第 13 卷 A 辑　　高校应用数学学报　　Vol. 13 Ser. A
1998 年 增 刊　　Appl. Math. —JCU　　Suppl. 1998

Morgan-Scott 剖分上样条空间 $S_8^4(\Delta_{ms})$ 的维数

邓建松　奚梅成　冯玉瑜

（中国科学技术大学数学系）

摘　要

Morgen-Scott 剖分上样条空间的维数依赖于剖分的几何性质，本文证明了 Diener 1990 年提出的猜想对 $r=4$ 是不正确的，需要修正.

关键词　MS 剖分，样条空间，维数.

分类号　（中图）O152.2；（1991**MR**）68U07，65D07.

§1　引　　言

设 Δ_{ms} 是 Morgan-Scott 剖分（图 1），V_1,V_2,V_3 和 $\hat{V}_1,\hat{V}_2,\hat{V}_3$ 分别是剖分边界上以及内部的顶点，$V_i,\hat{V}_i$ 位于 $\hat{V}_{i+1},\hat{V}_{i+2}$ 连线的两边，$i=1,2,3$. 我们约定下标是模 3 的，即 $V_4=V_1$，$V_{-1}=V_2$ 等等. 用 T 表示 $\triangle\hat{V}_1\hat{V}_2\hat{V}_3$，$T_i,\hat{T}_i$ 分别表示 $\triangle V_i\hat{V}_{i+1}\hat{V}_{i+2}$ 和 $\triangle\hat{V}_{i-1}V_{i+1}\hat{V}_i$，$i=1,2,3$. 又设 (r_i,s_i,t_i) 是 V_i 对于三角形 T 的面积坐标，即 $V_i=r_i\hat{V}_i+s_i\hat{V}_{i+1}+t_i\hat{V}_{i+2}$，$i=1,2,3$. 显然 $r_i<0$. 又因为在同一个内顶点处的边有不同的斜率，从而 $s_i\neq0\neq t_i$. 在剖分 Δ_{ms} 上定义样条空间

$$S_d^r(\Delta_{ms})=\{s\in C^r(\Delta_{ms}):s|_{子三角形}\in P_d\},$$

这里 P_d 是维数为 $(d+2)(d+1)/2$ 的总次数 $\leq d$ 的两变量多项式空间. 空间 $S_d^r(\Delta_{ms})$ 的维数不仅依赖于 r,d，还依赖于剖分的几何性质.

我们回顾一些已知的结果：在[1]中证明了 $\dim S_2^1(\Delta_{ms})=6$ 或 7，并指出若剖分是对称的，那么维数为 7. [2]中指出即使不对称的情况，维数也可能为 7. 最近[3～5]从不同的途径，完满地解决了这一问题，得到了

本文 1997 年 11 月 3 日收到.

国家自然科学基金（19771076）和教委博士点基金资助.

$$6 \le \dim S_2^1(\Delta_{ms}) \le 7 \text{ 且 } \dim S_2^1(\Delta_{ms}) = 7 \Leftrightarrow V_i\hat{V}_i, i = 1,2,3, \text{交于一点}.$$

对一般的 r，在[5]中证明了如下的定理：$\alpha+\sigma \le \dim S_{2r}^r(\Delta_{ms}) \le \alpha+\sigma+1$，且只要

$$\begin{aligned} &s_1s_2s_3 = t_1t_2t_3, \text{ 当 } r \text{ 为奇数}; \\ &s_1s_2s_3 = \pm\, t_1t_2t_3, \text{ 当 } r \text{ 为偶数} \end{aligned} \tag{1.1}$$

不成立，必有 $\dim S_{2r}^r(\Delta_{ms}) = \alpha+\sigma$. 这里

$$\alpha = \binom{2r+2}{2}, \quad \sigma = 3\sum_{j=1}^{r}(r+1-3j)_+.$$

并且作者猜想，条件(1.1)对于 $\dim S_{2r}^r(\Delta_{ms}) = \alpha+\sigma+1$ 也是充分的.

