

滴水涟漪的计算机动画模拟

陈前华 邓建松 陈发来

qhchen@263.net

(中国科学技术大学数学系 安徽合肥 230026)

摘 要

本文模拟了近距离观察滴水涟漪的场景. 用有限体积法求解二维的浅水波方程, 在水表面受到扰动后自动产生波纹. 为了增加真实感, 加入了粒子系统, 但与以往工作不同的是, 粒子被进一步分类成水滴、水柱、水粒和水泡. 文中详细讨论了如何利用隐式曲面技术给这些液态物体造型, 以便逼真地表现出这些液态物体的形状多变性.

关键词: 基于物理模型的造型方法, 水波动画, 隐式曲面

中图分类号: TP391

§1 引言

对于自然场景的动画模拟, 人们常用基于物理模型的方法. 通过求解描述自然场景的物理学方程来模拟自然规律, 通过修改各种物理参数来控制动画的情节. 这样用户只需很少的艺术劳动 (art labor), 就可以制作出精彩逼真的动画来. 因此基于物理模型的造型研究越来越受重视, 越来越多的工程计算中的成果被引进到图形学中来.

对水流场景的模拟, 基于物理模型的方法更是有力手段. 文 [1] 用有限差分法的隐格式求解二维的浅水波方程 (即 Navier-Stokes 方程, 简记为 N-S 方程), 通过设定初值和边界条件来控制动画情节. 文 [2] 用有限差分法的显格式求解一维的明渠浅水流方程, 通过给定初值条件来控制动画情节. 文 [3] 求解三维的 N-S 方程, 采用的求解方法能够使解无条件稳定; 由于用三维的 N-S 方程来描述水流, 故能够模拟物质在水中扩散及搅动后随水流运动的场景. 文 [4] 用有限体积法求解二维的 N-S 方程, 设计了一个干扰模型来描述各种干扰源如粒子掉入、风吹、棍搅等, 通过对水表面施加各种扰动来控制动画情节; 由于采用了有限体积法求解方程, 解域可以是任意的单连通区域, 在边界处理上更加方便有力. 以上的方法都是通过水流方程控制流体的运动, 在初值的设定或者外界的扰动下自动产生波纹. 这些工作从较普遍的意义下提供了水波动画的造型手段, 但离具体地逼真地模拟特定水波场景, 还有相当距离.

本课题得到国家九七三项目“数学机械化”(G1998030600), 国家自然科学基金 (19971087), 高校博士点专项研究基金和中国科大校内青年基金的资助.

本文的工作是要具体地模拟小水滴掉入水池的过程。在这一方面，文 [4] 把雨点当作一个干扰源，它落入水中时对水表面的一个圆形区域产生扰动，从而产生一圈圈的涟漪，雨点则绘制成线段，适合于远距离观察。但如果近距离观察，雨点滴入水中的作用过程模拟得仍不够逼真。因为简单地把水表面高度进行扰动，忽略了水滴撞击水表面产生的水柱、粒子以及漂浮的泡沫。另外，简单地把水滴绘制成线段或小球在近观时都不够真实。文 [5] 提到了雨点造成的水波的模拟，它用波形函数来描述雨点掉入水中产生的波纹，对更细致地模拟雨与水表面的作用过程没有涉及。文 [6] 研究了球体掉入到水盆中的运动场景，它同样通过求解水流方程来模拟球体撞击水表面后的波纹，但它进一步逼真地模拟了撞击所产生的飞溅着的大量水粒。本文试图模拟雨点或水笼头上的水滴掉入水中的场景。它与前面球体撞击水面的情景有所不同，它的撞击不如前面的激烈，不会产生大量的水粒，而是产生一个小的水柱及少量的水粒，偶尔还会产生一两个水泡在水面漂浮着。

