

# 构造代数 Blending 曲面的 Gröbner 基方法

娄文平 冯玉瑜 陈发来 邓建松

(中国科学技术大学数学系 合肥 230026)

**摘要** 利用代数几何中关于理想的 Gröbner 基的理论,结合 CAGD 中的研究方法,对代数 Blending 曲面做了较为细致的研究,给出了用 Gröbner 基构造代数 Blending 曲面的新方法. 该方法能够求出所有满足要求的代数 Blending 曲面,并能给出其中次数最低的曲面. 文中还讨论了如何利用代数曲面插值、最小平方逼近的方法来选取合适的自由参数,以达到对代数 Blending 曲面进行形状控制的目的. 最后给出了一个茶壶表面造型示例,以说明方法的有效性.

**关键词** 代数 Blending 曲面,Gröbner 基,自由参数,形状控制

中图法分类号: TP391

## The Method of Gröbner Basis for Constructing Algebraic Blending Surfaces

LOU Wen-Ping FENG Yu-Yu CHEN Fa-Lai DENG Jian-Song

(Department of Mathematics, University of Science and Technology of China, Hefei 230026)

**Abstract** The study of constructing blending surfaces between given surfaces is one of the important problems in geometric modeling and computer graphics. In the past decades, many authors work on this problem and different methods are proposed to solve the problem. However, these methods generally produce high degree algebraic blending surfaces which are unsatisfactory or the algorithms are not easy to be generalized to blend algebraic surfaces with higher order contact. In this paper, a new method using Gröbner basis in algebraic geometry combined with techniques in CAGD for constructing algebraic blending surfaces is introduced. At first a theorem characterized all elements in an ideal which the degree of them is not greater than  $m$  using Gröbner basis with Graded Lex order is proved. According to this theorem all algebraic blending surfaces which satisfy the given conditions can be obtained, furthermore, the lowest degree blending surfaces also can be found. Based on geometric continuous condition between algebraic surfaces, a general algorithm for constructing algebraic surfaces to blend several given surfaces with  $GC^k$  continuity is given, and the algorithm is very efficient to find low-degree algebraic blending surfaces. In order to control the shape of blending algebraic surface, we write them in the Bernstein-Beziér form. Most of B-B coefficients can be determined by solving a linear system of equations according to continuous conditions. Some coefficients as free parameters are remained, and can be used to control the shape of algebraic blending surfaces. We require them interpolate and/or least-square approximate a collection of some special points. An example is given to illustrate the method and efficiency. At the last section of this paper, a solid modeling of a teapot is presented by eight piecewise algebraic surfaces using our method. The lid is constructed

收稿日期: 2001-02-21; 修改稿收到日期: 2001-08-20. 本课题得到 NKBRSF 数学机械化基金(G1998030600)、国家自然科学基金(19971087)、教育部博士点基金以及教育部资助优秀青年人才基金资助. 娄文平,男,1975年生,硕士,主要研究方向为计算机辅助几何设计、计算机图形学. 冯玉瑜,男,1940年生,教授,博士生导师,主要研究方向为计算机辅助几何设计、计算机图形学和应用逼近论. 陈发来,男,1966年生,博士,教授,博士生导师,主要研究方向为计算机辅助几何设计、计算机图形学. 邓建松,男,1971年生,博士,副教授,主要研究方向为计算机辅助几何设计、计算机图形学.

by three piecewise algebraic surfaces of degree four with  $GC^2$  continuity. The body is combined by two piecewise quadratic algebraic surfaces with  $GC^1$  continuity. The spout is made of two piecewise cubic algebraic surfaces with  $GC^1$  continuity, and the handle is a single quartic algebraic surface.

**Keywords** algebraic Blending surfaces, Gröbner basis, free parameter, shape control

## 1 引言

在计算机辅助几何设计(CAGD)、计算机图形学和几何实体造型中,一个实体模型一般是由许多不同的曲面拼接而成。曲面的表示方法主要有两种:一种是参数表示法,如 Bézier 曲面、B 样条曲面、Coons 曲面等都是典型的参数曲面表示方法;另一种就是隐式表示方法,例如,集合  $S = \{p \in R^3 | f(p) = 0\}$  表示的三维空间点集一般为隐式曲面,本文用  $S(f)$  表示隐式曲面  $f(p) = 0$ , 在不致引起混淆的情形下,有时也直接称  $f$  为隐式曲面。

