

一种平面保凸插值构造光滑曲线的方法

邓建松 冯玉瑜

(中国科学技术大学数学系)

摘要

A. Mehaute 和 F. Utreras(1994)给出了一种平面函数型保凸插值构造光滑曲线的方法(以下简称为M-U方法).本文在利用其方法本质的基础上,给出了一种平面上参数型保凸插值构造光滑曲线的方法,同 Mehaute 和 Utreras 的方法一样,这里的方法也有局部性.另外这种方法还可以构造平面上的封闭曲线.

关键词 插值,保凸,光滑曲线.

分类号 (中图)TP391.72; (1991MR)68U07,41A05.

前言

在计算机辅助几何设计(CAGD)和计算机图形学中,曲线和曲面的构造与生成是非常重要的研究课题之一.其中曲线的构造是生成曲面的前提.因此有很多学者和专家在这方面作出了杰出的贡献.在所有的构造曲线的方法中,大致可分为两大类,一种是不要求插值于数据点,而是把其作为控制点,从而构造曲线,这其中最为著名的是七十年代初期的法国工程师 P. Bézier 给出的方法^[2].给定平面或空间上的几个点,利用 Bézier 方法可以快速地绘出一条只插值于首末两数据点的光滑曲线.而且这种方法构造的曲线具有保形性,即当给定的数据点为凸的时,得出的曲线也是凸的.虽然这种方法已得到广泛应用,但由于控制点一般不在曲线上,因此这也给实际应用带来了一定的不便.

针对这种缺陷,在[1]中给出了一种构造插值型曲线的方法,我们在下面一节中将扼要介绍其方法.但其得到的曲线是函数型的,即在 y 方向是单值的,给实际应用带来了一定的限制.本文利用其方法的本质,给出了一种构造插值于平面任意给定的 n 个点的光滑曲线的

本文1997年11月3日收到.

国家自然科学基金(19771076)和教委博士点基金资助.

方法,即所谓参数型的方法.

§ 1 M-U 方法简介

给定平面 \mathbf{R}^2 上 n 个点 $P_i = (x_i, y_i)$ ($i=1, 2, \dots, n$), 这里 $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, 要构造出一光滑函数 f 插值于 P_i , 即 $y_i = f(x_i)$, $i=1, 2, \dots, n$. 下面是[1]中给出的插值细分迭代方法, 并且可以证明在一般情况下, 若迭代的第 k 步得到的函数记为 $f^{(k)}$, 则有 $f^{(k)} \rightarrow f$ (一致), $k \rightarrow \infty$. 其中函数 f 满足: (i) 插值; (ii) 光滑. (见[1]中 Theorem 3.4).

设

$$N_0 = n, N_k = 2N_{k-1} - 1 (k = 1, 2, \dots), \quad (1.1)$$

这里 N_k 就是迭代的第 k 步中所有数据点数.

设第 k 步迭代后数据点是 $(x_i^{(k)}, y_i^{(k)})$, $i=1, 2, \dots, N_k$. 其中

$$(x_i^{(0)}, y_i^{(0)}) = (x_i, y_i), \quad i = 1, 2, \dots, N_0 = n.$$

$f^{(k)}$ 为顺次连接 $(x_i^{(k)}, y_i^{(k)})$, $i=1, 2, \dots, N_k$ 的折线段. 下面是如何由 $(x_i^{(k)}, y_i^{(k)})$, $i=1, 2, \dots, N_k$ 生成 $(x_i^{(k+1)}, y_i^{(k+1)})$, $i=1, 2, \dots, N_{k+1}$ 的方法.