[3]，[5]从不同的途径对 $r=1,2$ 证明了上述猜想. [6]又证明了对于 $r=3$ 猜想也是正确的. 本文的目的是研究 $r=4$ 的情况，证明了当 $r=4$ 时上述猜想不正确，猜想应当修正为当 $r>2$ 时

$$\dim S_{2r}^r(\Delta_{ms}) = \alpha+\sigma+1 \Leftrightarrow s_1s_2s_3 = t_1t_2t_3.$$

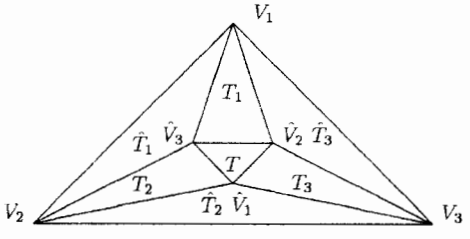

图 1

§2 平滑条件

我们利用两变量样条的 Bernstein-Bézier 表示. 在剖分 Δ_{ms} 中令

$$\begin{aligned} P_{i,j,k}^{[l]} &= (iV_l + j\hat{V}_{l+1} + k\hat{V}_{l+2})/8, \\ \hat{P}_{i,j,k}^{[l]} &= (i\hat{V}_{l-1} + jV_{l+1} + kV_l)/8, \end{aligned} \quad i+j+k=8,\ l=1,2,3 \tag{2.1}$$

分别表示子三角形 $T_l, \hat{T}_l$ 内的格点. 相应地，分别用 $\beta_{i,j,k}^{[l]}, \hat{\beta}_{i,j,k}^{[l]}$ 表示 $P_{i,j,k}^{[l]}, \hat{P}_{i,j,k}^{[l]}$ 处的 Bézier 纵标.

又设 $a_{i,j}, b_{i,j}, c_{i,j}$ 是顶点 V_j 关于三角形 T_i 的面积坐标，即

$$V_j = a_{i,j}V_i + b_{i,j}\hat{V}_{i+1} + c_{i,j}\hat{V}_{i+2}. \tag{2.2}$$

为表示的方便，引进移位算子[7] $E_l, l=1,2,3$ 定义为

$$\begin{aligned} E_1 f_{i,j,k} &:= f_{i+1,j,k}, \\ E_2 f_{i,j,k} &:= f_{i,j+1,k}, \\ E_3 f_{i,j,k} &:= f_{i,j,k+1}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

那么样条 $s \in S_8^4(\Delta_{ms})$ 限制在 T_l 上的 B-B 多项式表示为：

$$s_l(a,b,c) = \sum_{i+j+k=8} \beta_{i,j,k}^{[l]} \frac{8!}{i!j!k!} a^i b^j c^k, \tag{2.4}$$

这里(a,b,c)是关于三角形 T_l 的面积坐标.

同样 s 限制在 $\hat{T}_l$ 上的 B-B 多项式表示为:

$$\hat{s}_l(\hat{a},\hat{b},\hat{c}) = \sum_{i+j+k=8} \hat{\beta}_{i,j,k}^{[l]} \frac{8!}{i!j!k!} \hat{a}^i \hat{b}^j \hat{c}^k. \tag{2.5}$$

这里$(\hat{a},\hat{b},\hat{c})$是关于三角形 $\hat{T}_l$ 的面积坐标.

我们假定样条 s 在三角形 T 上为 0,那么由相邻两个多项式片在公共边上的光滑条件[2]知

$$\begin{aligned} \beta_{i,j,k}^{[l]} &= 0,\ i \le 4, \\ \hat{\beta}_{i,j,k}^{[l]} &= 0,\ i \ge 4, \end{aligned} \quad l = 1,2,3. \tag{2.6}$$

余下的光滑条件为

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_{i,j,k}^{[l]} &= (a_{l,l+1}E_1 + b_{l,l+1}E_2 + c_{l,l+1}E_3)^j \beta_{k,0,i}^{[l]}, \\ \hat{\beta}_{i,j,k}^{[l]} &= (a_{l+1,l}E_1 + b_{l+1,l}E_2 + c_{l+1,l}E_3)^k \beta_{j,i,0}^{[l+1]}, \end{aligned} \tag{2.7}$$

这里 $i\le 3, i+j+k=8, 1\le j,k\le 4, l=1,2,3$. 由于 $\hat{\beta}_{i,j,k}^{[l]}$ 由两个方程决定,从而得到如下齐次方程组:

$$(a_{l,l+1}E_1 + b_{l,l+1}E_2 + c_{l,l+1}E_3)^j \beta_{k,0,i}^{[l]} = (a_{l+1,l}E_1 + b_{l+1,l}E_2 + c_{l+1,l}E_3)^k \beta_{j,i,0}^{[l+1]}, \tag{2.8}$$

这里 $i\le 3, 1\le j,k\le 4, i+j+k=8, l=1,2,3$.

