi_5^2 = 0. \end{cases} \tag{3.8}$$

方程组 $(\star)$ 有三组线性无关的解，即分片代数曲面 $g = 0$ 具有三个可调节的参数。我们随意选用了 $b_{3,4}$, $c_{3,3}$ 和 $c_{3,4}$ 作为参数。选取其中一组解即得到相应的一个分片代数曲面。图 3 是取定 $r = 1/5$ 和 $h = 3/5$ 时，对应参数为 $b_{3,4} = 1, c_{3,3} = -1, c_{3,4} = -5$ 的过渡曲面。

§3.4　参数的调整

在选取参数时，我们发现如果参数选得不适当，则代数曲面片会出现多余分支的情况。为了更有效直观地控制分片代数曲面的形状，我们将每个代数曲面片都表示为 B–B 形式，然后利用 Bézier纵标和曲面的关系来避免多余分支的产生。

以 g_1 为例，在四面体 $Z_1V_6V_1Z_2$ 内， g_1 可以表示为 B–B 形式：

$$g_1(\boldsymbol{p}) = \sum_{\substack{i+j+k+l=3 \\ i,j,k,l \geqslant 0}} b_{ijkl} \frac{3!}{i!\,j!\,k!\,l!} s^i t^j u^k v^l, \tag{3.9}$$

其中， (s, t, u, v) 是 $\boldsymbol{p}$ 关于四面体 $Z_1V_6V_1Z_2$ 的重心坐标， Bézier纵标 b_{ijkl} 是参数 $b_{3,4}$, $c_{3,3}$ 以及 $c_{3,4}$ 的线性表示。

为了尽量保证代数曲面片 g_1 没有多余的分支并且具有恰当的形状，我们要求

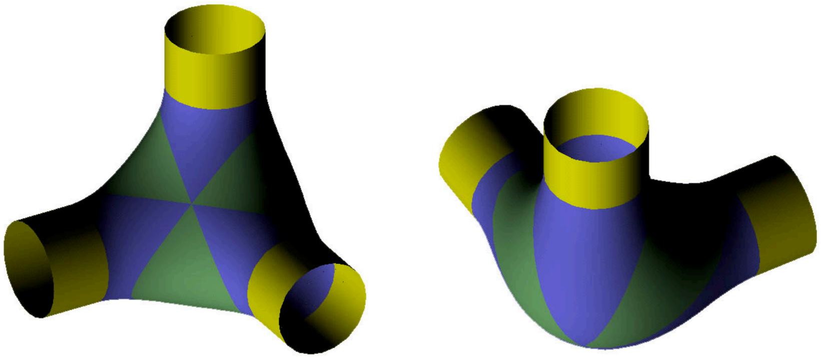

图 3: 管道曲面的过渡曲面

(i) $g_1 = 0$ 与三角面 $V_6V_1Z_2$ 没有交点；

(ii) 设 C 是管道截面

$$\begin{cases} y^2 + z^2 - r^2 = 0, \\ x = h, \end{cases} \tag{3.10}$$

的中心，过 Z_1Z_2 及 C 的平面与 V_1V_6 相交于点 D(参见图 4) 。对于 Z_2D 上的任意点 E ，线段 Z_1E 于曲面 $g_1 = 0$ 都有两个不同的交点。