相对于参数曲面,隐式曲面具有许多优点,例如易于判断空间点相对于曲面的位置,对曲面进行求交、求并等几何操作是封闭的,表示曲面的总次数较低,等等,因而近年来对隐式曲面的研究有了迅速的发展。当  $f$  为多项式时,把  $f(p) = 0$  所定义的隐式曲面  $S(f)$  称为代数曲面,并且把多项式  $f$  的总次数称为代数曲面  $S(f)$  的次数,记为  $\deg(f)$ 。如果在多项式环  $R[x, y, z]$  中多项式  $f_1, f_2, \dots, f_n$  的公共零点集是一维的,称其为空间代数曲线,记为  $S(f_1, f_2, \dots, f_n)$ 。

在大多数几何造型问题中,人们希望曲面之间能光滑拼接,尽量去掉所出现的多余尖点、角、棱、沟、峰或者震荡等不光顺的部分,这样设计者常常需要在不同的曲面之间构造过渡曲面,使它们在给定的曲线处光滑拼接。这种过渡曲面就是人们所指的 Blending 曲面。它的严格数学描述如下。

**定义 1<sup>[1]</sup>** 给定一对代数曲面  $S(g_1)$  和  $S(g_2)$ , 并分别在曲面  $S(g_1)$  和  $S(g_2)$  上指定不连接的代数曲线  $S(g_1, h_1)$  和  $S(g_2, h_2)$ , 代数曲面  $S(f)$  称做两个代数曲面的 Blending 曲面,是指  $S(f)$  分别与曲面  $S(g_1)$  和  $S(g_2)$  在  $S(g_1, h_1)$  和  $S(g_2, h_2)$  处光滑拼接。这里辅助的代数曲面  $S(h_1)$  和  $S(h_2)$  称做截曲面,如果  $S(h_1)$  和  $S(h_2)$  是平面,就叫做截平面。

近十多年来,国内外众多的学者对 Blending 曲面进行了研究。1989 年 Warren 在文献[2]中给出了代数曲面  $GC'$  拼接的定义,并证明了如果  $S(g_i, h_i)$

( $i=1, 2, \dots, n$ ) 为不连接的不可约代数曲线,那么代数曲面  $S(f)$  沿着  $S(g_i, h_i)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) 分别与  $S(g_i)$  达到  $GC'$  连续,则必有

$$f \in \bigcap_{i=1}^n \langle g_i, h_i^{k+1} \rangle \quad (1)$$

其中  $\langle g_i, h_i^{k+1} \rangle$  表示由多项式  $g_i, h_i^{k+1}$  生成的理想,但并未给出代数 Blending 曲面的具体形式。1992 年 Bajaj 等在文献[3]中利用 Hermite 插值的方法,对给定的 Blending 曲面的次数,把曲面  $GC'$  连续的条件转化成关于 Blending 曲面  $f$  的系数的线性方程组,计算出所有代数 Blending 曲面。这种方法首先要求给出拼接线上的若干点,且不能推广到高阶几何连续情形。1993 年吴文俊在文献[4]中利用不可约升列和伪除法的方法,给出了曲面光滑拼接的充要条件,但是算法也不能推广到高阶连续的情形。1995 年吴铁如在文献[5]中给出了在存在二次 Blending 曲面的情况下,存在三次 Blending 曲面  $GC'$  光滑拼接两个二次代数曲面的充要条件。但这种方法仅限于截曲面为平面的情形,且方法也不易推广到高阶连续的情形。

本文利用多项式理想的 Gröbner 基理论,结合 CAGD 的研究方法,对构造代数 Blending 曲面做了较为细致的研究。第 2 节中利用理想的 Gröbner 基,得到了求出所有代数 Blending 曲面的方法,并可以求出所有次数最低的 Blending 曲面,最后给出了求解 Blending 曲面的算法。第 3 节中利用曲面插值以及最小平方逼近等方法,来选取合适的自由参数,以便对代数 Blending 曲面的形状进行控制,并举例说明了方法的重要性。最后一节通过一个茶壶表面造型的例子说明了方法的有效性。

## 2 方法介绍

设  $R[x_1, x_2, \dots, x_n]$  表示以  $x_1, x_2, \dots, x_n$  为变量的实数域上的多项式环,当固定其中的一个单项式序后,对于  $R[x_1, x_2, \dots, x_n]$  中的元素  $f$ ,

$$f = \sum_a a_i x^a,$$

其中  $x^a = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}$ , 定义如下记号:

$f$  的多重指数:  $\text{multideg}(f) = \max\{\alpha \in \mathbb{Z}^n \mid a_\alpha \neq 0\}$ .

$f$  的总次数:  $\deg f = \max\{|\alpha| \mid a_\alpha \neq 0\}$ .

$f$  的首项系数:  $\text{LC}(f) = a_{\text{multideg}}(f)$ .

$f$  的首项式:  $\text{LM}(f) = x^{\text{multideg}}(f)$ .

$f$  的首项:  $\text{LT}(f) = \text{LC}(f) \cdot \text{LM}(f)$ .