我们的做法是基于文 [4] 的。把水滴当作一个在重力、空气阻力和风力作用下的粒子，它作为一个干扰源在撞击水表面的瞬间对水表面的一个圆形区域进行扰动，在 N-S 方程的控制下自动产生一圈圈向外扩散的涟漪。并且在扰动水表面的同时，产生水柱、水粒和水泡，它们的运动仍按典型的粒子来处理，但它们的绘制根据各自的属性来分别造型。为了能够描述液体这些形状，我们使用隐式曲面来造型。水滴、水柱和水粒都看成由多个隐式单元 (implicit primitive) 融合而成的隐式曲面。这种方法能够很好地描述液体的形状不定性。水泡则看作半球体。用隐式曲面对液态物体进行造型，文 [7] 和文 [8] 都进行过尝试。他们模拟的液态物体如喷泉，是单独运动的，没有与水表面进行作用。本文集成了基于物理模型的造型方法与隐式曲面的造型技术，首次做了如下尝试：在求解 N-S 方程模拟水流的表面重力波的基础上，引入基于粒子系统的隐式曲面造型，对水滴、水柱、水粒和水泡的模拟进行了详细讨论。我们的动画实验表明这是一种有效的方式，结果相当逼真。

§2 水波的运动

这里简介一下文 [4] 中对水波的模拟方法。在该模型下，水流体按照微元的观点，被看成由一个一个紧挨的水棱柱组成，这些水棱柱在竖直方向的速度被忽略，并且认为水棱柱里的水的速度都是一样的。因此，水表面实际上是二维区域上的一个高度场，只要求出区域里各处的水深，就可得到水表面。设 Ω 是二维平面上的一个区域，水流运动的控制方程是二维的 N-S 方程

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} = 0$$

或写成积分形式

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \mathbf{U} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = 0 \quad (1)$$

其中 $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$, $\mathbf{F} = (\mathbf{E}, \mathbf{G})$, 以及

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} uh \\ u^2h + \frac{1}{2}gh^2 \\ uvh \end{pmatrix}, \mathbf{G} = \begin{pmatrix} vh \\ uvh \\ v^2h + \frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix}, \mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix}$$

方程的未知量为

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} h \\ uh \\ vh \end{pmatrix}$$

它反映了水深和速度. 另外 $\mathbf{n}$ 是解域的边界处的法向量. g 是重力加速度.

为了求解这个方程, 先把解域 Ω 离散成三角形网格, 然后用有限体积法来计算解域在各个时间步的离散解. 由于 N-S 方程在整个解域上都成立, 它在每个离散得到的三角形上应该同样成立, 因而方程可以离散成:

$$A_e \cdot \frac{\partial \mathbf{U}_e}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})_j \cdot l_j = 0 \quad (2)$$

这里 A_e 是三角形的有向面积, $\mathbf{U}_e$ 是 $\mathbf{U}$ 该三角形上的取值, $l_j, j = 1, 2, 3$ 是三角形的三条边的边长. 我们用最简单的方式对时间进行离散:

$$\frac{\partial \mathbf{U}_e}{\partial t} = \frac{\mathbf{U}_e^{n+1} - \mathbf{U}_e^n}{\Delta t}$$

于是得到:

$$\mathbf{U}_e^{n+1} = \mathbf{U}_e^n - \frac{\Delta t}{A_e} \sum_{j=1}^3 (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})_j \cdot l_j \quad (3)$$

因此, 只要知道第 n 个时间步的 $\mathbf{U}_e$ 值, 就可计算第 $n+1$ 个时间步的 $\mathbf{U}_e$ 值. 在上式中, $\Delta t, A_e, l_j$ 是容易计算的, 为了计算 $(\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})_j$, 我们使用 Roe 提出的方法 ([9]). 具体请参考文 [4], 这里不再列出.

采用这种方法可以准确地模拟水波的运动, 图 1 显示了波之间的叠加、碰到边界时的反射、遇到立柱的绕射, 以及在坝缺口处的穿越.

§3 水滴的运动

水滴的运动可以看作典型的粒子运动, 即在重力 $\mathbf{G}$ 、空气阻力 $\mathbf{f}$ 和风力 $\mathbf{F}$ 的作用下作落体运动, 可以用下面几个方程来描述:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} + \mathbf{G} + \mathbf{f} &= m\mathbf{a} \\ \mathbf{v} &= \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}\Delta t \\ \mathbf{p} &= \mathbf{p}_0 + \mathbf{v}\Delta t \end{aligned}$$

其中 Δt 是时间步长, m 是粒子的质量, $\mathbf{v}, \mathbf{p}$ 是粒子的当前时间步的速度和位置, $\mathbf{v}_0, \mathbf{p}_0$ 是上一个时间步的速度和位置, $\mathbf{a}$ 是加速度.