对给定的 $l=1,2,3$,考虑(2.8)中的来自纵标 $\hat{\beta}_{3,4,1}^{[l]}, \hat{\beta}_{3,3,2}^{[l]}, \hat{\beta}_{3,2,3}^{[l]}, \hat{\beta}_{3,1,4}^{[l]}$ 的 4 个方程,并注意到(2.6)式,得到齐次方程组:

$$\begin{pmatrix} a_{l+1,l}^4 & -a_{l,l+1} \\ a_{l+1,l}^3 & -a_{l,l+1}^2 \\ a_{l+1,l}^2 & -a_{l,l+1}^3 \\ a_{l+1,l} & -a_{l,l+1}^4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_{5,3,0}^{[l+1]} \\ \beta_{5,0,3}^{[l+1]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

从(2.2)式可证得

$$\Delta_l := 1 - a_{l+1,l}a_{l,l+1} \ne 0, \tag{2.10}$$

因而必有

$$\beta_{5,3,0}^{[l+1]} = \beta_{5,0,3}^{[l+1]} = 0, \quad l = 1,2,3. \tag{2.11}$$

对于纵标 $\hat{\beta}_{2,2,4}^{[l]}, \hat{\beta}_{2,4,2}^{[l]}, \hat{\beta}_{2,3,3}^{[l]}, l=1,2,3$,利用(2.6)和(2.8)式有

$$\begin{aligned} a_{l,l+1}^2 \beta_{6,0,2}^{[l]} - a_{l+1,l}^4 \beta_{6,2,0}^{[l+1]} + 2a_{l,l+1}b_{l,l+1}\beta_{5,1,2}^{[l]} &= 4a_{l+1,l}^3 c_{l+1,l}\beta_{5,2,1}^{[l+1]}, \\ a_{l,l+1}^4 \beta_{6,0,2}^{[l]} - a_{l+1,l}^2 \beta_{6,2,0}^{[l+1]} + 4a_{l,l+1}^3 b_{l,l+1}\beta_{5,1,2}^{[l]} &= 2a_{l+1,l}c_{l+1,l}\beta_{5,2,1}^{[l+1]}, \\ a_{l,l+1}^3 \beta_{6,0,2}^{[l]} - a_{l+1,l}^3 \beta_{6,2,0}^{[l+1]} + 3a_{l,l+1}^2 b_{l,l+1}\beta_{5,1,2}^{[l]} &= 3a_{l+1,l}^2 c_{l+1,l}\beta_{5,2,1}^{[l+1]}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

若令 $d_l := 1-2\Delta_l = 2a_{l+1,l}a_{l,l+1}-1$,由方程组(2.12)解得

$$\begin{aligned} a_{l,l+1}^3 \beta_{6,0,2}^{[l]} &= 2a_{l+1,l}^2 r_l d_l \beta_{5,2,1}^{[l+1]}, \\ a_{l+1,l}\beta_{6,2,0}^{[l+1]} &= 2r_l d_l \beta_{5,2,1}^{[l+1]}, \\ a_{l,l+1}^2 r_{l+1}\beta_{5,1,2}^{[l]} &= a_{l+1,l}^2 r_l \beta_{5,2,1}^{[l+1]}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

对于纵标 $\hat{\beta}_{0,4,4}^{[l]}, l=1,2,3$,由光滑条件,利用(2.6)和(2.8)式得到

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_{0,4,4}^{[l]} &= (a_{l,l+1}E_1 + b_{l,l+1}E_2 + c_{l,l+1}E_3)^4\beta_{4,0,0}^{[l]} \\ &= (a_{l+1,l}E_1 + b_{l+1,l}E_2 + c_{l+1,l}E_3)^4\beta_{4,0,0}^{[l+1]},\end{aligned} \tag{2.14}$$