又设  $f_1, f_2, \dots, f_s \in \mathcal{R}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ , 则  $f_1, f_2, \dots, f_s$  生成的理想  $I$  用  $I = \langle f_1, f_2, \dots, f_s \rangle$  表示,  $f_1, f_2, \dots, f_s$  称为理想  $I$  的生成集或基.

设  $F = \{f_1, f_2, \dots, f_s\} \subset \mathcal{R}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  是一组有序多项式组, 则有如下的除法定理<sup>[6]</sup>.

**定理 1.** 给定单项式序, 设  $F = \{f_1, f_2, \dots, f_s\}$  是  $\mathcal{R}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  中有序的多项式组, 那么对于任何  $f \in \mathcal{R}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  都可以表示成如下形式

$$f = a_1 f_1 + a_2 f_2 + \dots + a_s f_s + r,$$

其中  $a_i, r \in \mathcal{R}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ , 且  $r=0$  或者  $r$  的各项皆不能被  $\text{LT}(f_i)$  ( $i=1, 2, \dots, s$ ) 整除. 进一步, 如果  $a_i f_i \neq 0$ , 那么

$$\text{multideg}(f) \geq \text{multideg}(a_i f_i) \quad (1 \leq i \leq s).$$

$\mathcal{R}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  中理想  $I$  的 Gröbner 基定义为

给定一个单项式序, 理想  $I$  的有限子集  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_t\}$  称为  $I$  的 Gröbner 基, 是指它满足  $(\text{LT}(g_1), \text{LT}(g_2), \dots, \text{LT}(g_t)) = (\text{LT}(I))$ .

其中  $\text{LT}(I)$  表示  $I$  中所有元素的首项构成的集合.

关于 Gröbner 基理论的详细介绍, 可以参考文献[6-8]等专著, 这里不做详细讨论.

设  $\mathcal{P}_m$  为总次数不超过  $m$  的多项式全体, 理想  $I \subset \mathcal{R}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ , 则

$$I_m = I \cap \mathcal{P}_m$$

表示  $I$  中所有总次数不超过  $m$  的元素全体. 显然有

**命题 1.**  $I_m$  在多项式加法下构成数域  $\mathcal{R}$  上的线性空间.

利用理想  $I$  的 Gröbner 基, 可以刻画  $I_m$  中的所有元素.

**定理 2.** 如果  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_t\}$  是理想  $I$  在分次字典序下的 Gröbner 基, 设

$$\bar{G} = \{g_i \in G \mid \deg(g_i) \leq m\},$$

不妨记为  $\bar{G} = \{g_1, g_2, \dots, g_t\}$  ( $t \leq s$ ). 则  $I_m = \langle g_1, g_2, \dots, g_t \rangle \cap \mathcal{P}_m$ , 即对任何  $f \in I_m$  可以表示为

$$f = \sum_{i=1}^t a_i g_i,$$

而且如果  $a_i g_i \neq 0$ , 那么  $\deg(f) \geq \deg(a_i g_i)$ .

**证明.** 对任意的  $f \in I_m \subset I$ , 由除法定理 1,  $f$  可以表示为

$$f = a_1 g_1 + a_2 g_2 + \dots + a_t g_t + r.$$

由于  $G$  是  $I$  的 Gröbner 基, 所以  $r=0$ . 根据除法定理我们知道, 如果  $a_i g_i \neq 0$ , 那么

$$\text{multideg}(f) \geq \text{multideg}(a_i g_i), \quad 1 \leq i \leq s \quad (2)$$

在单项式的分次字典序下, 上式可以推出

$$\deg(f) \geq \deg(a_i g_i), \quad 1 \leq i \leq s.$$

由式(2)立即可以推出  $a_i g_i = 0$ ,  $t+1 \leq i \leq s$ . 于是  $f$  可以表示为

$$f = \sum_{i=1}^t a_i g_i. \quad \text{证毕.}$$

基于前面的讨论, 从式(1), 命题 2 和定理 3, 可以给出构造光滑 Blending 曲面的 Gröbner 基方法. 构造 GC\* 的 Blending 曲面步骤如下:

1. 计算理想  $I = \langle g_1, g_2, \dots, g_t \rangle$  在分次字典序下的 Gröbner 基  $G$ .

2. 选取合适的自由参数, 利用定理 3 计算出最低次数的代数 Blending 曲面. 关于如何选取合适的参数, 以达到对曲面形状的控制, 将在第 3 节中讨论.

用一片代数曲面 Blending 两个或多个代数曲面时, 特别是在光滑性要求较高的情况下, Blending 曲面的次数往往比较高, 高次的代数曲面有多分支、拓扑结构复杂、形状不易控制等缺点, 因此尽量使用低次的 Blending 代数曲面是十分重要的. 当不存在这样的低次曲面时, 可以采用分片低次的代数曲面来构造 Blending 曲面.