取

$$h_i^{(k)} = x_{i+1}^{(k)} - x_i^{(k)}, \quad i = 1, 2, \dots, N_k - 1, \quad (1.2)$$

$$\Delta_i^{(k)} = \frac{y_{i+1}^{(k)} - y_i^{(k)}}{h_i^{(k)}}, \quad i = 1, 2, \dots, N_k - 1. \quad (1.3)$$

$\omega_i^{(k)}$ ($i=1, 2, \dots, N_k$) 为给定的权, $0 \leq \omega_i^{(k)} \leq 1$, 记

$$d_i^{(k)} = \omega_i^{(k)} \Delta_{i-1}^{(k)} + (1 - \omega_i^{(k)}) \Delta_i^{(k)}, \quad i = 2, 3, \dots, N_k - 1. \quad (1.4)$$

另取 $d_1^{(k)}, d_{N_k}^{(k)}$ 可以任意选取, 当然不同的选取所生成的曲线在端点处形状不同.

取

$$x_{2i-1}^{(k+1)} = x_i^{(k)}, \quad y_{2i-1}^{(k+1)} = y_i^{(k)}, \quad i = 1, 2, \dots, N_k. \quad (1.5)$$

对 $i=1, 2, \dots, N_{k-1}$, 作

$$\begin{cases} L_i^{(k)} = y_i^{(k)} + d_i^{(k)}(x - x_i^{(k)}), \\ L_{i+1}^{(k)} = y_{i+1}^{(k)} + d_{i+1}^{(k)}(x - x_{i+1}^{(k)}), \end{cases} \quad x \in \mathbf{R} \quad (1.6)$$

情形1 在区间 $(x_i^{(k)}, x_{i+1}^{(k)})$ 中存在 $L_i^{(k)} = L_{i+1}^{(k)}(x)$ 的唯一解, 记为 $\tilde{x}_i^{(k)}$. 取

$$x_{2i}^{(k+1)} = \tilde{x}_i^{(k)}, \quad (1.7)$$

$$y_{2i}^{(k+1)} = \alpha(y_i^{(k)} + \Delta_i^{(k)}(\tilde{x}_i^{(k)} - x_i^{(k)})) + (1 - \alpha)L_i^{(k)}(\tilde{x}_i^{(k)}),$$

这里 $0 < \alpha < 1$ 为一控制曲线形状的伸张系数.

情形2 $x_i^{(k)}$ 或 $x_{i+1}^{(k)}$ 为 $L_i^{(k)}(x) = L_{i+1}^{(k)}(x)$ 的解, 取

$$x_{2i}^{(k+1)} = \frac{1}{2}(x_i^{(k)} + x_{i+1}^{(k)}), \quad y_{2i}^{(k+1)} = \frac{1}{2}(y_i^{(k)} + y_{i+1}^{(k)}). \quad (1.8)$$

情形3 在 $[x_i^{(k)}, x_{i+1}^{(k)}]$ 中 $L_i^{(k)}(x) = L_{i+1}^{(k)}(x)$ 无解, 取

$$x_{2i}^{(k)} = \frac{1}{2}(x_i^{(k)} + x_{i+1}^{(k)}),$$

$$\hat{y}_i^{(k)} = \frac{1}{2}(y_i^{(k)} + y_{i+1}^{(k)}), \quad (1.9)$$

$$y_{2i}^{(k+1)} = \alpha \hat{y}_i^{(k)} + (1 - \alpha) \tilde{y}_i^{(k)},$$

这里 $\tilde{y}_i^{(k)}$ 为 $L_i^{(k)}(x_{2i}^{(k+1)})$, $L_{i+1}^{(k+1)}(x_{2i}^{(k+1)})$ 两者中满足下面等式的那一个:

$$|\tilde{y}_i^{(k)} - \hat{y}_i^{(k)}| = \min\{|L_i^{(k+1)}(x_{2i}^{(k+1)}) - \hat{y}_i^{(k)}|, |L_{i+1}^{(k)}(x_{2i}^{(k+1)}) - \hat{y}_i^{(k)}|\}.$$

注 由[1]中 Theorem 3.4 可知, 当所取 α 满足

$$\max[\alpha, 2(1 - \alpha)] < 1$$

时, 在一般情况下, 存在一个处处可微的函数 f , $f^{(k)} \rightarrow f$ (一致), $k \rightarrow \infty$.