展开后为：

$$\begin{aligned}&a_{l,l+1}^4\beta_{8,0,0}^{[l]} - a_{l+1,l}^4\beta_{8,0,0}^{[l+1]} + 4a_{l,l+1}^3b_{l,l+1}\beta_{7,1,0}^{[l]} - 4a_{l+1,l}^3b_{l+1,l}\beta_{7,1,0}^{[l+1]} \\ &+4a_{l,l+1}^3c_{l,l+1}\beta_{7,0,1}^{[l]} - 4a_{l+1,l}^3c_{l+1,l}\beta_{7,0,1}^{[l+1]} + 6a_{l,l+1}^2b_{l,l+1}^2\beta_{6,2,0}^{[l]} - 6a_{l+1,l}^2b_{l+1,l}^2\beta_{6,2,0}^{[l]} \\ &+6a_{l,l+1}^2c_{l,l+1}^2\beta_{6,0,2}^{[l]} - 6a_{l+1,l}^2c_{l+1,l}^2\beta_{6,0,2}^{[l+1]} + 12a_{l,l+1}^2b_{l,l+1}c_{l,l+1}\beta_{6,1,1}^{[l]} \\ &-12a_{l+1,l}^2b_{l+1,l}c_{l+1,l}\beta_{6,1,1}^{[l+1]} + 12a_{l,l+1}b_{l,l+1}^2c_{l,l+1}\beta_{5,2,1}^{[l]} - 12a_{l+1,l}b_{l+1,l}^2c_{l+1,l}\beta_{5,2,1}^{[l+1]} \\ &+12a_{l,l+1}b_{l,l+1}c_{l,l+1}^2\beta_{5,1,2}^{[l]} - 12a_{l+1,l}b_{l+1,l}c_{l+1,l}^2\beta_{5,1,2}^{[l+1]} = 0,\ l = 1,2,3.\end{aligned} \tag{2.15}$$

对于纵标 $\hat{\beta}_{1,3,4}^{[l]}$，$\hat{\beta}_{1,4,3}^{[l]}$，类似地进行处理，对给定的 l 分别能得到两个方程式.

令

$$\begin{aligned}\beta = (&\beta_{6,1,1}^{[1]},\beta_{6,1,1}^{[2]},\beta_{6,1,1}^{[3]},\beta_{5,2,1}^{[1]},\beta_{5,2,1}^{[2]},\beta_{5,2,1}^{[3]},\beta_{5,1,2}^{[1]},\beta_{6,0,2}^{[1]},\beta_{6,2,0}^{[1]},\beta_{5,1,2}^{[2]},\beta_{6,0,2}^{[2]},\beta_{6,2,0}^{[2]}, \\ &\beta_{5,1,2}^{[3]},\beta_{6,0,2}^{[3]},\beta_{6,2,0}^{[3]},\beta_{7,0,1}^{[1]},\beta_{7,1,0}^{[1]},\beta_{7,0,1}^{[2]},\beta_{7,1,0}^{[2]},\beta_{7,0,1}^{[3]},\beta_{7,1,0}^{[3]},\beta_{8,0,0}^{[1]},\beta_{8,0,0}^{[2]},\beta_{8,0,0}^{[3]})^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

是 24 维的列向量. 对给定的 l，上面得到 6 个方程. 令 $l=1,2,3$，则共有 18 个以 β 为未知量的方程. 即有齐次线性方程组

$$M\beta = 0, \tag{2.16}$$

这里 M 为 18×24 的矩阵. 其具体表示为

$$M = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & O_{9\times 6} & O_{9\times 3} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & O_{6\times 3} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \end{pmatrix}, \tag{2.17}$$

其中

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{21}^2r_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2a_{21}^2r_1d_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2r_3d_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{32}^2r_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2a_{32}^2r_3d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2r_1d_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a_{13}^2r_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2a_{13}^2r_3d_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2r_2d_2 \end{pmatrix}, \tag{2.18}$$