当水滴在上述力的作用掉入水池时, 水滴与水表面发生碰撞, 我们为水滴设定一个作用半径, 在这作用半径内的三角形上的 $\mathbf{U}$ 值都作一个扰动:

$$\mathbf{U}^n + = d\mathbf{U}$$

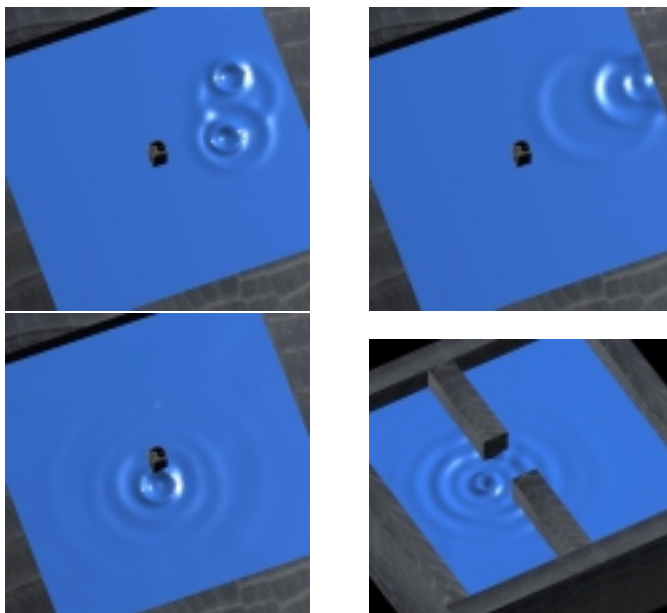


图 1: 水波的运动模拟

也就是说, 对这些三角形域的水深和速度作扰动 $h+ = dh, u+ = du, v+ = dv$. 在 N-S 方程的控制之下, 该扰动会影响相邻的三角形, 于是产生了波, 并传播开去.

§4 水滴、水柱、水粒和水泡的造型

根据我们的观察, 水滴与水表面发生碰撞, 不仅会扰动水表面, 从而产生波纹, 而且会激起一道水柱, 并且会产生一些水粒飞溅起来, 有时还会冒出几个水泡, 在水面上漂浮. 为了描述这些细节, 我们引入粒子系统. 这些粒子除了固有的一些属性如尺寸大小、生命周期、初始位置、初始速度外, 还有一个类别标记, 以表明该粒子是代表一个水滴、水柱、水粒还是水泡. 对不同类别的粒子, 它们的属性的取值也不相同:

1. 水滴. 初始位置为水表面上方的某一高处, 初始速度 $(0,0,0)$, 生命周期为从产生到掉入水池中与水表面发生碰撞的这段时间.
2. 水柱. 水柱的下端固定不变, 为水表面上被水滴碰撞的地方. 上端则在竖直方向运动, 初始位置为水表面上被水滴碰撞的地方, 初始速度为水滴被水表面虚拟反弹的速度 (实际上由于水滴掉入水中即被融为一体, 并不会反弹), 它的计算按照一般的有损耗弹性碰撞来计算. 生命周期为从产生到水柱上端回复坠入水池的期间.
3. 水粒. 尺寸比水滴和水柱要小, 初始位置为水表面上被水滴撞击处附近的一个随机位置. 初始速度为水滴被水表面虚拟反弹的速度的一个随机扰动后的取值, 并且为了体现能量守恒规律, 尺寸越小其速率越大. 生命周期为从创建到掉入水中的期间.
4. 水泡. 它在水滴撞击水表面时的速率大于某个阈值时随机产生, 尺寸大小为水滴的 2 至 5 倍. 初始位置为水表面上被水滴撞击处附近, 初始速度在竖直方向取为零, 因而它不会被