§ 2 点集的凸性

为了后面讨论的方便, 这里首先对所要根据位置而加以区别对待的点给出如下几个定义和判别方法.

定义2.1 给定 \mathbf{R}^2 上四个点 P_1, P_2, P_3, P_4 , 称这四个点是位置凸的, 若 P_1 和 P_4 位于过 P_2, P_3 的直线的同侧, 或者退化为至少有一点位于这条直线上.

为便于应用, 下面给出一个四个给定点位置凸的充要条件.

引理2.2 设向量 $Q_i = P_{i+1} - P_i$, $i = 1, 2, 3$, 则 P_1, P_2, P_3, P_4 位置凸当且仅当 $Q_1 \times Q_2$ 与 $Q_2 \times Q_3$ 同向, 或者至少有一个为零向量, 这里的外积 \times 是把 \mathbf{R}^2 中向量看作 \mathbf{R}^3 中的第三个分量为零的向量进行的(下同).

证明 显然 P_1 或 P_4 位于过 P_2 和 P_3 直线上等价于向量 $Q_1 \times Q_2$ 或 $Q_2 \times Q_3$ 为零向量. 下设 P_1 和 P_4 都不位于过 P_2 和 P_3 直线上, 平移向量 Q_1 至起点为 P_3 , 设其终点为 P'_2 , 则

P_1, P_2, P_3 和 P_4 位置凸 $\Leftrightarrow P'_2$ 和 P_4 分别位于过 P_2 和 P_3 直线的两侧.

至此由外积的定义, 可知命题成立.

若我们把点的坐标代入外积运算中, 则有如下结果:

引理2.3 设 P_i 的坐标为 (x_i, y_i) , $i = 1, 2, 3, 4$, 则 P_1, P_2, P_3, P_4 位置凸当且仅当

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_2) - (x_3 - x_2)(y_2 - y_1)$$

与

$$(x_3 - x_2)(y_4 - y_3) - (x_4 - x_3)(y_3 - y_2)$$

同号, 或者有一个为零.

鉴于此, 下面我们就用 $(x_2 - x_1)(y_3 - y_2) - (x_3 - x_2)(y_2 - y_1)$ 代替向量 $Q_1 \times Q_2$, 并仍记为 $Q_1 \times Q_2$, 其余类似.

定义2.4 给定 \mathbf{R}^2 上 n 个点 P_i ($i = 1, 2, \dots, n$), $n \geq 4$, 称其是位置凸的, 若

$$\{Q_i \times Q_{i+1}, i = 1, 2, \dots, n-2\}$$

的强符号改变为零, 这里 $Q_i = P_{i+1} - P_i$, $i = 1, 2, \dots, n-2$.

定义2.5 设 $\{P_i\}_{i=1}^4$ 为 \mathbf{R}^2 中位置凸的四点. 若 $\angle P_1 P_2 P_3 \geq 90^\circ$, $\angle P_4 P_3 P_2 \geq 90^\circ$ 且至少有一不等式严格成立, 则称 $\{P_i\}_{i=1}^4$ 是正则位置凸的(见图1(a)), 否则称为奇异位置凸的.

$\{P_i\}_{i=1}^4$ 为奇异位置凸的可分为如下两类:

i) 过 P_1 和 P_2 的直线与过 P_3 和 P_4 的直线交点唯一, 且交点与 P_1, P_4 都位于过 P_2 和 P_3 直

线的同侧,如图1(b)所示,则称 $\{P_i\}_{i=1}^4$ 为第一型奇异位置凸的.

ii)过 P_1 和 P_2 的直线与过 P_3 和 P_4 的直线平行(但不重合)或存在唯一的交点,且交点与 P_1, P_4 分别位于过 P_2, P_3 直线的两侧,同时 $\min(\angle P_1 P_2 P_3, \angle P_4 P_3 P_2) < 90^\circ$,如图1(c)所示,则称 $\{P_i\}_{i=1}^4$ 为第二型奇异位置凸的.