$$A_{12} = \mathrm{diag}(a_{12}^2r_2 \quad a_{12}^3 \quad a_{13} \quad a_{23}^2r_3 \quad a_{23}^3 \quad a_{21} \quad a_{31}^2r_1 \quad a_{31}^3 \quad a_{32}), \tag{2.19}$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} a_{12}^2r_2A_1 & a_{21}^3r_1 & 0 & 3a_{12}b_{12}r_2d_1 & 6a_{21}^2b_{21}r_1 & 0 \\ a_{13}^2r_3A_3 & 0 & a_{31}^3r_1 & 6a_{13}b_{13}r_3d_3 & 0 & 3a_{31}^2b_{31}r_1 \\ 0 & a_{23}^2r_3A_2 & a_{32}^3r_2 & 0 & 3a_{23}b_{23}r_3d_2 & 6a_{32}^2b_{32}r_2 \\ a_{12}^3r_2 & a_{21}^2r_1A_1 & 0 & 3a_{12}^2b_{12}r_2 & 6a_{21}b_{21}r_1d_1 & 0 \\ a_{13}^3r_3 & 0 & a_{31}^2r_1A_3 & 6a_{13}^2b_{13}r_3 & 0 & 3a_{31}b_{31}r_1d_3 \\ 0 & a_{23}^3r_3 & a_{32}^2r_2A_2 & 0 & 3a_{23}^2b_{23}r_3 & 6a_{32}b_{32}r_2d_2 \end{pmatrix} \tag{2.20}$$

$$A_{22}=\begin{pmatrix} 6a_{12}c_{12}r_2d_1 & 3a_{13}c_{13}r_3d_3 & 0 & 6a_{12}^2r_2c_{12} & 3a_{13}^2c_{13}r_3 & 0 \\ \frac{a_{12}^2c_{12}}{\Delta_1}A_1 & 0 & 0 & \frac{a_{12}^3c_{12}}{\Delta_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a_{13}^2b_{13}}{\Delta_3}A_3 & 0 & 0 & \frac{a_{13}^3b_{13}}{\Delta_3} & 0 \\ 3a_{21}^2c_{21}r_1 & 0 & 6a_{23}c_{23}r_3d_2 & 3a_{21}c_{21}r_1d_1 & 0 & 6a_{23}^2c_{23}r_3 \\ 0 & 0 & \frac{a_{23}^2c_{23}}{\Delta_2}A_2 & 0 & 0 & \frac{a_{23}^3c_{23}}{\Delta_2} \\ \frac{a_{21}^3b_{21}}{\Delta_1} & 0 & 0 & \frac{a_{21}^2b_{21}}{\Delta_1}A_1 & 0 & 0 \\ 0 & 6a_{31}^2r_1c_{31} & 3a_{32}^2c_{32}r_2 & 0 & 6a_{31}c_{31}r_1d_3 & 3a_{32}c_{32}r_2d_2 \\ 0 & \frac{a_{31}^3c_{31}}{\Delta_3} & 0 & 0 & \frac{a_{31}^2c_{31}}{\Delta_3}A_3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a_{32}^3b_{32}}{\Delta_2} & 0 & 0 & \frac{a_{32}^2b_{32}}{\Delta_2}A_2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{2.21}$$

$$A_{23}=\mathrm{diag}(-a_{12}^3\quad -a_{13}^3\quad -a_{23}^3\quad -a_{21}^3\quad -a_{31}^3\quad -a_{32}^3), \tag{2.22}$$

$$A_{31}=\begin{pmatrix} 12a_{12}^2b_{12}c_{12} & -12a_{21}^2b_{21}c_{21} & 0 & 12a_{12}b_{12}^2c_{12} & -12a_{21}b_{21}^2c_{21} & 0 \\ 0 & 12a_{23}^2b_{23}c_{23} & -12a_{32}^2b_{32}c_{32} & 0 & 12a_{23}b_{23}^2c_{23} & -12a_{32}b_{32}^2c_{32} \\ -12a_{13}^2b_{13}c_{13} & 0 & 12a_{31}^2b_{31}c_{31} & -12a_{13}b_{13}^2c_{13} & 0 & 12a_{31}b_{31}^2c_{31} \end{pmatrix} \tag{2.23}$$

