

球形控制点的 Bézier 曲面的降阶逼近^{*}

吴 卉, 邓建松

(中国科学技术大学数学系, 安徽合肥 230026)

摘要:讨论了球形控制点的 Bézier 曲面的降阶逼近问题. 为了简单起见, 只考虑了从次数 (m, n) 到次数 $(m-1, n)$ 的降阶逼近. 在逼近过程中, 要求低阶球形控制点的 Bézier 曲面包含原来的实体, 同时两者的差别在某种意义上尽可能的小. 分别针对插值边界, 不插值边界情况在两种范数下给出了问题的解析解, 并且给出了逼近误差的界.

关键词:球形控制点; 区间 Bézier 曲面; 降阶逼近

中图分类号:TP391; O241.5 **文献标识码:**A

AMS Subject Classification (2000):Primary 41A10; Secondary 68U07

Degree reduction of ball control point Bézier surfaces

WU Hui, DENG Jian-song

(Department of Mathematics, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China)

Abstract: The problem of degree reduction of ball control point Bézier surfaces was discussed. For simplicity, only the degree reduction from (m, n) to $(m-1, n)$ was considered. In the approximation process, it was required that the lower-degree ball control point Bézier surface enclosed the given surface, and at the same time, their differences were to be minimized as soon as possible. Solution to these problems were given, along with error analyses with and without interpolating endpoint conditions, respectively.

Key words: ball control points; interval Bézier surfaces; degree reduction

0 引言

在计算机图形学、计算机辅助几何设计 (computer aided geometry design, CAGD) 中, 我们通常采用 Bézier 曲线和曲面表示几何形体, 因为这种表示具有许多优势, 例如仿射不变性, 凸包性质等. 但是由于计算机浮点运算的特征以及数值算法的近似解等原因, 一般得到的曲线和曲面是不精确的, 而对基于这种不精确表示的几何形体进行操作时, 无法

保证得到稳定的解. 例如, 计算两条 Bézier 曲线的交, 基于浮点运算无法稳定地计算出切点或者离切点很近的交点. 因此, 在计算机图形学和 CAGD 中采用“区间曲线”与“区间曲面”的概念, 即控制顶点为区间或者区间的张量积^[1~3]. 在二维空间中, 控制顶点为矩形, 而在三维空间中, 控制顶点为长方体. 为了简单起见, 我们统称这种控制顶点为区间控制顶点. 区间控制顶点定义的 Bézier 曲线和曲面实际上并不是真正的曲线和曲面, 而是一个区域, 可以认

* 收稿日期: 2004-10-12; 修回日期: 2005-05-15

基金项目: 国家自然科学基金 (10201030) 和教育部留学回国人员科研启动基金资助.

作者简介: 吴卉, 女, 1980 年生, 硕士. 研究方向: 计算机辅助几何设计.

通讯作者: 邓建松, 教授. E-mail: dengjs@ustc.edu.cn

为它是具有误差限(error tolerance)的曲线和曲面. 当对这种曲线和曲面进行仿射变换后, 为了使所得区间仍然与坐标轴的方向平行, 有时需要增加区间的尺寸. 另外一方面, 从误差的分布来看, 二维或三维区间并不是一个很恰当模型, 因此一种可能的改进就是把控制顶点变为圆盘或球, 对应的 Bézier 曲线和曲面分别称为圆盘控制顶点和球形控制顶点的 Bézier 曲线和曲面^[4].

由于在各种 CAD 系统中交换数据, 有时需要对已有的几何形体的参数表示进行降阶. 当然通常精确的降阶是不可能实现的. (区间)参数曲线和曲面已经被广泛研究, 大量的文献讨论了各种降阶算法^[5,7]. 文献[6]对圆盘控制顶点的 Bézier 曲线的降阶进行了详细讨论, 并在对误差度量进行了恰当定义后, 给出了降阶逼近的解析表示.

本文对球形控制顶点的 Bézier 曲面的降阶进行了讨论. 如果原来曲面的次数为 (m, n) , 我们给出了从 $(m, n) \rightarrow (m-1, n)$ 的降阶问题的解析表示. 与文献[6]相同, 我们也同样讨论了在插值边界与不插值边界的前提下, 把降阶逼近问题转化为一个可以给出解析表示的线性规划问题.

1 球形控制顶点的 Bézier 曲面

本节给出关于球运算的基本定义以及球形控制顶点的 Bézier 曲面的定义. 实际上, 球形控制点的 Bézier 曲面是圆盘控制点 Bézier 曲线的推广. 关于圆盘的运算以及圆盘控制点 Bézier 曲线的详情, 请参考文献[4].

1.1 球运算

定义 1.1 三维空间中以 (x_0, y_0, z_0) 为中心, 半径为 r_0 的球记为 $(x_0, y_0, z_0)_{r_0}$, 即

$$\begin{aligned} (\mathbf{S}) &:= (x_0, y_0, z_0)_{r_0} := \\ &\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 \leq r_0^2\}. \end{aligned} \quad (1)$$

半径为零的球就是通常的点, 即 $(x_0, y_0, z_0)_0 = (x_0, y_0, z_0)$. 在实数域 $\mathbb{R}$ 中的数与球之间以及两个球之间可以定义如下运算.