弹起，而是在水表面上漂浮。生命周期为从产生到被其他粒子撞破的期间，或者取为某一个随机设定的阈值。

下面讨论这些粒子的绘制。通常，人们把粒子绘制成一个点或者小球。但实际上，由于视觉残留效应，粒子在运动时看起来更象一条线段。设粒子的当前位置和速度分别为 $\mathbf{p}$ 和 $\mathbf{v}$ ，粒子的尺寸为 $size$ ，当粒子运动到当前位置时，人们视觉中还存在有它在此前某处 $\mathbf{q}$ 的映像，我们采用下面这种方式来计算它：

$$\mathbf{q} = \mathbf{p} - \mathbf{v} * size$$

也就是说，把粒子绘制成线段 $\overline{\mathbf{pq}}$ 会比绘制成点 $\mathbf{p}$ 看起来更逼真。

但是在近距离观察时，粒子被绘制成线段或圆柱都不够逼真，为此，我们采用隐式曲面技术，把粒子绘制成一个由 $\mathbf{p}$ 、 $\mathbf{q}$ 两个位置和尺寸大小 $size$ 决定的隐式曲面。一个隐式曲面被定义成一个等势面：

$$\{(x, y, z) : F(x, y, z) = \sum_{i=1}^n a_i F_i(x, y, z) = C\}$$

其中 F_i 和 a_i 是隐式单元的势函数及其影响因子 (本文中全取为 1.0)。 C 为给定的等势值，通常取为 0.50。 $F_i(x, y, z)$ 通常分解成距离函数 $d_i(x, y, z)$ 和融合函数 (blending function) $f_i(d)$ 的复合，即：

$$F_i(x, y, z) = f_i(d_i(x, y, z)) = f \circ d$$

距离函数 $d_i(x, y, z)$ 决定了隐式单元的形状， $f_i(d)$ 决定了隐式单元之间相互融合 (blending) 的程度。文 [10] 对各种形状的距离函数、文 [11] 对各种融合函数的选取有很好的介绍。

对于水滴和水粒，我们把它绘制成由排列在线段 $\overline{\mathbf{pq}}$ 上的球形隐式单元融合而成的隐式曲面，这些球体半径是把 $size$ 作微小随机扰动后的取值。因此一个水滴和水粒在下降过程中被绘制成图 2 左边所示的形状。

对于水柱，我们取它的上端为粒子虚拟反弹的竖直方向上的位置，当作 $\mathbf{p}$ ，下端为水表面被水滴碰撞的地方，当作 $\mathbf{q}$ ，它和前面的水滴水粒一样，被绘制成由分布在线段 $\overline{\mathbf{pq}}$ 上的球形隐式单元融合而成的隐式曲面，为了使隐式曲面与水表面接合得更好，在水柱的下端 $\mathbf{q}$ 处多加一个圆锥形隐式单元的影响。因此水柱被绘制成如图 2 右边所示的形状。

水泡则被简单地绘制成半球体。

通过以上方法造型，这些液态物体的形状随着时间的变化会作非常灵活的变化，看起来具有流动性。

§5 实验结果及结论

我们用 C++ 和 OpenGL 在 SGI Octane 平台上编程验证了这个算法。隐式曲面的绘制采用多边形化方法 ([12])。本文附带的动画表明这种方法效果不错。动画中，小水池中的水表面用了 23,198 个三角形表示，渲染速度平均约为 2 秒一帧。图 3 是从动画中截取下的一帧。

本文和一般的基于物理模型的水波动画模拟一样，求解 N-S 方程，然后加上粒子系统增加真实感，但不同的是，粒子被进一步分类成水滴、水柱、水粒和水泡，使得近距离观察时更加