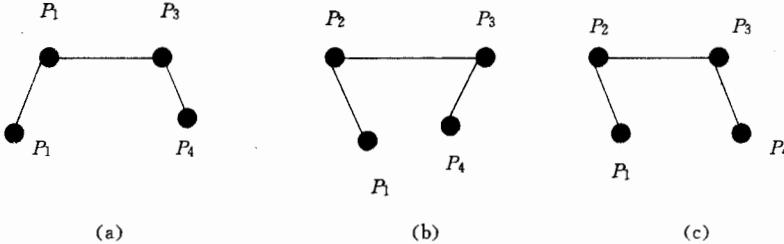


图1

由上述定义很容易证明下面的定理,它可以用来判断三种位置凸性:

定理2.6 若 P_1, P_2, P_3, P_4 是位置凸的, $P_1 \neq P_3$,考虑 Q_1, Q_2 和 Q_3 :

- 1) $Q_1 \cdot Q_2 \geq 0, Q_2 \cdot Q_3 \geq 0$,且至少有一不等式严格成立 $\Leftrightarrow P_1, P_2, P_3, P_4$ 正则位置凸;
- 2) 若 $Q_1 \cdot Q_2$ 和 $Q_2 \cdot Q_3$ 中至少有一个小于零,则

- i) $Q_1 \times Q_3 > 0 \Leftrightarrow P_1, P_2, P_3, P_4$ 第一型奇异位置凸;
- ii) $Q_1 \times Q_3 \leq 0 \Leftrightarrow P_1, P_2, P_3, P_4$ 第二型奇异位置凸.

下面给出两个引理,用它们可以对数据进行预处理,从而使原始数据更规范.

引理2.7 若 P_1, P_2, P_3, P_4 为第一型奇异位置凸,则可增加一个点 P ,使 P_1, P_2, P, P_3 和 P_2, P, P_3, P_4 为正则位置凸或第二型奇异位置凸.

证明 过 P_2 作过 P_3 和 P_4 的直线的平行线,过 P_3 作过 P_1 和 P_2 的直线的平行线.设两者交于 P' (由第一型奇异位置凸的定义,交点必存在),在 $\triangle P'P_2P_3$ 中任取一点,都可以作为所要求的 P .

特别地,在连结 P' 和 P_2, P_3 中点的线段上,取一点作为 P ,这就是我们后面对数据预处理的一部分.

引理2.8 若 P_1, P_2, P_3, P_4 为第二型奇异位置凸,则可增加一个点 P ,使得 P_1, P_2, P, P_3 和 P_2, P, P_3, P_4 都为正则位置凸.

证明 不妨设向量 Q_1 与 Q_2 的夹角为钝角,令 P_2 在过 P_3 和 P_4 的直线上的投影为 P' ,过 P_2 的垂直于 P_1P_2 的直线与过 P_3 和 P_4 的直线的交点为 P'' ,在 $\triangle P'P''P_2$ 中任取一点就可以作为 P .

特别地,取 P 为 $\triangle P'P''P_2$ 的重心,这也就是我们后面对数据预处理的另一部分.

§ 3 参数型方法

给定平面 \mathbf{R}^2 上 n 个点 $P_i (i=1, 2, \dots, n)$, $P_i \neq P_{i+1}$.由定理2.6的判别法和引理2.7,2.8提供的数据预处理方法,不妨设 $P_i (i=1, 2, \dots, n)$ 中无第一、第二型奇异位置凸的相邻四点组.另外为后面方法引入方便,此处假设任意给定一点 $P_i (3 \leq i \leq n-3)$,在 $P_{i-3}, P_{i-2}, P_{i-1}$,

P_i 和 $P_i, P_{i+1}, P_{i+2}, P_{i+3}$ 中存在顺次四点是正则位置凸的.