定义 1.2

$$\begin{aligned} a(x_1, y_1, z_1)_{r_1} &:= (ax_1, ay_1, az_1)_{|a|r_1}, \forall a \in \mathbb{R}; \\ (x_1, y_1, z_1)_{r_1} + (x_2, y_2, z_2)_{r_2} &:= \\ &(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)_{r_1+r_2}. \end{aligned}$$

自然地, 有下式成立:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^m a_i(x_i, y_i, z_i)_{r_i} = \\ \left(\sum_{i=0}^m a_i x_i, \sum_{i=0}^m a_i y_i, \sum_{i=0}^m a_i z_i \right)_{\sum_{i=0}^m |a_i| r_i}. \end{aligned}$$

1.2 球型控制点的 Bézier 曲面

定义 1.3 (m, n) 次球形控制点的 Bézier 曲面 (ball control point Bézier surface, 简记为 BB 曲面) 定义为

$$\begin{aligned} (\mathbf{P})(u, v) &:= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n (\mathbf{P}_{ij}) B_i^m(u) B_j^n(v), \\ (u, v) &\in [0, 1]^2, \end{aligned} \quad (2)$$

其中, $B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$ 为 Bernstein 基函数,

$(\mathbf{P}_{ij}) = (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij})_{r_{ij}}$ 称为控制球.

显然, BB 曲面的表示也可以写为

$$(\mathbf{P})(u, v) := (x(u, v), y(u, v), z(u, v))_{r(u, v)}, \quad (3)$$

其中,

$$\begin{aligned} x(u, v) &:= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n x_{ij} B_i^m(u) B_j^n(v), \\ y(u, v) &:= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n y_{ij} B_i^m(u) B_j^n(v), \\ z(u, v) &:= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n z_{ij} B_i^m(u) B_j^n(v), \\ r(u, v) &:= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n r_{ij} B_i^m(u) B_j^n(v). \end{aligned}$$

参数曲面

$$\mathbf{C}(u, v) := (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) =$$

$$\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \mathbf{C}_{ij} B_i^m(u) B_j^n(v).$$

称为 BB 曲面的中心曲面, $r(u, v)$ 称为它的半径.

可以认为 BB 曲面就是在中心曲面 $\mathbf{C}(u, v)$ 上移动半径等于 $r(u, v)$ 的球所扫过的实体. 这个曲面的厚度定义为 $r(u, v)$ 在 $[0, 1]^2$ 上的某种范数, 例如 $\|r(u, v)\|_1, \|r(u, v)\|_2$, 或 $\|r(u, v)\|_\infty$.

1.3 性质

与圆盘控制点的 Bézier 曲线类似, BB 曲面也具有许多非常好的性质, 例如仿射不变性, 凸包性质等. 由于这些性质完全类似于圆盘控制点的 Bézier 曲线, 为了节省篇幅, 这里不再列出, 请参考文献[4, 6].

BB 曲面实际上是一个隐式曲面族(球面)扫过的空间区域. 为了计算这个区域的表面, 设 BB 曲面

的中心曲面为

$$\mathbf{C}(u, v) = (x_c(u, v), y_c(u, v), z_c(u, v)),$$

并令

$$F(x, y, z, u, v) = (x - x_c(u, v))^2 + (y - y_c(u, v))^2 + (z - z_c(u, v))^2 - r^2(u, v),$$

根据曲面包络(envelopes)的理论, BB 曲面构成区域两个主要表面由下述方程确定:

$$\begin{cases} F(x, y, z, u, v) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial u} F(x, y, z, u, v) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial v} F(x, y, z, u, v) = 0. \end{cases}$$

从这个联立方程中解出 x, y, z , 它是 u, v 的函数, 解有两个分支, 在 $(u, v) \in [0, 1]^2$ 上定义参数曲面就分别是区域的主要表面. 图 1 给出了一个例子.

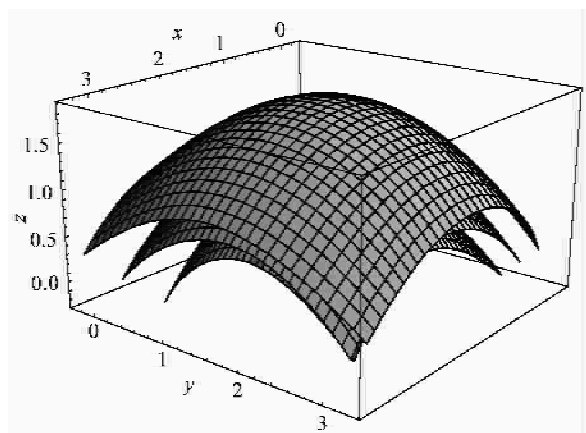


图 1 BB 曲面形成空间区域的主要表面
(中间曲面是 BB 曲面的中心曲面)

Fig. 1 The main boundary surfaces formed by a BB surface, where the middle surface is the center surface of the BB surface

在边界 $u=0, 1$ 或者 $v=0, 1$ 上, 球沿边界曲线扫过空间区域的表面也可以类似确定. 例如, 对于 $u=0$ 的边界,

$$\begin{aligned} F(x, y, z, 0, v) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial v} F(x, y, z, 0, v) &= 0. \end{aligned}$$

从这两个方程中消去 v 得到的隐式方程就是所需要的边界表示. 注意, 此时在绘制时存在一个问题, 即很难确定隐式表面上的哪个部分应属于 BB 曲面边界区域的表面. 这还是一个需要进一步研究的问题.

下面我们将讨论 (m, n) 次 BB 曲面近似降阶到 $(m-1, n)$ 次 BB 曲面的问题, 因此先给出一个 (m, n) 次 BB 曲面为 $(m-1, n)$ 次 BB 曲面的充要条件.

定理 1.4 给定 (m, n) 次 BB 曲面, 如式(3)所示, 那么该曲面为 $(m-1, n)$ 次当且仅当它的中心曲面 $\mathbf{C}(u, v)$ 和半径 $r(u, v)$ 均为 $(m-1, n)$ 次形式, 即

$$\Delta^m \mathbf{C}_{0j} := \sum_{i=0}^m (-1)^{m-i} \binom{m}{i} \mathbf{C}_{ij} = 0, \quad (4)$$

$$\Delta^m r_{0j} := \sum_{i=0}^m (-1)^{m-i} \binom{m}{i} r_{ij} = 0, \quad (5)$$

其中, $j=0, \dots, n$.