### 3 代数 Blending 曲面 自由参数的选取

在构造 Blending 曲面时, 常常有一些待定的自由参数, 可以选择这些自由参数的值, 以达到确定 Blending 曲面, 并控制曲面的形状的目的.

当构造代数 Blending 曲面时, 有时必需或者要求曲面通过一些特定的点或曲线. 对于任意的代数曲面  $f(x, y, z) = \sum_{i+j+k \leq n} c_{ijk} x^i y^j z^k = 0$ , 只要系数  $c_{ijk}$

满足线性方程  $f(p_x, p_y, p_z) = 0$ , 那么代数曲面  $S(f)$  就会插值点  $p = (p_x, p_y, p_z)$ . 如果要求插值  $k$  个数据点, 那么就会得到由  $k$  个齐次线性方程构成的方程组, 用  $r$  表示这个方程组的秩. 由于代数曲面  $f=0$  与  $\lambda f=0$  表示同一曲面(其中  $\lambda$  为非零实数), 所以  $n$  次代数曲面实际上有  $d_f(n) = \binom{n+3}{3} - 1$  个自由度. 当  $d_f(n) \geq r$  时, 都可以找到非平凡的代数

曲面插值上面的  $k$  个数据点.

插值点的数目有严格的限制. 数目大时往往要求曲面的次数较高, 这不是所希望出现的情形. 因而我们进一步考虑代数曲面最小平方逼近一些数据点.

计算一个点到一个代数曲面的欧氏距离是很困难的, 在隐式曲面或者曲线的逼近中我们一般都用代数距离, 这就是表示隐式曲面或者曲线的代数式在该点的取值  $f(p)$ . 但是我们又面临一个新的问题, 对于非零常数  $\lambda$ , 代数曲面  $f=0$  和代数曲面  $\lambda f=0$  表示同一曲面, 但是我们按照上面计算的代数距离  $f(p) \neq \lambda f(p)$ , 所以我们选取如下的距离.

**定义 3.** 给定点  $p$  和  $n$  次代数曲面  $f(x, y, z) = \sum_{i+j+k=n} c_{ijk} x^i y^j z^k = 0$ ,  $p$  到  $f$  的距离为

$$\text{dist}(f, p) = |f(p)| / |f|,$$

其中

$$|f| = \left( \sum_{i+j+k \leq n} c_{ijk}^2 \right)^{1/2}.$$

根据这个定义, 显然有  $\text{dist}(f, p) = \text{dist}(\lambda f, p)$ .

给定点集  $PS = \{p_i | 1 \leq i \leq k\}$ , 代数曲面的最小平方逼近就是寻找满足

$$\sum_{i=1}^k \text{dist}(f, p_i)^2 = \min_{g \in \mathcal{B}_n} \sum_{i=1}^k \text{dist}(g, p_i)^2$$

的代数曲面  $f=0$ , 其中  $f \in \mathcal{B}_n$ .

上式等价于下列无约束的最优化问题:

$$\min_{f \in \mathcal{B}_n} \frac{\sum_{i=1}^k f^2(p_i)}{|f|^2}.$$

这可写成矩阵形式:

$$\min_{c} \frac{c A c'}{c c'} \quad (3)$$

其中向量  $c = (c_{ijk})$ , 矩阵  $A$  满足  $c A c' = \sum_{i=1}^k f^2(p_i)$ .

**命题 2.**  $A$  是半正定矩阵.

**证明.** 记  $f(p_i) = c \cdot u_i$ , 其中  $u_i$  是  $\binom{n+3}{3}$  维行向量. 那么

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k f^2(p_i) &= \sum_{i=1}^k (c \cdot u_i)^2 = \sum_{i=1}^k c u_i' u_i c' \\ &= c \left( \sum_{i=1}^k u_i' u_i \right) c' = c A c'. \end{aligned}$$

设  $\lambda$  是矩阵  $A$  的最小特征值,  $ev$  是矩阵  $A$  对应于  $\lambda$  的特征向量. 由线性代数中关于 Rayleigh 商的结论, 我们知道式(3)当  $c=ev$  时取到最小值  $\lambda$ . 通过计算矩阵  $A$  对应于  $\lambda$  的特征向量  $ev$ , 就解决了代数曲面最小平方逼近点集的问题.