$$A_{32}=\begin{pmatrix} 12a_{12}b_{12}c_{12}^2 & 0 & -12a_{13}b_{13}c_{13}^2 \\ 6a_{12}^2c_{12}^2 & 0 & -6a_{13}^2c_{13}^2 \\ 6a_{12}^2b_{12}^2 & 0 & -6a_{13}^2b_{13}^2 \\ -12a_{21}b_{21}c_{21}^2 & 12a_{23}b_{23}c_{23}^2 & 0 \\ -6a_{21}^2c_{21}^2 & 6a_{23}^2c_{23}^2 & 0 \\ -6a_{21}^2b_{21}^2 & 6a_{23}^2b_{23}^2 & 0 \\ 0 & -12a_{32}b_{32}c_{32}^2 & 12a_{31}b_{31}c_{31}^2 \\ 0 & -6a_{32}^2c_{32}^2 & 6a_{31}^2c_{31}^2 \\ 0 & -6a_{32}^2b_{32}^2 & 6a_{31}^2b_{31}^2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \tag{2.24}$$

$$A_{33}=\begin{pmatrix} 4a_{12}^3c_{12} & 4a_{12}^3b_{12} & -4a_{21}^3c_{21} & -4a_{21}^3b_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4a_{23}^3c_{23} & 4a_{23}^3b_{23} & -4a_{32}^3c_{32} & -4a_{32}^3b_{32} \\ -4a_{13}^3c_{13} & -4a_{13}^3b_{13} & 0 & 0 & 4a_{31}^3c_{31} & 4a_{31}^3b_{31} \end{pmatrix} \tag{2.25}$$

$$A_{34}=\begin{pmatrix} a_{12}^4 & -a_{21}^4 & 0 \\ 0 & a_{23}^4 & -a_{32}^4 \\ -a_{13}^4 & 0 & a_{31}^4 \end{pmatrix}, \tag{2.26}$$

而

$$A_l:=4a_{l+1,l}a_{l,l+1}-3, \tag{2.27}$$

以及 $O_{m\times n}$表示 $m\times n$ 阶的零矩阵. 由上面的推导有

$$\dim S_8^4(\Delta_{ms}) = \binom{8+2}{2} + 24 - \operatorname{rank} M = 69 - \operatorname{rank} M. \tag{2.28}$$

§3 主要定理

定理 设 Δ_{ms} 为 Morgan-Scott 剖分，则

1. $51 \le \dim S_8^4(\Delta_{ms}) \le 52$，且 $\dim S_8^4(\Delta_{ms}) = 52 \Leftrightarrow t_1t_2t_3 = s_1s_2s_3$，即 $V_i\hat{V}_i, i=1,2,3$，交于一点.

2. 当 $d \ge 8$ 时有 $\dim S_d^4(\Delta_{ms}) = \frac{1}{2}d(7d-69)+103$.

为了证明这个主要定理，我们做一些准备工作.

首先注意到由于 (r_i, s_i, t_i) 是 V_i 对三角形 $\hat{V}_i\hat{V}_{i+1}\hat{V}_{i+2}$ 的重心坐标以及(2.2)式，可以得到重心坐标 $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, i \ne j, i, j=1,2,3$ 与 $r_i, s_i, t_i, i=1,2,3$ 之间的关系为

$$\begin{aligned} &a_{i,i+1} = t_{i+1}/r_i,\ b_{i,i+1} = r_{i+1} - s_it_{i+1}/r_i,\ c_{i,i+1} = s_{i+1} - t_it_{i+1}/r_i, \\ &a_{i-1,i} = s_i/r_{i+1},\ b_{i+1,i} = t_i - s_is_{i+1}/r_{i+1},\ c_{i+1,i} = r_i - s_it_{i+1}/r_{i+1}. \end{aligned} \quad i = 1,2,3$$

现证明两个引理.

引理 1 当 $s_1s_2s_3 = -t_1t_2t_3$ 时不可能有 $r_1r_2+s_1t_2=0, r_2r_3+s_2t_3=0, r_3r_1+s_3t_1=0$ 同时成立.