证明 证明完全类似于通常参数曲面的情形. $\square$

2 BB 曲面的降阶

本节讨论 BB 曲面的降阶. 首先给出了降阶问题的严格定义, 但是为了给出问题的解析表示, 对问题进行了两步处理, 即首先在一致最优的意义下对中心曲面进行降阶, 然后对半径表示在两种最优意义进行降阶.

给定一次数为 (m, n) 的 BB 曲面 $(\mathbf{P})(u, v)$, 定义见式(2), 从 (m, n) 次到 $(m-1, n)$ 次的降阶就是求出一个次数为 $(m-1, n)$ 次的 BB 曲面 $(\mathbf{Q})(u, v)$,

$$(\mathbf{Q})(u, v) = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^n (\bar{\mathbf{Q}}_{ij}) B_i^m(u) B_j^n(v),$$

使得

$$\begin{aligned} \{(\mathbf{P})(u, v) \mid 0 \leq u, v \leq 1\} &\subset \\ \{(\mathbf{Q})(u, v) \mid 0 \leq u, v \leq 1\}, \end{aligned} \quad (6)$$

而且两个 BB 曲面之间的差别尽可能小(后面会对两个 BB 曲面差别进行详细讨论).

但是在式(6)中的包围条件不是很好处理, 因此在后面的讨论中我们用下述条件取代:

$$(\mathbf{P})(u, v) \subset (\mathbf{Q})(u, v), (u, v) \in [0, 1]^2. \quad (7)$$

同时, 为了便于后面的求解, 也需要把 $(m-1, n)$ 次的 BB 曲面表示成 (m, n) 次 BB 曲面,

$$(\mathbf{Q})(u, v) := \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n (\bar{\mathbf{Q}}_{ij}) B_i^m(u) B_j^n(v), \quad (8)$$

其中, $(\bar{\mathbf{Q}}_{ij})$ 必须满足定理 1.4 中的退化条件. 一旦计算出 $(\bar{\mathbf{Q}}_{ij})$, 那么 $(\mathbf{Q}_{ij})$ 可由下式计算出来:

$$(\mathbf{Q}_{0j}) = (\bar{\mathbf{Q}}_{0j}),$$

$$(\mathbf{Q}_{ij}) = \frac{1}{m-i} (m(\bar{\mathbf{Q}}_{ij}) - i(\bar{\mathbf{Q}}_{(i-1)j})),$$

其中, $i=1, \dots, m-1; j=0, 1, \dots, n$.

设 $(\mathbf{Q})(u, v)$ 的中心曲面和半径方程分别为

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{C}}(u, v) &:= (\tilde{x}(u, v), \tilde{y}(u, v), \tilde{z}(u, v)) = \\ &\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \tilde{\mathbf{C}}_{ij} B_i^m(u) B_j^n(v), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\tilde{r}(u, v) := \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \tilde{r}_{ij} B_i^m(u) B_j^n(v). \quad (10)$$

如果 $(P)(u, v)$ 的中心曲面和半径方程如式(3)所示, 那么替代的包围条件(7)等价于

$$\tilde{r}(u, v) \geq r(t) + \text{dist}(\mathbf{C}(u, v), \tilde{\mathbf{C}}(u, v)), \quad (11)$$

对于任意 $(u, v) \in [0, 1]^2$ 成立, 其中,

$$\text{dist}(\mathbf{C}(u, v), \tilde{\mathbf{C}}(u, v)) := ((x(u, v) - \tilde{x}(u, v))^2 + (y(u, v) - \tilde{y}(u, v))^2 + (z(u, v) - \tilde{z}(u, v))^2)^{1/2}.$$

这样如果我们要求两个 BB 曲面的差别尽可能小, 那么就可以定义为 $\|\tilde{r}(u, v) - r(u, v)\|$ 在某种范数意义下尽可能小.

为了求解上述问题, 我们把过程分为两步: 第一步求出中心曲面在最佳一致意义的低阶曲面; 第二步给出半径在满足式(11)的前提下的低阶近似.

3 中心 Bézier 曲面的降阶

下述引理给出了由原中心曲面计算降阶后中心曲面的做法.

命题 3.1 令 $\mathbf{C}(u, v)$ 为一个 BB 曲面 $(P)(u, v)$ 的中心曲面, 定义见式(3), 那么

$$\tilde{\mathbf{C}}(u, v) = \mathbf{C}(u, v) - \left[\sum_{j=0}^n \Delta^m \mathbf{C}_{0j} B_j^n(v) \right] \frac{T_m(2u-1)}{2^{2m-1}}$$

就是 $\mathbf{C}(u, v)$ 的次数为 $(m-1, n)$ 的最佳一致逼近, 其中, $\Delta^m \mathbf{C}_{0j}$ 的定义见式(4), 而 $T_m(t)$ 是 m 次 Chebyshev 多项式, 定义为

$$T_m(t) = \cos(n \arccos t), \quad -1 \leq t \leq 1.$$

证明 $\mathbf{C}(u, v)$ 作为 u 的多项式, 其首项系数为

v 的多项式, 具体表达式为 $\sum_{j=0}^n \Delta^m \mathbf{C}_{0j} B_j^n(v)$, 因此根据 Chebyshev 多项式的性质, 以及 $\frac{1}{2^{2m-1}} T_m(2u-1)$

为首一多项式, 可知在所有 $(m-1, n)$ 次曲面中对 (m, n) 次曲面 $\mathbf{C}(u, v)$ 的最佳一致逼近是

$$\tilde{\mathbf{C}}(u, v) = \mathbf{C}(u, v) - \left[\sum_{j=0}^n \Delta^m \mathbf{C}_{0j} B_j^n(v) \right] \frac{T_m(2u-1)}{2^{2m-1}}.$$

□

下面这个命题给出了在插值边界意义低阶最佳一致逼近的解析表示.