实际上，上面两个条件同时保证了连接 Z_1 与三角形 $V_6V_1Z_2$ 内任一点的线段与代数曲面片 $g_1 = 0$ 有两个交点或无交点。

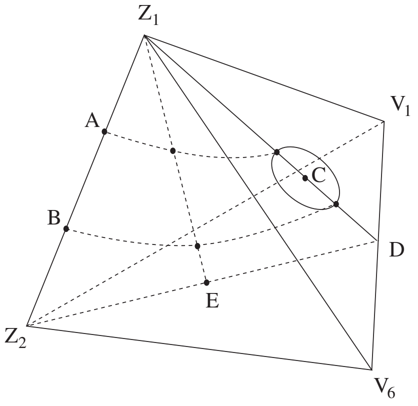

图 4: 过渡曲面的单一分支分析

下面我们来分析这两个条件。

条件 (i) 比较简单。不妨设 $g_1(Z_1) < 0$ 。为使曲面 $g_1 = 0$ 与三角形 $V_6V_1Z_2$ 没有交点，只需令 $g_{0jkl} < 0, j + k + l = 3$ 。条件 (ii) 比较复杂。为给出曲面片 $g_1 = 0$ 与线段 Z_1E 交于两点的条件，我们先引入下面的引理 [1] 。

引理 3.1 设 $b_0 < 0,\ b_3 < 0$ 。则多项式

$$f(s) = b_0 B_0^3(s) + b_1 B_1^3(s) + b_2 B_2^3(s) + b_3 B_3^3(s) \tag{3.11}$$

在区间 $(0,1)$ 内有两个不同实根的充要条件是

$$\max(b_1, b_2) > 0, \tag{3.12}$$

$$\Delta := (b_1 b_2 - b_0 b_3)^2 - 4(b_0 b_2 - b_1^2)(b_1 b_3 - b_2^2) < 0 \tag{3.13}$$

由于 D 点的重心坐标为 $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$, 故 E 点的重心坐标可表为 $E = (1-\lambda) Z_2 + \lambda D = (0, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}, 1-\lambda),\ \lambda \in [0,1]$ 。于是， g_1 在 $Z_1 E$ 上的限制是一个三次的 Bernstein 多项式：

$$f(s) := g_1\Big|_{Z_1 E} = b_0(\lambda) B_0^3(s) + b_1(\lambda) B_1^3(s) + b_2(\lambda) B_2^3(s) + b_3(\lambda) B_3^3(s) \tag{3.14}$$

其中

$$b_l(\lambda) = E_1^{3-l}\Big(\frac{\lambda}{2} E_2 + \frac{\lambda}{2} E_3 + (1-\lambda) E_4\Big)^l b_{0000}, \quad l = 0,1,2,3 \tag{3.15}$$

E_1, E_2, E_3, E_4 均为下标的位移算子，如 $E_1 b_{0000} = b_{1000}, E_2 E_3 b_{1000} = b_{1110}$ 等。

由引理 3.1 ，如果对任意的 $\lambda \in [0,1]$ 我们有

$$\begin{aligned} & b_0(\lambda) < 0, \quad b_1(\lambda) > 0, \quad b_3(\lambda) < 0, \\ & \Delta(\lambda) := (b_1(\lambda) b_2(\lambda) - b_0(\lambda) b_3(\lambda))^2 - 4(b_0(\lambda) b_2(\lambda) - b_1(\lambda)^2)(b_1(\lambda) b_3(\lambda) - b_2(\lambda)^2) < 0 \end{aligned} \tag{3.16}$$

则条件 (ii) 成立。

注意到 $\Delta(\lambda)$ 实际上是关于 λ 的六次多项式，它可以写成 B-B 形式

$$\Delta(\lambda) = \sum_{i=0}^{6} c_i B_i^6(\lambda) \tag{3.17}$$

这里 $c_i,\ i = 0,1,\ldots,6$ 均是 b_{ijkl} 的多项式表示 (从而也是参数 $b_{3,4},\ c_{3,3}$ 和 $c_{3,4}$ 的多项式表示。鉴于较繁琐，姑且略去) 。

由上面的分析，我们可以得到代数曲面片 $g_1 = 0$ 具有单分支的下列条件：

$$\begin{aligned} & (1) b_{3000} < 0, \quad b_{0jkl} < 0, \quad j+k+l = 3 \\ & (2) b_{2100} + b_{2010} > 0, \quad b_{2001} > 0 \\ & (3) c_i < 0, \quad i = 0,1,\ldots,6 \end{aligned} \tag{3.18}$$