证明 采用反证法，假设存在 $r_i, s_i, t_i, i=1,2,3$，使得 $s_1s_2s_3 = -t_1t_2t_3, r_1r_2+s_1t_2=0, r_2r_3+s_2t_3=0$，和 $r_3r_1+s_3t_1=0$ 同时成立. 由于 $r_i+s_i+t_i=1, i=1,2,3$，则

$$(r_1+s_1+t_1)(r_2+s_2+t_2)(r_3+s_3+t_3) = 1. \tag{3.1}$$

而另一方面，

$$\begin{aligned} &(r_1+s_1+t_1)(r_2+s_2+t_2)(r_3+s_3+t_3) \\ =& r_1r_2r_3 + r_1r_2s_3 + r_1r_2t_3 + r_1r_3s_2 + r_1s_2s_3 + r_1s_2t_3 + r_3r_1t_2 + r_1s_3t_2 + r_1t_2t_3 \\ &+ r_2r_3s_1 + r_2s_1s_3 + r_2s_1t_3 + r_3s_1s_2 + s_1s_2s_3 + s_1s_2t_3 + r_3s_1t_2 + s_1s_3t_2 + s_1t_2t_3 \\ &+ r_2r_3t_1 + r_2s_3t_1 + r_2t_1t_3 + r_3s_2t_1 + s_2s_3t_1 + s_2t_1t_3 + r_3t_1t_2 + s_3t_1t_2 + t_1t_2t_3 \\ =& r_1r_2r_3 + r_1(s_2+t_2)(s_3+t_3) + r_2(s_3+t_3)(s_1+t_1) + r_3(s_1+t_1)(s_2+t_2) \\ =& r_1r_2r_3 + r_1(1-r_2)(1-r_3) + r_2(1-r_3)(1-r_1) + r_3(1-r_1)(1-r_2). \end{aligned}$$

由于 $r_i<0, i=1,2,3$，所以上式取负值，这与(3.1)式矛盾. 因此命题成立.

引理 2 当 $s_1s_2s_3 = t_1t_2t_3$ 时，$\operatorname{rank} M = 17$，而当 $s_1s_2s_3 = -t_1t_2t_3$ 时，$\operatorname{rank} M = 18$.

证明 为了确定不同情形下 $\operatorname{rank} M$ 的取值，我们要对 M 进行一系列的保秩变换. 由于 M 表示的复杂性，我们只是给出关键的变换步骤和结果.

1. 从第 16 列到第 21 列的每列除以该列最上面的非零数，如第 16 列除以 $-a_{12}^3$；
2. 第 8 列除以 a_{12}^2，第 9 列除以 a_{13}^2，第 11 列除以 a_{23}^2，第 12 列除以 a_{21}^2，第 14 列除以 a_{31}^2，第 15 列除以 a_{32}^2；
3. 把第 16 列乘以 $-3a_{12}^2b_{12}$，第 17 列乘以 $-3a_{13}^2c_{13}$ 都加到第 1 列上；把第 18 列乘以 $-3a_{23}^2b_{23}$，第 19 列乘以 $-3a_{21}^2c_{21}$ 都加到第 2 列上；把第 20 列乘以 $-3a_{31}^2b_{31}$，第 21 列乘以 $-3a_{32}^2c_{32}$ 都加到第 3 列上；

4. 把第 9 列乘以 $-2a_{13}c_{13}$,第 16 列乘以 $-3a_{12}b_{12}^2$ 都加到第 4 列上;把第 12 列乘以 $-2a_{21}c_{21}$,第 18 列乘以 $-3a_{23}b_{23}^2$ 都加到第 5 列上;把第 15 列乘以 $-2a_{32}c_{32}$,第 20 列乘以 $-3a_{31}b_{31}^2$ 都加到第 6 列上;
5. 如上操作后,用 $s_3^4s_2^4\times$ 第 16 行 $+t_1^4t_2^4\times$ 第 17 行 $+t_2^4s_2^4\times$ 第 18 行代替第 18 行,则在 $(s_1s_2s_3)^2=(t_1t_2t_3)^2$ 的条件下,$M_{18,1}$,$M_{18,2}$,$M_{18,3}$,$M_{18,4}$,$M_{18,5}$,$M_{18,6}$ 和 $M_{18,22}$,$M_{18,23}$,$M_{18,24}$ 都成为 0.