命题 3.2 令 $\mathbf{C}(u, v)$ 为一个 BB 曲面 $(P)(u, v)$ 的中心曲面, 定义见式(3), 那么

$$\tilde{\mathbf{C}}(u, v) = \mathbf{C}(u, v) - \left[\sum_{j=0}^n \Delta^m \mathbf{C}_{0j} B_j^n(v) \right].$$

$$\frac{T_m((2u-1)\cos\frac{\pi}{2m})}{2^{2m-1}\cos^m\frac{\pi}{2m}}$$

就是在插值 $\mathbf{C}(u, v)$ 的 $u=0, 1$ 边界的所有 $(m-1, n)$ 次曲面中 $\mathbf{C}(u, v)$ 的最佳一致逼近.

证明 与命题 3.1 类似. 此时为了插值边界曲线 $u=0, 1$, 那么在 $u=0, 1$ 时值为 0 的在 $[0, 1]$ 上具有最小无穷范数的首一 n 次多项式形式为

$$\frac{1}{2^{2m-1}\cos^m\frac{\pi}{2m}} T_m((2u-1)\cos\frac{\pi}{2m}),$$

所以可知命题成立. □

降阶逼近过程的第二步就是对半径的表示进行处理, 通过求解在两种范数意义下的满足包围条件(11)的最优低阶半径表示.

首先讨论不要求插值边界时的情形. 此时, 包围条件(11)可以用如下的充分条件代替.

引理 3.3 包围条件(11)成立的一个充分条件是

$$\tilde{r}_{ij} \geq r_{ij} + d, \quad i = 0, \dots, m, \quad j = 0, \dots, n, \quad (12)$$

以及

$$\Delta^m \tilde{r}_{0j} = 0, \quad j = 0, \dots, n, \quad (13)$$

其中,

$$d = \|\tilde{\mathbf{C}}(u, v) - \mathbf{C}(u, v)\|_\infty := \frac{\max_{0 \leq j \leq n} \|\Delta^m \mathbf{C}_{0j}\|_2}{2^{2m-1}}.$$

证明 由于 $\|T_n(t)\|_\infty \leq 1$, 所以当式(12)成立时, 对任意 $(u, v) \in [0, 1]^2$, 有

$\tilde{r}(u, v) - r(u, v) \geq d \geq \text{dist}(\tilde{\mathbf{C}}(u, v), \mathbf{C}(u, v))$, 即包围条件(11)成立. 而式(13)保证了 $\tilde{r}(u, v)$ 为 $(m-1, n)$ 次多项式. □

令 $\epsilon_{ij} = \tilde{r}_{ij} - r_{ij} - d, i=0, \dots, m; j=0, \dots, n$, 那么可以用数组 ϵ_{ij} 刻画 $\tilde{r}(u, v)$ 逼近 $r(u, v)$ 的程度, 因此我们把

$$\|\tilde{r}(u, v) - r(u, v) - d\| = \left\| \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \epsilon_{ij} B_i^m(u) B_j^n(v) \right\|$$

作为优化的目标, 其中, $\|\cdot\|$ 的具体定义见后面的讨论. 这样降阶问题转化为如下的优化问题:

$$\left. \begin{aligned} \min & \left\| \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \epsilon_{ij} B_i^m(u) B_j^n(v) \right\|, \\ \text{s. t. } & \Delta^m \epsilon_{0j} + \Delta^m r_{0j} = 0, \quad j = 0, \dots, n; \\ & \epsilon_{ij} \geq 0, \quad i = 0, \dots, m, \quad j = 0, \dots, n. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

针对 $\|\cdot\|$ 的不同选择, 可以给出不同的解析表示.

定理 3.4 优化问题(14)的解如下:

(I) 取模为

$$\left\| \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \epsilon_{ij} B_i^m(u) B_j^n(v) \right\|_1 =$$

$$\frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \epsilon_{ij},$$

则解为

$$\left. \begin{aligned} \tilde{r}_{ij} &= r_{ij} + d, \quad i = 0, \dots, m, \quad i \neq i_0, \\ \tilde{r}_{i_0j} &= r_{i_0j} + d + (-1)^{m-i_0+1} \frac{1}{\binom{m}{j_0}} \Delta^m r_{0j}, \\ j &= 0, \dots, n. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

其中,

$$i_0 = \begin{cases} m - 2[m/4] - 1, & \Delta^m r_{0j} > 0; \\ m - 2[(m+2)/4], & \Delta^m r_{0j} < 0. \end{cases}$$

(II)取模为

$$\left\| \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \epsilon_{ij} B_i^m(u) B_j^n(v) \right\|_{\infty} := \max_{i,j} \epsilon_{ij},$$

那么优化问题的解为:

对于 $j=0, \dots, n$,

① m 为偶数且 $\Delta^m r_{0j} > 0$ 或者 m 为奇数且 $\Delta^m r_{0j} < 0$, 那么

$$\begin{cases} \tilde{r}_{(2i)j} = r_{(2i)j} + d, & i = 0, \dots, [m/2]; \\ \tilde{r}_{(2i+1)j} = r_{(2i+1)j} + d + \frac{1}{2^{m-1}} |\Delta^m r_{0j}|, \\ i = 0, \dots, [(m-1)/2]. \end{cases}$$

② m 为偶数且 $\Delta^m r_{0j} < 0$ 或者 m 为奇数且 $\Delta^m r_{0j} > 0$, 那么

$$\begin{cases} \tilde{r}_{(2i+1)j} = r_{(2i+1)j} + d, \\ i = 0, \dots, [(m-1)/2]; \\ \tilde{r}_{(2i)j} = r_{(2i)j} + d + \frac{1}{2^{m-1}} |\Delta^m r_{0j}|, \\ i = 0, \dots, [m/2]. \end{cases}$$

证明 我们利用文献[6]中定理 1 的结论证明上述定理.