如下迭代构造出一条顺次过 P_1, P_2, \dots, P_n 的曲线.

设 $\{Q_i \times Q_{i+1}, i=1, 2, \dots, n\}$ 的强符号改变为 m , 如下定义 N_k (这与(1.1)中的定义不同)

$$N_0 = n, N_k = 2N_{k-1} + m, k = 1, 2, \dots. \quad (3.1)$$

记第 k 步迭代后数据点为

$$P_i^{(k)}, i = 1, 2, \dots, N_k.$$

$f^{(k)}$ 为顺次连接 $P_i^{(k)}, i=1, 2, \dots, N_k$ 的折线段. 同 M-U 方法一样, 此时仍取

$$P_i^{(0)} = P_i, i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.2)$$

另外可以自由选取 $P_0^{(k)}, P_{N_k+1}^{(k)}$ 以控制曲线在端点附近的形状. 方法的关键是如何由 $P_i^{(k)} (i=1, 2, \dots, N_k)$ 生成 $P_i^{(k+1)} (i=1, 2, \dots, N_{k+1})$. 我们下面用计算机伪码语言介绍加细方法.

对 $k=1, 2, \dots$, 令 $i=1, j=1$. 考察 $P_{i-1}^{(k)}, P_i^{(k)}, P_{i+1}^{(k)}$ 和 $P_{i+2}^{(k)}$ 四点.

情形1 $P_{i-1}^{(k)}, P_i^{(k)}, P_{i+1}^{(k)}$ 和 $P_{i+2}^{(k)}$ 是正则位置凸的, 取

$$P_j^{(k+1)} \leftarrow P_i^{(k)}, P_{j+2}^{(k+1)} \leftarrow P_{i+1}^{(k)}. \quad (3.3)$$

令

$$\begin{aligned} M_i^{(k)} &= 2P_i^{(k)} - P_{i-1}^{(k)}, \\ \tilde{M}_i^{(k)} &= \omega_i^{(k)} M_i^{(k)} + (1 - \omega_i^{(k)}) \frac{1}{2} (P_i^{(k)} + P_{i+1}^{(k)}), \end{aligned} \quad (3.4)$$

这里 $\omega_i^{(k)} (i=1, 2, \dots, N_k)$ 为给定的权, $0 < \omega_i^{(k)} < 1$. 设 $L_i^{(k)}(t)$ 为过 $P_i^{(k)}$ 和 $\tilde{M}_i^{(k)}$ 的直线, 即

$$L_i^{(k)}(t) = P_i^{(k)} + t(\tilde{M}_i^{(k)} - P_i^{(k)}).$$

考虑直线 $L_i^{(k)}(t)$ 与 $L_{i+1}^{(k)}(t)$ 的交点, 并设若有唯一交点, 则交点对应于 $L_i^{(k)}(t)$ 与 $L_{i+1}^{(k)}(t)$ 的参数值分别是 $t_i^{(k)}$ 与 $s_i^{(k)}$.

情形1.1 (如图2) 有唯一的交点, 且 $t_i^{(k)} > 0, s_i^{(k)} < 0$.

令 $\hat{P}_i^{(k)}$ 为 $L_i^{(k)}(t_i^{(k)})$ 在过 $P_i^{(k)}$ 和 $P_{i+1}^{(k)}$ 的直线上的投影, 取

$$P_{i+1}^{(k+1)} \leftarrow \alpha \hat{P}_i^{(k)} + (1 - \alpha) L_i^{(k)}(t_i^{(k)}), \quad (3.5)$$

这里 $0 < \alpha < 1$ 同 M-U 方法一样也是控制曲线形状的伸张系数.