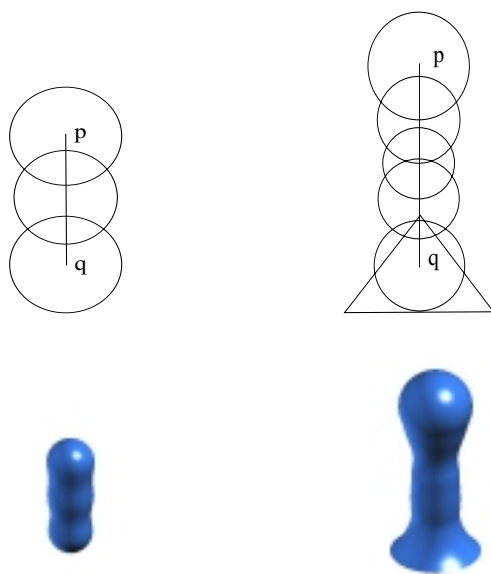


图 2: 水滴和水柱的造型

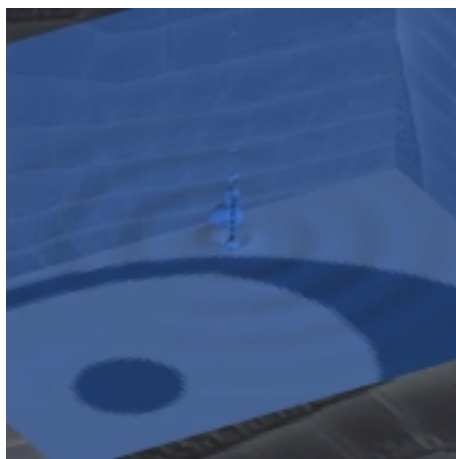


图 3: 滴水涟漪

逼真, 并且集成了隐式曲面造型技术, 较好地模拟了液态物体的形状易变特性. 这不失为一种新颖的思路.

参考文献

- [1] Michael Kass, Gavin Miller, Rapid, Stable Fluid Dynamics for Computer Graphics. SIGGRAPH'1990, 49-55.
- [2] 徐迎庆, 苏成, 李华, 刘慎权, 齐东旭, 基于物理模型的流水及波浪模拟, 计算机学报, 第 19 卷, 增刊, 153-160.
- [3] Jos Stam, Stable Fluids, SIGGRAPH'1999, 121-128.
- [4] Qianhua Chen, Jiansong Deng, Falai Chen, Water Animation With Disturbance Model, submitted to Computer Graphics International'2001, HongKong.
- [5] 童若锋, 汪国昭, 用于动画的水波造型, 计算机学报, 第 19 卷, 第 8 期, 1995, 594-599.
- [6] James F.O'Brien, Jessica K.Hodgins, Dynamic Simulation of Splashing Fluids. Proceedings of Computer Animation'1995, 198-205.
- [7] Gavin Miller, Andrew Pearce. Globular Dynamics: a Connected Particle System for Animating Viscous Fluids. Computer & Graphics, 1989, volume 13, 305-309.
- [8] 万华根, 金小刚, 彭群生, 基于物理模型的实时喷泉水流运动模拟, 计算机学报, 第 21 卷, 第 9 期, 1998, 774-779.
- [9] Francisco Alcrudo, Pilar Garcia-Navarro, A High-Resolution Godunov-Type Scheme in Finite Volumes For The 2D Shallow-Water Equations, International Journal For Numerical Methods in Fluids, 1993, volume 16, 489-505.
- [10] B. Crespín, C. Blance, C. Schlick, Implicit Sweep Objects, Eurographics'1996, Vol 15(3), 165-174.
- [11] C. Blanc, C. Schlick, Extended Field Functions for Soft Objects, Proceedings of Implicit Surface'1995, 21-32.
- [12] J. Bloomenthal, Surface Tiling, in Introduction to Implicit Surfaces, edited by J. Bloomenthal, etc., Morgan Kaufman Publishers, Inc., 1998, 126-165.

Simulation of Ripples

CHEN Qian-Hua DENG Jian-Song CHEN Fa-Lai

*Department of Mathematics, University of Science and Technology of China,
Hefei, Anhui, 230026*

Abstract

This paper simulates the close view of the water droplets falling into a small pool. The method is to solve a fluid dynamic equation and give disturbance to the water surface to generate waves automatically. Then particle system is added to simulate the droplets, water columns, splashing spots and foams. To render these fluid objects, implicit surface modeling is used to make them look more realistic.

Keywords: physically based modeling, water animation, implicit surface.