(I)固定 $0 \leq j \leq n$, 考虑下述问题:

$$\begin{aligned} \min & \sum_{i=0}^m \epsilon_{ij} \\ \text{s. t. } & \Delta^m \epsilon_{0j} + \Delta^m r_{0j} = 0, \\ & \epsilon_{ij} \geq 0, \quad i = 0, \dots, m. \end{aligned}$$

由文献[6]中定理 1 中(1)可知,其解具有形式

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij} &= 0, \quad i = 0, \dots, m, \quad i \neq i_0, \\ \epsilon_{i_0j} &= (-1)^{m-i_0+1} \frac{1}{\binom{m}{j_0}} \Delta^m r_{0j}. \end{aligned}$$

由于优化问题(14)中的约束条件对不同的 j 是相互独立的,因此把各个固定 j 对应的解综合在一起,就得到了优化问题(14)的解,这就证明了(I).

(II)利用文献[6]中定理 1 中(2)的结论以及与第一部分证明思路类似的方法可以证明第二部分. $\square$

下面考虑带约束的降阶逼近,其新得到的低次 BB 曲面应当在 $u=0,1$ 时插值原来 BB 曲面的边界曲线,即对于 $j=0, \dots, n$,

$$\tilde{\mathbf{C}}_{0j} = \mathbf{C}_{0j}, \quad \tilde{\mathbf{C}}_{mj} = \mathbf{C}_{mj},$$

$$\tilde{r}_{0j} = r_{0j}, \quad \tilde{r}_{mj} = r_{mj}.$$

假设 $\tilde{\mathbf{C}}(u, v)$ 为中心曲面 $\mathbf{C}(u, v)$ 的插值边界 $u=0,1$ 的最佳一致低阶近似,为了得到包围条件成立的一个充分条件,需要仔细处理包围条件(11).

引理 3.5 当低阶 BB 曲面的半径方程满足下述条件时:

$$\tilde{r}_{0j} = r_{0j}, \quad \tilde{r}_{mj} = r_{mj}, \quad \tilde{r}_{ij} \geq r_{ij} + d_{ij},$$

$i=1, 2, \dots, m-1, j=0, \dots, n$, 那么它满足边界插值条件以及包围条件(11),其中,对于 $j=0, \dots, n$,有

$$\begin{cases} d_{0j} = d_{mj} = 0, \\ d_{1j} = d_{(m-1)j} = \frac{\|\Delta^m \mathbf{C}_{0j}\|_2}{2^{2m-2} \tan(\pi/2m) \cos^m(\pi/2m)}, \\ d_{ij} = \frac{\sigma \|\Delta^m \mathbf{C}_{0j}\|_2}{2^{2m-1} \cos^m(\pi/2m)}, \\ i = 2, \dots, m-2. \end{cases}$$

当 $m=4, 5, 6, 7$ 时, $\sigma=0$; 当 $m \geq 8$ 时, $\sigma=1$.

证明 与文献[6]中引理 2 的证明完全相同. $\square$

根据引理 3.5,带约束的降阶问题就转化为下列优化问题

$$\left. \begin{aligned} \min & \left\| \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \epsilon_{ij} B_i^m(u) B_j^n(v) \right\|, \\ \text{s. t. } & \Delta^m \epsilon_{0j} + \Delta^m (r_{0j} + d_{0j}) = 0, \quad j = 0, \dots, n, \\ & \epsilon_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m-1, \quad j = 0, \dots, n, \\ & \epsilon_{0j} = \epsilon_{mj} = 0, \quad j = 0, \dots, n. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

其中,

$$\epsilon_{ij} = \tilde{r}_{ij} - r_{ij} - d_{ij}, \quad i = 0, \dots, m, \quad j = 0, \dots, n.$$

同样,针对 $\|\cdot\|$ 的不同选择,可以给出不同的解析表示.

定理 3.6 优化问题(16)的解如下:

(I)取模为

$$\left\| \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \epsilon_{ij} B_i^m(u) B_j^n(v) \right\|_1 = \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \epsilon_{ij}}{(m+1)(n+1)},$$

则解为:

对于 $j=0, \dots, n$,

$$\begin{cases} \tilde{r}_{ij} = r_{ij} + d_{ij}, \\ i = 0, \dots, m, i \neq i_0, \\ \tilde{r}_{i_0j} = r_{i_0j} + d_{i_0j} + (-1)^{m-i_0+1} \frac{1}{\binom{m}{i_0}} \Delta^m(r_{0j} + d_{0j}). \end{cases}$$

其中 i_0 的定义与 j 有关,但为了简单起见,仍记为 i_0 ,

$$i_0 = \begin{cases} m - 2[m/4] - 1, & \Delta^m(r_{0j} + d_{0j}) > 0, \\ m - 2[(m+2)/4], & \Delta^m(r_{0j} + d_{0j}) < 0. \end{cases}$$

(II)取模为

$$\left\| \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \epsilon_{ij} B_i^m(u) B_j^n(v) \right\|_{\infty} := \max_{i,j} \epsilon_{ij},$$

则解为:

对于 $j=0, \dots, n$,

① m 为偶数且 $\Delta^m(r_{0j} + d_{0j}) > 0$, 则

$$\begin{cases} \tilde{r}_{(2i)j} = r_{(2i)j} + d_{(2i)j}, \\ i = 0, \dots, m/2, \\ \tilde{r}_{(2i+1)j} = r_{(2i+1)j} + d_{(2i+1)j} + \frac{1}{2^{m-1}} (\Delta^m(r_{0j} + d_{0j})), \\ i = 0, \dots, m/2 - 1. \end{cases}$$