情形1.2 若有无穷解, 或者 $t_i^{(k)} \cdot s_i^{(k)} = 0$, 取

$$P_{j+1}^{(k+1)} \leftarrow \frac{1}{2} (P_i^{(k)} + P_{i+1}^{(k)}). \quad (3.6)$$

在处理完情形1的两种情形后令 i 增1, j 增2, 重新回到方法的开始, 考察接下面的四点.

情形2 (如图3) $P_{i-1}^{(k)}, P_i^{(k)}, P_{i+1}^{(k)}$ 和 $P_{i+2}^{(k)}$ 非位置凸. 取

$$P_j^{(k+1)} \leftarrow P_i^{(k)}, P_{j+3}^{(k+1)} \leftarrow P_{i+1}^{(k)}, \quad (3.7)$$

$L_i^{(k)}(t)$ 和 $L_{i+1}^{(k)}(t)$ 的定义与情形1.1 中的相同. 设 $L_i^{(k)}(t)$ 与过 $\frac{3}{4}P_i^{(k)} + \frac{1}{4}P_{i+1}^{(k)}$ 垂直于 Q_i 的直线交于 $\bar{P}_i^{(k)}$, 取

$$P_{j+1}^{(k+1)} \leftarrow \alpha \left(\frac{3}{4}P_i^{(k)} + \frac{1}{4}P_{i+1}^{(k)} \right) + (1 - \alpha) \bar{P}_i^{(k)}, \quad (3.8)$$

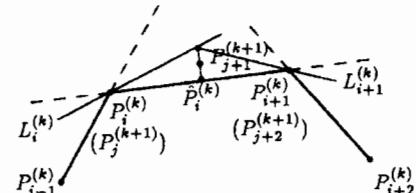


图2 情形1.1的示意

设 $L_{i+1}^{(k)}(t)$ 与过 $\frac{1}{4}P_i^{(k)} + \frac{3}{4}P_{i+1}^{(k)}$ 垂直于 Q_i 的直线交于 $\tilde{P}_i^{(k)}$, 取

$$P_{j+2}^{(k+1)} \leftarrow \alpha \left(\frac{1}{4}P_i^{(k)} + \frac{3}{4}P_{i+1}^{(k)} \right) + (1 - \alpha)\tilde{P}_i^{(k)}. \quad (3.9)$$

$j \leftarrow j+3$, 使 i 增1, 重新回到方法的开始.

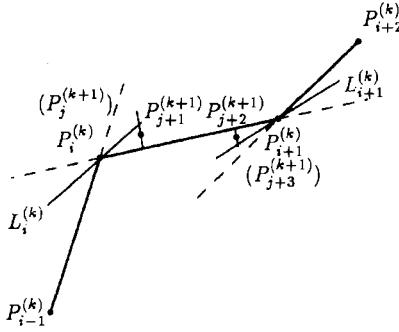


图3 情形2的示意

注 1) 显然每步迭代形成的曲线都具有插值性, 而且具有局部性. 这是因为每次迭代都把前一次的数据作为新数据的一部分, 而每一个新增加的点, 仅与邻近的四个点有关.

2) 对 $P_0^{(k)}, P_{N_k+1}^{(k)}$, 我们完全可以自由选择. 虽然取

$$P_0^{(k)} = P_0 = 2P_1 - P_2, P_{N_k+1}^{(k)} = P_{n-1} = 2P_n - P_{n-1}$$

是比较自然的, 但这会使得曲线的首末一段是直线. 通常可以取 P_0 和 P_{n+1} 使得与其相邻的三点一起构成正则位置凸. 另外若

$$P_n = P_1, P_0 = P_{n-1}, P_{n+1} = P_2,$$

而且迭代的第 k 步中

$$P_{N_k+1}^{(k)} = P_1^{(k)}, P_0^{(k)} = P_{N_k-1}^{(k)},$$

则我们可以构造一条封闭的曲线, 它具有插值性, 局部性.