另外还可以给每个点赋一个权值. 设  $w_i > 0$ ,

$i=1, 2, \dots, k$ ,  $\sum_{i=0}^k w_i = 1$ , 那么代数曲面的带权最小平方逼近问题的描述就是: 选择合适的  $c_{ijk}$ , 使得

$$\min_{c, f} \frac{\sum_{i=1}^k w_i f^2(p_i)}{|f|^2}.$$

这等价于求解最优化问题:

$$\min_c \frac{c A c'}{c c'}.$$

实际的几何造型中大多数情况是已知  $n$  次代数曲面  $f$  具有形式:

$$f(x, y, z) = \sum_{i=1}^m c_i B_i(x, y, z),$$

其中  $B_i(x, y, z)$  是给定的  $n$  次线性无关多项式, 只有  $c_i$  是待定系数,  $m < \binom{n+3}{3}$ . 我们想让  $f$  最小平方逼近给定的点集  $PS = \{p_i | 1 \leq i \leq k\}$ , 即要解决最优化问题:

$$\min_{c, f} \frac{\sum_{i=1}^k f^2(p_i)}{|f|^2}.$$

设向量  $c = (c_1, c_2, \dots, c_m)$ , 那么上面的最优化问题写成矩阵形式为

$$\min_c \frac{c A c'}{c B c'} \quad (4)$$

其中矩阵  $A, B$  是由点集  $PS$  和多项式  $B_i$  确定, 并且满足  $c A c' = \sum_{i=1}^k f^2(p_i)$ ,  $c B c' = |f|^2$ .

**命题 3.**  $A$  是半正定矩阵,  $B$  是正定矩阵.

**证明.** 关于  $A$  的半正定性与命题 2 的证明类似, 下面给出  $B$  正定性的证明. 对于任意的向量  $c = (c_1, c_2, \dots, c_m) \in \mathbb{R}^m$ , 如果

$$c B c' = |f|^2 = 0,$$

可以推出  $f(x, y, z) = 0$ , 又因为多项式  $B_i$  是线性无关的, 所以  $c_i = 0$ , 即  $c = 0$ . 证毕.

$B$  是正定的, 设  $\lambda$  是矩阵  $M = (\sqrt{B})^{-1} A (\sqrt{B})^{-1}$  的最小特征值,  $ev$  是矩阵  $M$  对应于  $\lambda$  的特征向量. 当  $c = ev (\sqrt{B})^{-1}$ , 式(4)取得最小值  $\lambda$ .

下面的例子说明了以上方法的重要性.

**例 1.** Blend 两个大小不同的半球, 设

$$\begin{aligned} g_1 &= (x+2)^2 + y^2 + z^2 - 4, \quad h_1 = x+2, \\ g_2 &= (x-1)^2 + y^2 + z^2 - 1, \quad h_2 = x-1. \end{aligned}$$

根据第 2 节中构造 Blending 曲面的步骤, 这时需要计算理想

$$I = \langle g_1, h_1^3 \rangle \cap \langle g_2, h_2^3 \rangle.$$

在分次字典序下的 Gröbner 基  $G$ , 为此首先利用

$$\begin{aligned} & \langle g_1, h_1^3 \rangle \cap \langle g_2, h_2^3 \rangle \\ &= \langle w g_1, w h_1^3, (1-w) g_2, (1-w) h_2^3 \rangle \cap \mathcal{R}[x, y, z], \end{aligned}$$

可知

$$\begin{aligned} & \langle g_1, h_1^3 \rangle \cap \langle g_2, h_2^3 \rangle \\ &= \langle -8 + 12x + 6x^2 - 11x^3 - 3x^4 + 3x^5 + x^6, \\ & \quad -32 + 28x - 29x^2 + 27y^2 + 27z^2 - 4x^3 + 8x^4 + 2x^5 \rangle. \end{aligned}$$

由此可算出在  $x > y > z$  时的分次字典序下的 Gröbner 基  $G$  为

$$G = \{p_1, p_2, p_3\} \quad (5)$$

其中

$$\begin{aligned} p_1 &= -16 + 28x - 15x^2 + x^3 - 2x^4 + 9y^2 - 9xy^2 + 9z^2 \\ &\quad - 9xz^2, \\ p_2 &= -16 + 36x + 3x^2 - 5x^3 - 3y^2 - 15xy^2 - 6x^2y^2 + \\ &\quad 3z^2 - 15xz^2 - 6x^2z^2, \\ p_3 &= -16 + 12x - 3x^2 + x^3 + 21y^2 - 9xy^2 - 6y^4 + 21z^2 \\ &\quad - 9xz^2 - 12y^2z^2 - 6z^4. \end{aligned}$$

从式(5)中 Gröbner 基的表示可以看出, 构造  $GC^2$  的 Blending 曲面次数最低为 4 次, 且

$$f(x, y, z) = ap_1 - bp_2 - cp_3,$$

其中  $a, b, c$  是常数. 从上式我们知道代数 Blending 曲面  $f$  有两个自由度.