② m 为偶数且 $\Delta^m(r_{0j} + d_{0j}) < 0$, 则

$$\begin{cases} \tilde{r}_{0j} = r_{0j}, \quad \tilde{r}_{mj} = r_{mj}, \\ \tilde{r}_{(2i+1)j} = r_{(2i+1)j} + d_{(2i+1)j}, \\ i = 0, 1, \dots, m/2 - 1, \\ \tilde{r}_{(2i)j} = r_{(2i)j} + d_{(2i)j} - \frac{1}{2^{m-1} - 2} \Delta^m(r_{0j} + d_{0j}), \\ i = 1, 2, \dots, m/2 - 1. \end{cases}$$

③ m 为奇数且 $\Delta^m(r_{0j} + d_{0j}) > 0$, 则

$$\begin{cases} \tilde{r}_{0j} = r_{0j}, \\ \tilde{r}_{(2i+1)j} = r_{(2i+1)j} + d_{(2i+1)j}, \\ i = 0, 1, \dots, (m-1)/2, \\ \tilde{r}_{(2i)j} = r_{(2i)j} + d_{(2i)j} + \frac{1}{2^{m-1} - 1} \Delta^m(r_{0j} + d_{0j}), \\ i = 1, 2, \dots, (m-1)/2. \end{cases}$$

④ m 为奇数且 $\Delta^m(r_{0j} + d_{0j}) < 0$, 则

$$\begin{cases} \tilde{r}_{mj} = r_{mj} \\ \tilde{r}_{(2i)j} = r_{(2i)j} + d_{(2i)j}, \\ i = 0, 1, \dots, (m-1)/2, \\ \tilde{r}_{(2i+1)j} = r_{(2i+1)j} + d_{(2i+1)j} - \frac{1}{2^{m-1} - 1} \Delta^m(r_{0j} + d_{0j}), \\ i = 0, 1, \dots, (m-3)/2. \end{cases}$$

证明 同样,由于在优化问题(16)中对于不同的 j ,约束条件是相互独立的,因此可以对不同的 j ,应用文献[6]中定理2的结论给出最优解,然后把各

组解综合在一起,就得到定理中的表达式. $\square$

4 误差的估计

为了衡量降阶后原来的 BB 曲面与新得到的 BB 曲面的差异,定义绝对包络误差

$$\begin{aligned} e((\mathbf{P})(u, v), (\mathbf{Q})(u, v)) &:= \\ &\|\tilde{r}(u, v) - r(u, v)\|_{\infty} + \\ &\|\text{dist}(\tilde{\mathbf{C}}(u, v) - \mathbf{C}(u, v))\|_{\infty}, \end{aligned} \quad (17)$$

以及相对包络误差

$$\begin{aligned} \bar{e}((\mathbf{P})(u, v), (\mathbf{Q})(u, v)) &:= \\ &\frac{e((\mathbf{P})(u, v), (\mathbf{Q})(u, v))}{\|\mathbf{C}(u, v)\|_{\infty}}. \end{aligned} \quad (18)$$

其中,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{C}(u, v)\|_{\infty} &= \max(\max_{i,j} x_{ij} - \min_{i,j} x_{ij}, \\ &\max_{i,j} y_{ij} - \min_{i,j} y_{ij}, \max_{i,j} z_{ij} - \min_{i,j} z_{ij}). \end{aligned}$$

用一些记号来表示在前面讨论的几种模下降阶逼近的解.用 LP1 和 LPM 分别表示定理 3.4 中线性规划问题在模为 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_{\infty}$ 时的解,用 CLP1 和 CLPM 分别表示定理 3.6 中线性规划问题(插值边界情况)在模为 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_{\infty}$ 时的解.

定理 4.1 包络误差如下:

① 对于 LP1,

$$e((\mathbf{P})(u, v), (\mathbf{Q})(u, v)) \leq \frac{\max_{0 \leq j \leq n} \|\Delta^m \mathbf{C}_{0j}\|_2}{2^{2m-2}} + \left(\frac{i_0}{m}\right)^{i_0} \left(\frac{m-i_0}{m}\right)^{m-i_0} \max_{0 \leq j \leq n} |\Delta^m r_{0j}|.$$

② 对于 LPM,

$$e((\mathbf{P})(u, v), (\mathbf{Q})(u, v)) \leq \frac{\max_{0 \leq j \leq n} \|\Delta^m \mathbf{C}_{0j}\|_2}{2^{2m-2}} + \frac{1}{2^{m-1}} \max_{0 \leq j \leq n} |\Delta^m r_{0j}|.$$

③ 对于 CLP1,

$$\begin{aligned} e((\mathbf{P})(u, v), (\mathbf{Q})(u, v)) &\leq \\ &\frac{(\lambda_m + 1) \max_{0 \leq j \leq n} \|\Delta^m \mathbf{C}_{0j}\|_2}{2^{2m-1} \cos^m(\pi/2m)} + \left(\frac{i_0}{m}\right)^{i_0} \left(\frac{m-i_0}{m}\right)^{m-i_0} \\ &\max_{0 \leq j \leq n} |\Delta^m r_{0j} + \Delta^m d_{0j}|. \end{aligned}$$

④ 对于 CLPM,

$$e((\mathbf{P})(u, v), (\mathbf{Q})(u, v)) \leq \frac{(\lambda_m + 1) \max_{0 \leq j \leq n} \|\Delta^m \mathbf{C}_{0j}\|_2}{2^{2m-1} \cos^m(\pi/2m)} + \frac{1}{2^m - 2} \max_{0 \leq j \leq n} |\Delta^m r_{0j} + \Delta^m d_{0j}|.$$