也就是说，我们只要选择参数 $b_{3,4},\ c_{3,3}$ 和 $c_{3,4}$ 使得 Bézier纵标满足 (3.18) ，即可构造出具有单分支的过渡曲面。

此外，我们还可以通过调整 Bézier纵标来控制管道曲面的凸凹程度。我们仍以代数曲面片 $g_1 = 0$ 为例，并不妨令 $g(Z_1) < 0$ 。我们在面 $Z_1Z_2V_1$ 内考察 Bézier纵标对曲面形状的影响。首先，选择参数 $b_{3,4}$，$c_{3,3}$ 和 $c_{3,4}$ 满足 (3.18)，比如取图 3 所对应的参数 $b_{3,4} = 1, c_{3,3} = -1, c_{3,4} = -5$ 。如上取得的参数使得 $b_{0003} < 0$ ，根据 Bézier纵标对曲面的影响，我们知道，如果减小 b_{0003} 的值，四面体内曲面就远离顶点 Z_2，因而它与 Z_1Z_2 边的两个交点之间的距离减小，也就是过渡曲面凸的程度减小。此外，通过调整 b_{0300} 的值也可以改变代数曲面的凹凸程度。如图 5 是对应于参数 $b_{3,4} = 2/5, c_{3,3} = -1, c_{3,4} = -5$ 的图形，我们能明显看出过渡曲面凸的程度减小了。

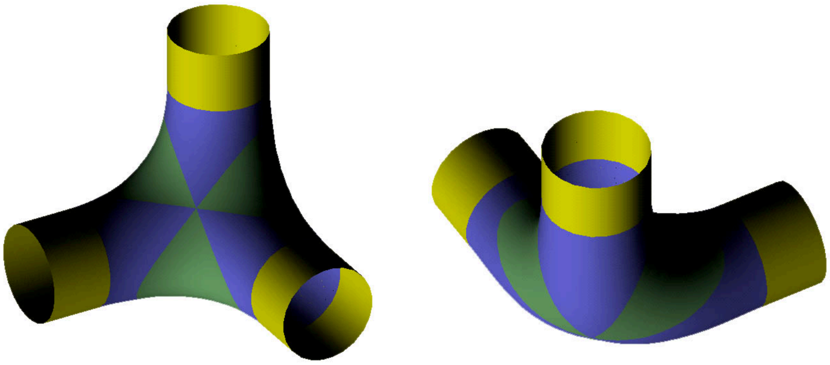

图 5: 参数调整对过渡曲面形状的影响

§4 结论

本文利用分片代数曲面的拼接技术对三通管道的过渡曲面的构造问题进行了研究，得到了过渡曲面的低次分片代数曲面的构造解。同时，我们利用自由参数对曲面的形状控制问题进行了讨论。结果表明，用分片代数曲面不仅可以构造代数次数尽量低的几何实体，而且使得曲面的形状控制变得更加直观。

本文的工作是用分片代数曲面构造复杂曲面的一个初步尝试，尚有许多进一步的工作要做。例如，非对称情形及管道曲面位置任意的情形下，三通管道的过渡曲面的构造；高阶光滑度 (如 G^2 连续) 的过渡曲面的构造；更一般地，用分片代数曲面构造任意复杂的几何形体。

§5 致谢

本课题获得国家自然科学基金 (69603009,19971087), 973 重大项目“数学机械化及其自动推理平台”(G1998030600), 教育部资助优秀青年教师基金, 教育部博士点基金资助。有关计算与绘图均在中国科技大学数学系科学计算与计算机图形学实验室完成。

参考文献

[1] Chen Falai. Geometric continuity, blending and intersection of algebraic surfaces[Ph. D dissertation]. University of Science and Technology of China, Hefei, China, 1994. (陈发来. 代数曲面的几何连续性、 Blending 及求交的研究 [博士学位论文]. 中国科学技术大学，中国，合肥，1994.)