3) 对 $\omega_i^{(k)}$ 的选择, 有两种比较自然的方法:

$$\omega_i^{(k)} = \frac{1}{2},$$

或者

$$\omega_i^{(k)} = \frac{l_{i-1,i}^{(k)}}{l_{i-1,i}^{(k)} + l_{i,i+1}^{(k)}},$$

这里 $l_{i,i+1}^{(k)}$ 表示线段 $P_i^{(k)}P_{i+1}^{(k)}$ 的长度.

4) 从我们的设计方法可知, 过 $P_i^{(k)}$ 的直线 $L_i^{(k)}$ 并不关于 $P_{i-1}^{(k)}$ 和 $P_{i+1}^{(k)}$ 对称, 因此该方法对具有某种对称性的数据点, 构造的曲线一般不能充分表现这种对称性, 因此可考虑再构造一过 $P_i^{(k)}$ 的直线

$$\hat{L}_i^{(k)} = P_i^{(k)} - t \left[\omega_i^{(k)}(2P_i^{(k)} - P_{i+1}^{(k)}) + (1 - \omega_i^{(k)}) \frac{1}{2}(P_{i-1}^{(k)} + P_i^{(k)}) - P_i^{(k)} \right]. \quad (3.10)$$

用新的过 $P_i^{(k)}$ 的直线 $\frac{1}{2}(L_i^{(k)} + \hat{L}_i^{(k)})$ 代替方法中的 $L_i^{(k)}$.

5) 在方法的情形2中, 有可能出现非正则位置凸的四点, 对此有如下两种方法解决:

i) 再次应用数据预处理的方法, 但这要改变 N_k 的定义.

ii) 适当选取 $\omega_i^{(k)}, \omega_{i+1}^{(k)}$, 容易验证若 $L_i^{(k)}$ 与 Q_i 的夹角小于其与 Q_{i-1} 的夹角, $L_{i+1}^{(k)}$ 与 Q_i 的夹角小于其与 Q_{i+1} 的夹角, 则不会出现非正则位置凸的相邻四点.

由我们的构造方法显然易得如下的保凸性定理:

定理3.1 $\{Q_i^{(k)} \times Q_{i+1}^{(k)}, i=1, 2, \dots, N_k-1\}$ 的强符号改变不随迭代次数的增加而改变, 这里

$$Q_i^{(k)} = P_{i+1}^{(k)} - P_i^{(k)}.$$

§ 4 光滑性

定义4.1 任意固定 $k_0 \geq 0$, 再给定 $i_0 (1 \leq i_0 \leq N_{k_0})$, 设第 $k (k \geq k_0)$ 步迭代中与 $P_{i_0}^{(k_0)}$ 临近的前后两点是 $A_1^{(k)}$ 和 $A_2^{(k)}$, 用 $\beta_{i_0}^{(k)}$ 表示向量 $P_{i_0}^{(k_0)} - A_1^{(k)}$ 与 $A_2^{(k)} - P_{i_0}^{(k_0)}$ 的夹角, 若有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \beta_{i_0}^{(k)} = 0,$$

则称迭代形成的折线列 $\{f^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ 具有光滑的极限.

定义4.2 称 $P_i^{(k)}$ 为 IBP(imposed break point)点, 若 $P_{i-1}^{(k)} = P_{i+1}^{(k)}$ 或者 $P_{i-1}^{(k)}$ 位于过 $P_{i-2}^{(k)}$ 和 $P_i^{(k)}$ 的直线上, 并且 $P_{i+1}^{(k)}$ 位于过 $P_i^{(k)}$ 和 $P_{i+2}^{(k)}$ 的直线上.

此处的 IBP 定义, 是文[1]中 IBP 定义的自然推广.

为了证明迭代的曲线列具有光滑的极限, 先陈述如下一个简单的引理:

引理4.1 若 $0 \leq a, b \leq \frac{\pi}{2}$, $0 < \alpha < 1$, $\sin \alpha \leq \alpha \sin b$, 则 $a \leq \alpha b$.