其中,

$$\lambda_2 = 1, \lambda_3 = 3\sqrt{3}/2,$$

$$\lambda_m = 1/\tan(\pi/2m), m \geq 4.$$

5 例子

在本节我们给出一个次数(5,3)的 BB 曲面降到(4,3)的例子. 这时原始 BB 曲面片具有 24 个控制球. 设这 24 个控制球的定义分别为

$$\begin{aligned} (\mathbf{P})_{00} &= (50, 300, 35)_{10}, (\mathbf{P})_{01} = (45, 250, 30)_8, \\ (\mathbf{P})_{02} &= (60, 200, 50)_{10}, (\mathbf{P})_{03} = (70, 150, 80)_{12}, \\ (\mathbf{P})_{10} &= (80, 300, 10)_5, (\mathbf{P})_{11} = (85, 250, 30)_7, \\ (\mathbf{P})_{12} &= (90, 200, 50)_9, (\mathbf{P})_{13} = (110, 150, 80)_8, \\ (\mathbf{P})_{20} &= (115, 300, 10)_8, (\mathbf{P})_{21} = (140, 250, 30)_5, \\ (\mathbf{P})_{22} &= (175, 200, 50)_2, (\mathbf{P})_{23} = (200, 150, 80)_{15}, \\ (\mathbf{P})_{30} &= (220, 300, 10)_{15}, (\mathbf{P})_{31} = (250, 250, 30)_{25}, \\ (\mathbf{P})_{32} &= (300, 200, 50)_3, (\mathbf{P})_{33} = (350, 150, 80)_{17}, \\ (\mathbf{P})_{40} &= (400, 300, 10)_{10}, (\mathbf{P})_{41} = (415, 250, 30)_{10}, \\ (\mathbf{P})_{42} &= (440, 200, 50)_5, (\mathbf{P})_{43} = (500, 150, 80)_9, \\ (\mathbf{P})_{50} &= (570, 300, 50)_8, (\mathbf{P})_{51} = (580, 250, 30)_7, \\ (\mathbf{P})_{52} &= (590, 200, 20)_9, (\mathbf{P})_{53} = (600, 150, 10)_6. \end{aligned}$$

对这样一些控制球构成的区间 Bézier 曲面, 我们在插值边界, 不插值边界的情况下再分别取 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_\infty$ 两种范数进行逼近, 共有四种情况. 图 2 中的四个图分别是 LP1, LPM, CLP1, CLPM 四种降阶前和降阶后的包络面的图像的比较, 深色的“上下”包络面是降阶前的包络面, 浅色“上下”包络面是降阶后的包络面. 由于差别较小, 需要注意从示意图中曲面边界上观察相互间的差别.

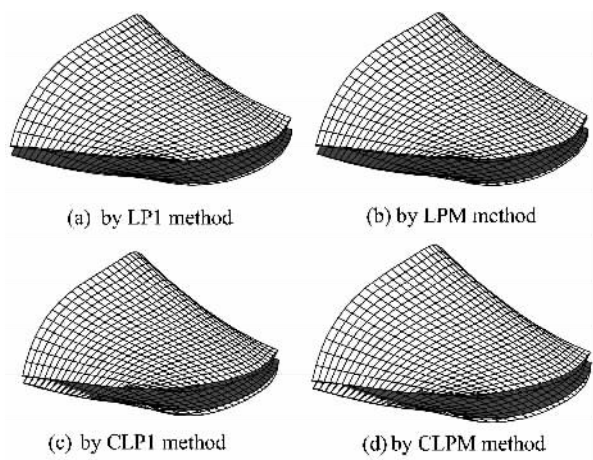


图 2 各种方法中降阶前后上下包络面的位置

Fig. 2 The main envelopes in degree reductions

附录中给出了用各种方法降阶误差函数图.

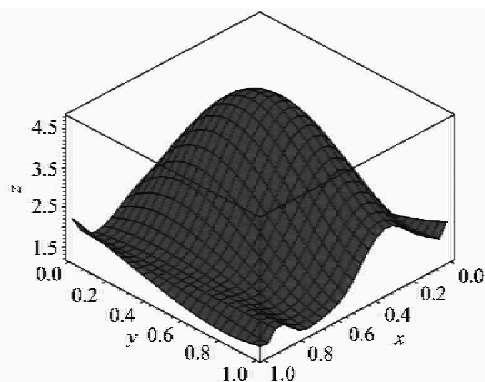
6 结论

本文讨论了对于球形控制顶点的 Bézier 曲面的降阶逼近. 在对包围条件进行了一定的简化后, 把问题分为两步, 首先对中心曲面进行最佳一致降阶逼近, 然后对半径表示进行不同范数意义下的满足包围条件下的降阶. 文中给出了 $(m, n) \rightarrow (m-1, n)$ 的解析表示式. 显然, 文中结论完全可以应用到 $(m, n) \rightarrow (m, n-1)$ 的情形. 至于 $(m, n) \rightarrow (m-1, n-1)$ 以及 $(m, n) \rightarrow (m-k, n-l)$ ($0 \leq k \leq m, 0 \leq l \leq n$) 的降阶则是今后要进一步开展的工作. 另外, 本文讨论的是矩形域上张量积球形控制点 Bézier 曲面的降阶. 实际上, 前述过程可以直接应用到三角域上球形控制点 Bézier 曲面的降阶, 其中的难点在于中心曲面的降阶. 现在已有了初步的进展, 我们将另文阐述.