[2] Blinn J. A generalization of algebraic surface drawing. ACM Transactions on Graphics, 1982, vol.1, no.3: 135–256.

[3] Wyvill B. Animating soft objects. The Visual Computer, 1986, vol.2, no.4: 235–242.

[4] Bloomenthal J. and Shoemake K. Convolution surfaces. Computer Graphics, 1991. vol.25, no.4: 251–256.

[5] Kacic-Alesic Z. and Wyvill B. Controlling blending of procedural implicit surfaces. In: Graphics Interface, Toronto, Ontario, Canada, 1991, 236–245.

[6] Garrity T. and Warren J. Geometric continuity. Computer Aided Geometric Design, 1991, Vol.8, No.1: 51–65.

[7] Hoffmann C. and Hopcrof J. The potential method for blending surfaces and corners. In: Farin G. Geometric Modeling. Philadephia: SIAM publications, 1987, 301–307.

[8] Middleditch A. and Sears K. Blending surfaces for set theoretic volume modeling system. Computer Graphics, 1985, vol.19, no.3: 161–170.

[9] Rockwood A. and Owen J. Blending surfaces in solid modeling. In: Farin G. Geometric modeling. Philadephia: SIAM publications, 1985, 231-238.

[10] Rossignac J. and Requicha A. Constant radius blending in solid modeling. Comp. Mech. Engr. 1984, vol.3, no.1: 65–73.

[11] Sederberg T. Techniques for cubic algebraic surfaces, part two. Computer Graphics and its Applications, 1990, Vol.10, No.5: 12–21.

[12] Wu T. Gao W. and Feng G. Blending of implicit algebraic surfaces. In: Proceedings of the ASCM, Beijing, China, 1995, 125-131.

Blending Pipe Surfaces with Piecewise Algebraic Surfaces

Chen Falai Chen Changsong Deng Jiansong

Department of Mathematics, University of Science and Technology of China, Hefei 230026

Abstract

In this paper, we derive a geometric continuity condition for algebraic surface patch complexes meeting at a common vertex. Based on the geometric continuity condition, a new scheme is presented to blend three cylinders with piecewise cubic algebraic surfaces. The algorithm starts with a suitable space partition for the defining domain of the piecewise algebraic surface patches. Then the piecewise algebraic surface is constructed by solving a linear system of equations. An intuitive and geometric means of controlling the shape of the blending surface is also discussed based on the Bernstein-Bézier(B-B) representation of algebraic surface patches. The results suggest that modeling with piecewise algebraic surfaces has two main advantages: (1) The degree of the algebraic surface patches is comparatively low; (2) The control over the shapes of the piecewise algebraic surfaces is much more intuitive and efficient.

Key words: piecewise algebraic surface, blending surface, pipe surface, geometric continuity.

上网英文摘要中，请加入插图三。

作者联系方式：

陈发来　安徽、合肥、中国科技大学数学系　邮编：230026
Tel: 0551-3601009(O), 0551-3603699(H)
Email: chenfl@ustc.edu.cn

陈长松　安徽、合肥、中国科技大学数学系　邮编：230026
Tel: 0551-3601009(O)
Email: chencs@263.net

邓建松　安徽、合肥、中国科技大学数学系　邮编：230026
Tel: 0551-3601009(O), 0551-3606233(H)
Email: dengjs@ustc.edu.cn

作者简历：

陈发来，男，1966年11月生，1994年获中国科学技术大学博士学位。现为中国科学技术大学数学系教授，博士生指导教师。主要研究方向为计算机辅助几何设计、计算机图形学。

陈长松，男，1973年12月生，中国科学技术大学数学系博士生。研究方向为计算机辅助几何设计与计算机图形学。

邓建松，男，1971年3月生，1998年获中国科学技术大学博士学位。现为中国科学技术大学数学系讲师。主要研究方向为计算机辅助几何设计、计算机图形学。