首先我们利用点插值技术来控制  $f$  的形状, 取点集  $PS = \left\{ \left(0, \frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right) \right\}$ , 得到代数 Blending 曲面

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= -\frac{105}{16}(-16 + 28x - 15x^2 + x^3 - 2x^4 + \\ &\quad 9y^2 - 9xy^2 + 9z^2 - 9xz^2) + \frac{83}{16}(-16 + \\ &\quad 36x + 3x^2 - 5x^3 + 3y^2 - 15xy^2 - 6x^2y^2 - \\ &\quad 3z^2 - 15xz^2 - 6x^2z^2) + (-16 + 12x - \\ &\quad 3x^2 + x^3 + 21y^2 - 9xy^2 - 6y^4 + 21z^2 - \\ &\quad 9xz^2 - 12y^2z^2 - 6z^4), \end{aligned}$$

图形效果见图 1.



图 1 两个半球  $GC^2$  连续的代数 Blending 曲面, 插值两点后的结果

然后我们用最小平方逼近技术来控制  $f$  的形状, 取点集

$$\begin{aligned} PS_1 &= \left\{ \left(0, \frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), \left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, 0\right), \right. \\ &\quad \left. \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), (-1, \sqrt{3}, 0), \right. \\ &\quad \left. \left(-\frac{4}{5}, \frac{8}{5}, 0\right), (-2 + \sqrt{2}, \sqrt{2}, 0) \right\}, \end{aligned}$$

最小平方逼近  $PS_1$  后得到代数 Blending 曲面的图形效果见图 2(a).

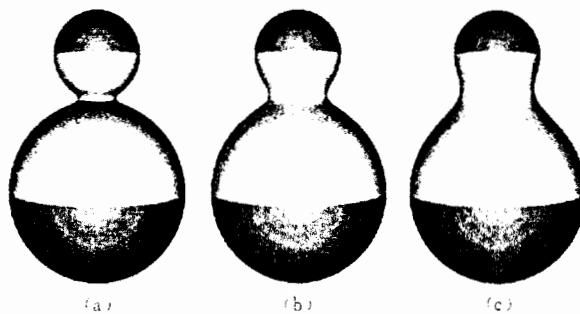


图 2 两个半球  $GC^2$  连续的代数 Blending 曲面, 最小平方逼近不同点集的效果

如果取点集

$$\begin{aligned} PS_2 &= \left\{ \left(0, \frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), \left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, 0\right), \right. \\ &\quad \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), (-1, \sqrt{3}, 0), \\ &\quad \left. \left(-\frac{4}{5}, \frac{8}{5}, 0\right), (-2 + \sqrt{2}, \sqrt{2}, 0) \right\}, \end{aligned}$$

最小平方逼近  $PS_2$  后得到代数 Blending 曲面的图形效果见图 2(b).

如果取点集

$$\begin{aligned} PS_3 &= \left\{ (0, 1, 0), \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), \left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, 0\right), \right. \\ &\quad (-1, \sqrt{3}, 0), \left(-\frac{4}{5}, \frac{8}{5}, 0\right), \\ &\quad \left. (-2 + \sqrt{2}, \sqrt{2}, 0) \right\}, \end{aligned}$$

最小平方逼近  $PS_3$  后得到代数 Blending 曲面的图形效果见图 2(c).

从图形能够看出来最小平方逼近中点集  $PS_i$  的变化对 Blending 曲面的影响, 因而可以通过点集  $PS_i$  的适当选取, 以得到满意的形状.

#### 4 茶壶表面造型示例

本节利用前面讨论的理论和方法, 详细介绍并

实现了茶壶的实体造型。壶盖是由3个四次的整体 $GC^2$ 连续的代数曲面拼接的，壶身是由2个二次的 $GC^1$ 连续的代数曲面拼接成的，壶嘴是由2个三次的 $GC^1$ 连续的代数曲面拼接成的，壶柄是1个四次的代数曲面。

#### 4.1 壶 盖

如图3所示，壶盖是用3个代数曲面片组成的。壶盖的下半部分 $f_3$ 是椭球的一部分，方程为

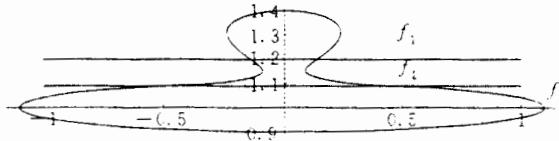


图3 壶盖的侧面图

$$f_3 = \frac{x^2 + y^2}{121} + (z - 1)^2 = \frac{1}{100}$$

壶盖的上半部分像个圆锥，所以壶盖的中间部分就是采用圆锥和下面的椭球 Blending 而成的。

设 $g_1 = f_3$ ,  $g_2 = [z - \frac{11}{10}]^2 - (x^2 + y^2)$ ,  $h_1 = z + \frac{109}{100}$ ,  $h_2 = z - \frac{6}{5}$ . 其中 $g_1$ 就是圆锥。通过计算理想 $\langle g_1, h_1 \rangle \cap \langle g_2, h_2 \rangle$ 的在分次字典序下的 Gröbner 基 $G$ , 取 $G$ 中的第2个元素作为 Blending 曲面 $f_2$ .