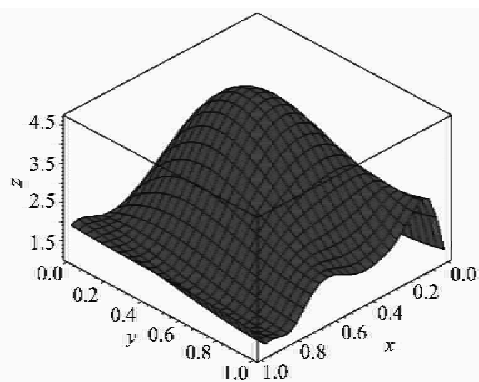
参考文献 (References)

- [1] Mudur S P, Koparkar P A. Interval methods for processing geometric objects[J]. IEEE Comput. Graph. Appl., 1984, 4(2): 7-17.
 - [2] Patrikalakis N M. Robustness issue in geometric and solid modeling[J]. Computer-Aided Design, 2000, 32(11): 629-689.
 - [3] Sederberg T W, Farouki R T. Approximation by interval Bézier curves [J]. IEEE Comput. Graph. Appl., 1992, 12(5): 87-95.
 - [4] Lin Q, Rokne J. Disk Bézier curves [J]. Computer Aided Geometric Design, 1998, 15(7): 721-737.
 - [5] Watkins M A, Worsey A J. Degree reduction of Bézier curves [J]. Computer-Aided Design, 1988, 20(7): 398-405.
 - [6] CHEN F L, YANG W. Degree reduction of disk Bézier curves [J]. Computer Aided Geometric Design, 2004, 21(3): 263-280.
 - [7] SUN Hong-bing, CHEN Xiao-qun. Degree reduction of interval Bézier curves [J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2002, 32(2): 147-154.
- 孙红兵, 陈效群. 区间 Bézier 曲面的降阶 [J]. 中国科学技术大学学报, 2002, 32(2): 147-154.

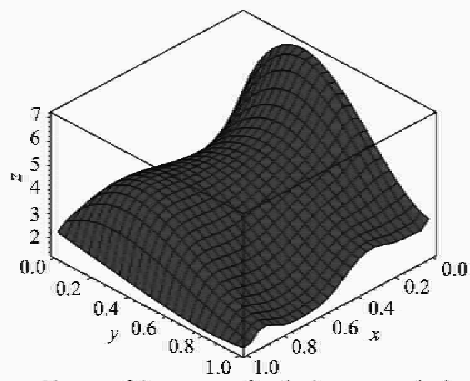
附录



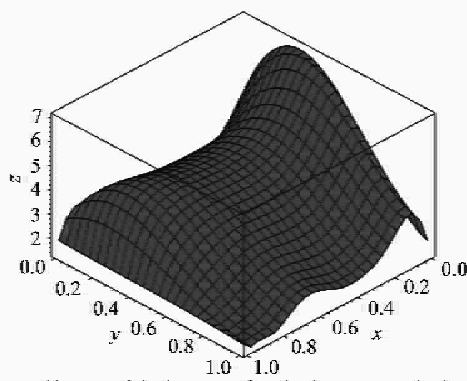
(a) error of the upper surface in the LP1 method



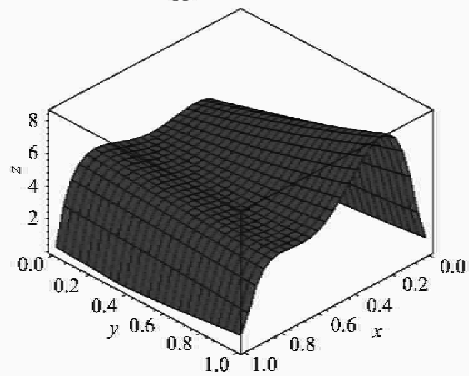
(b) error of the lower surface in the LP1 method



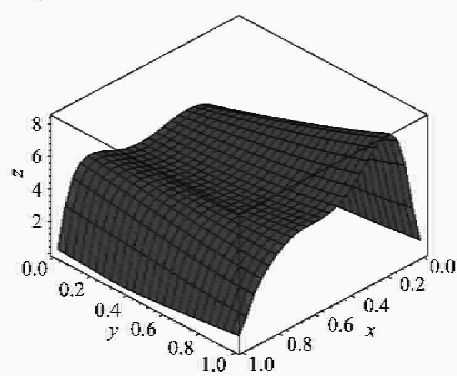
(c) error of the upper surface in the LPM method



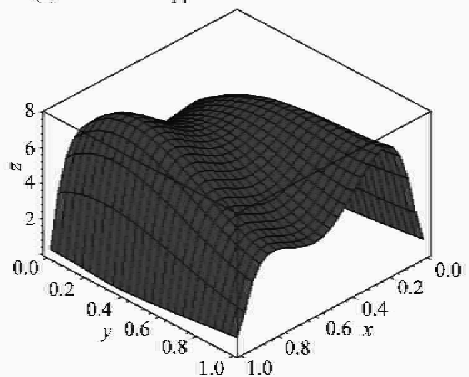
(d) error of the lower surface in the LPM method



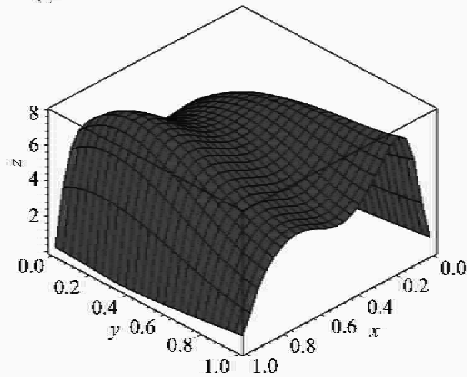
(e) error of the upper surface in the CLP1 method



(f) error of the lower surface in the CLP1 method



(g) error of the upper surface in the CLPM method



(h) error of the lower surface in the CLPM method

不同方法中降阶前后上下包络面间的误差

Errors between the envelopes before and after degree reductions in all methods