定理4.1 设 $0 < \alpha < 1$, 给定的数据点经预处理后无 IBP 点, 则形成的折线列具有光滑的极限.

证明 如定义4.1中要求取 k_0 和 i_0 , 由构造新点的方法, 不妨设 $P_{i_0-2}^{(k_0)}, P_{i_0-1}^{(k_0)}, P_{i_0}^{(k_0)}, P_{i_0+1}^{(k_0)}$ 位置凸. 由假设, 这种凸性只能是正则位置凸或者退化情形(即 $P_{i_0-2}^{(k_0)}$, 或 $P_{i_0+1}^{(k_0)}$ 位于过 $P_{i_0-1}^{(k_0)}$, 和 $P_{i_0}^{(k_0)}$ 的直线上). 对前一种情形, 由构造的方法, 任意给定的 $k \geq k_0$, 存在 $0 \leq \eta_1^1, \eta_2^1, \eta_1^2, \eta_2^2 \leq \frac{\pi}{2}$, 满足:

i) $\beta_{i_0}^{(k)} = \eta_1^1 + \eta_2^1$, $\beta_{i_0}^{(k+1)} = \eta_1^2 + \eta_2^2$;

ii) $\sin \eta_1^2 \leq \alpha \sin \eta_1^1$, $\sin \eta_2^2 \leq \alpha \sin \eta_2^1$.

由引理4.1及 ii) 可得

$$\eta_1^2 \leq \alpha \eta_1^1, \quad \eta_2^2 \leq \alpha \eta_2^1,$$

从而有

$$\beta_{i_0}^{(k+1)} \leq \alpha \beta_{i_0}^{(k)}.$$

即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \beta_{i_0}^{(k)} = 0.$$

对后一种情况, 可类似讨论. 命题成立.

§ 5 例子

下面给出两个例子, 图4左面给出的是由 $\{P_i\}_{i=1}^9$ 及两个端点条件 P_0 和 P_{10} 连成的折线. 而右边则是经6次细分后的折线, 其中的 $\omega_i^{(k)} = 0.35$, $\alpha = 0.4$, 而图5是经6次细分后的封闭折线的例子, 这里同样 $\omega_i^{(k)} = 0.35$, $\alpha = 0.4$.

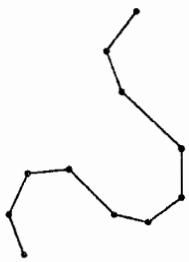


图4 一个任意给定数据点的例子

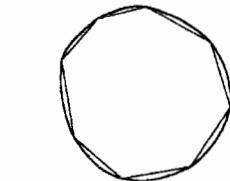
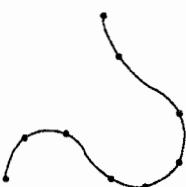


图5 一条封闭曲线的例子

(本文作者通讯地址:合肥市中国科技大学数学系 邮码 230026)

参 考 文 献

- [1] Le Mehaute, A. & Utreras, F., Convexity-preserving interpolatory subdivision. *CAGD* 11(1994), 17-37.
- [2] Boehm, W., Farin, G. & Kahmann, J., A survey of curve and surface methods in CAGD, *CAGD*, 1 (1984), 1-60.

A METHOD TO CONSTRUCT A SMOOTH CONVEXITY-PRESERVING PARAMATRIC-LIKE CURVE THROUGH INTERPOLATORY SUBDIVISION

Deng Jiansong Feng Yuyu

(Dept. of Math., University of Science and Technology of China, Hefei 230026)

Abstract

Mehaute and Utreras (1994) proposed a method to construct a smooth convexity-preserving function planar curve through interpolatory subdivision. In this paper, with the advantage of the essence of their method a method to construct a planar parametric-like curve is given. Using this method in this paper can also create a closing curve.

Key Words Interpolation, Convexity-preserving, Smooth Curve.

Subject Classification (CL)TP391.72; (1991MR)68U07, 41A05.