壶盖的上半部分 $f_1$ 的构造过程如下：由于 $f_1$ 和上面的圆锥 $g_1$ 是 $GC^2$ 连续的，所以 $f_1$ 有形式

$$f_1 = g_1 + a(x, y, z)[z - \frac{6}{5}]$$

其中 $a(x, y, z)$ 是一次多项式，这里我们取 $a(x, y, z)$ 为常数，让 $f_1$ 插值点 $p = [0, 0, \frac{7}{5}]$ ，得到 $a = \frac{45}{4}$ 。这里我们让 $f_1$ 和 $f_2$ 都和圆锥 $g_2$  $GC^2$ 光滑拼接，我们知道 $f_1$ 和 $f_2$ 是 $GC^2$ 连续的，这样我们就得到了四次的整体 $GC^2$ 连续的分为3片的茶壶盖。

#### 4.1.1 壶 身

壶身是用2个二次代数曲面 $GC^1$ 连续拼接而成，其中上半部分为 $f_1$ ，下半部分为 $f_2$ 。定做壶身时，先根据茶壶的大体形状及其中壶盖壶身的大致比例关系，我们选取壶身的下半部分为椭球

$$f_2 = \frac{9}{4}(x^2 + y^2) + \frac{25}{36}z^2 - 1,$$

$$-\frac{4}{5} \leq z \leq \frac{2}{5}.$$

定做好壶身的下半部分，那么上半部分 $f_1$ 就不能随便选取，因为 $f_1$ 既要和 $f_2$ 光滑拼接，又要和壶盖无缝拼

接。根据 $f_1$ 与 $f_2$ 光滑拼接，所以 $f_1$ 有如下形式：

$$f_1 = f_2 + a\left(z - \frac{2}{5}\right)^2,$$

其中 $a$ 是常数，因为这里我们只需要 $GC^1$ 连续。再根据 $f_1$ 与壶盖边缘连续，所以 $f_1$ 应该插值点 $p = (1, 1, 0, 1)$ 。求得 $a = -\frac{209}{324}$ 。这样壶身就制作完成了，我们得到由2个二次代数曲面拼接整体 $GC^1$ 光滑连续的壶身。

#### 4.1.2 壶 嘴

相对壶盖和壶身，壶嘴的定做要稍微麻烦些。我们希望用2个三次代数曲面片拼接来造型壶嘴表面，并且中间达到 $GC^1$ 连续。其中壶嘴下半部分首先插值两条代数曲线，然后最小平方逼近一些采样点。壶嘴的上半部分首先和下半部分光滑拼接，然后最小平方逼近一些采样点。

壶嘴下半部分插值的两条代数曲面，其中一条取自壶身，只有这样壶嘴和壶身才能拼接起来，方程为

$$\begin{aligned} c_1 &= S\left[\frac{9}{4}(x^2 + y^2) + \frac{25}{36}z^2 - 1, 13 - 9x + 2z\right] \\ &= S(pb1, h_1). \end{aligned}$$

另外一条是为了控制壶嘴的形状，我们让壶嘴插值曲线为

$$\begin{aligned} c_2 &= S\left[z - \frac{8}{3}(x - 2)^2 - 8y^2 - \frac{2}{9}x + \frac{8}{3}\left(z - \frac{6}{5}\right)\right] \\ &= S(kz, h_2). \end{aligned}$$

壶身下半部分的方程 $f_1$ 满足

$$f_1 \in I = \langle pb1, h_1 \rangle \cap \langle kz, h_2 \rangle,$$

通过计算理想 $I$ 在分次字典序下的 Gröbner 基，我们知道 $f_1$ 有如下形式：

$$\begin{aligned} f_1 &= (c + ax + bz)(624 - 627x + 135x^2 - 424z + \\ &\quad 330xz - 80z^2) + d(680076 - 412848x - \\ &\quad 511920y^2 - 3378216z + 2079360xz + \\ &\quad 842400y^2z + 2038490z^2 - 1928025xz^2 + \\ &\quad 1786300z^3) + e(1364325462 - 635590386x - \\ &\quad 4532653080y^2 - 1249360200xy^2 - \\ &\quad 6640121892z + 2973949920xz + \\ &\quad 4211514000y^2z - 2176205555z^2 + \\ &\quad 7235982650z^3), \end{aligned}$$

其中 $a, b, c, d, e$ 是待定常数，另外我们之所以取 $(c + ax + bz)$ 是因为壶嘴应该关于 $y$ 轴对称。为了唯一确定这些待定系数，我们让 $f$ 最小平方逼近点集 $PS = \{(1.6, 0, 0.15), (1.8, 0, 0.2), (1.7, 0, 0.17), (1.9, 0, 0.25), (1.5, 0, -0.54)\}$ ，

$\{2.2, 0, 0.05\}, \{1.7, 0, -0.45\},$   
 $\{1.9, 0, -0.33\}, \{2.1, 0, -0.1\}\}$ ,

得到  $f_1$  的表达式:

$$f_1 = -0.382086 + 0.671121x - 0.390428x^2 + 0.0748303x^3 - 0.124559y^2 + 0.093717xy^2 - 0.27378z + 0.346645xz - 0.10528x^2z - 0.0386148y^2z - 0.0905839z^2 + 0.062592xz^2 - 0.038205z^3.$$

壶嘴的上半部分和下半部分光滑拼接, 所以有形式

$$f_2 = af_1 + \left| x + \frac{8}{3} \right| \left| z - \frac{6}{5} \right|^2 (c + ax + bz),$$

其中  $a, a, b, c$  是待定常数. 让  $f_2$  最小平方逼近点集  $PS = \{(2.4, 0, 0.55), (2.6, 0, 0.85),$

$\{2.8, 0, 1.01\}, \{3.0, 0, 1.1\}, \{2.1, 0, 0.67\},$   
 $\{2.2, 0, 0.85\}, \{2.4, 0, 1.02\}, \{2.65, 0, 1.1\},$   
 $\{2.2, 0, 0.85\}, \{2.4, 0, 1.02\}\}$ ,

得到壶嘴上半部分, 这样我们就得到了由 2 个三次代数曲面片  $GC^1$  连续拼接的壶嘴.

最后壶柄取的是 1 个四次代数曲面, 整体的造型效果见图 4.

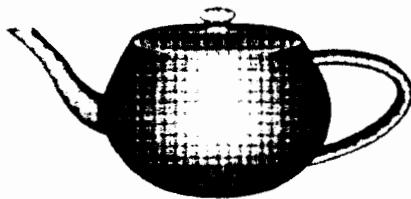


图 4 茶壶的整体效果



**LOU Wen-Ping**, male, born in 1975, received his M. S. degree from the University of Science and Technology of China in 2000. His research interests include computer aided geometric design and computer graphics.

**FENG Yu-Yu**, male, born in 1940, is currently a professor and Ph. D. supervisor in the Department of Mathematics, University of Science and Technology of China. His research interests include computer aided geometric design,

## 5 结 论

本文提出了用 Gröbner 基方法构造代数 Blending 曲面的方法, 该方法不仅能求出所有的代数 Blending 曲面, 并且能够求出次数最低的 Blending 曲面, 另外该方法对截曲面并没有特殊要求, 也可以推广到构造高阶几何连续的代数 Blending 曲面情形.

## 参 考 文 献

- 1 Warren J. Blending quadric surfaces with quadric and cubic surfaces. In: Proc the 3rd Symposium on Computation Geometry, ACM, New York, 1987. 341–347
- 2 Warren J. Blending algebraic surfaces. ACM Trans Graphics, 1989, 8(4): 263–278
- 3 Bajaj C L, Ihm I. Algebraic surface design with Hermite interpolation. ACM Trans Graphics, 1992, 11(1): 61–91
- 4 Wu W-T, Wang D-K. On the algebraic surface-fitting problem in CAGD. Mathematics in Practice and Theory, 1994, 3: 25–31
- 5 Wu T-R, Gao W-G, Feng G-C. Blending of implicit algebraic surfaces. In: Proc the ASCM, 1995. 125–131
- 6 Cox D, Little J, O’Shea D. Ideals, Varieties and Algorithm. New York: Springer-Verlag, 1992
- 7 Adams W W, Loustaunau P. An introduction to Gröbner bases. Graduate Studies in Mathematics. AMS, Providence, 1994
- 8 Becker T, Weispfenning V. Gröbner bases, a computational approach to commutative algebra. In: Graduate Texts in Mathematics(141). Springer-Verlag, 1993

computer graphics, applied approximation theory.

**CHEN Fa-Lai**, male, born in 1966, is currently a professor and Ph. D. supervisor in the Department of Mathematics, University of Science and Technology of China. His research interests include computer aided geometric design and computer graphics.

**DENG Jian-Song**, male, born in 1971, is currently a associate professor in the Department of Mathematics, University of Science and Technology of China. His research interests include computer aided geometric design and computer graphics.