当我们要把第 18 行从第 7 列到第 21 列的元素利用行变换消为 0 时,$M_{18,1},M_{18,2},\cdots,M_{18,6}$ 又变为非零元素,如

$$M_{18,1}=4\frac{t_1^3t_2^6t_3^3}{s_1^4s_2s_3r_1^4r_2r_3}(s_1s_2s_3-t_1t_2t_3)(t_1^3t_2^3t_3^3s_2-r_2r_3t_1^3t_2^3t_3^2+s_1s_2^2s_3t_1^2t_2^2t_3^2$$
$$-r_2r_3s_1s_2s_3t_1^2t_2^2t_3+t_1t_2t_3s_1^2s_2^3s_3^2-r_2r_3s_1^2s_2^2s_3^2t_1t_2+2s_1^3s_2^4s_3^3),$$

$M_{18,2},\cdots,M_{18,6}$ 的表示类似,这六个元素都有公因子 $s_1s_2s_3-t_1t_2t_3$,所以当 $s_1s_2s_3=t_1t_2t_3$ 时经保秩变换后 M 的第 18 行全是零元素,即 $\mathrm{rank}M=17$.

当 $s_1s_2s_3=-t_1t_2t_3$ 时,我们考虑经上述保秩变换后 M 的第 18 行. 其从第 7 列到第 24 列的元素都是 0,而在 $s_1s_2s_3=-t_1t_2t_3$ 时

$$M_{18,1}=8\frac{t_1^3t_2^6t_3^3}{r_1^4r_2r_3}(r_2r_3+s_2t_3)s_2^3s_3^3,$$

$$M_{18,2}=8\frac{t_1^3t_2^3t_3^6}{r_1r_2^4r_3}(r_3r_1+s_3t_1)s_3^3s_1^3,$$

$$M_{18,3}=8\frac{t_1^6t_2^3t_3^3}{r_1r_2r_3^4}(r_1r_2+s_1t_2)s_1^3s_2^3.$$

由引理 1 可知 $M_{18,1}=0$,$M_{18,2}=0$ 和 $M_{18,3}=0$ 不可能同时成立,所以当 $s_1s_2s_3=-t_1t_2t_3$ 时 $\mathrm{rank}M=18$.

有了上述两个引理之后,下面我们来证明本文的主要定理.

证明　由于 $17\le\mathrm{rank}M\le18$,由(2.28)式显然有 $51\le\dim S_8^4(\Delta_{ms})\le52$.

当 $(s_1s_2s_3)^2\ne(t_1t_2t_3)^2$ 时,在 M 中由于 $\det A_{34}\ne0$,所以 $\mathrm{rank}M=18$,从而

$$\dim S_8^4(\Delta_{ms})=51. \tag{3.2}$$

又根据引理 2 和(3.2),可有 $\dim S_8^4(\Delta_{ms})=52\Leftrightarrow s_1s_2s_3=t_1t_2t_3$(即 $V_i\hat{V}_i$,$i=1,2,3$,交于一点).

当 $d\ge8$ 时由[8]知 $\dim S_8^4(\Delta_{ms})\ge\frac{1}{2}d(7d-69)+103$,由[5]的推导知此时一定达到下界,故有 $\dim S_d^4(\Delta_{ms})=\frac{1}{2}d(7d-69)+103$.

这就完成了本文主要定理的证明.

(本文作者通讯地址:合肥市中国科技大学数学系　邮码　230026)

参 考 文 献

[1] Morgan, J. and Scott, R., The dimension of piecewise polynomials, manuscript, 1977.

[2] Bohm, W., Farin, G. and Kahmann, J., A survey of curve and surface method in CAGD, *CAGD*, **1** (1984), 1-60.

[3] Chen, Z. B., Feng, Y. Y. and Kozak, J., The Blossom approach to the dimension of the bivariate spline space, *Institute of Math. of USTC*, preprint 96-001.

[4] Shi, X. Q., The singularity of Morgan-Scott triangulation, *CAGD*, **8**(1991), 201-206.

[5] Diener, D., Instability in the dimension of spaces of bivariate piecewise polynomials of degree $2r$ and smoothness order r, *SIAM J. Numer. Anal.*, **27**: 2(1990), 543-551.

[6] Chen Z. B., Deng J. S., Feng Y. Y., On the Dimension of the C^3 Spline Space for Morgan-Scott partition, *J. of USTC*, to appear.

[7] Chang, G. Z. and Davis, P. J., The convexity of Bernstein polynomials over triangle, *J. Approx. Theory*, **40**(1984), 11-28.

[8] Schumaker, L. L., Lower bounds for the dimension of the spaces of piecewise polynomials in two variables, in: Schempp, W. and Zeller, K. eds., Multivariate Approximation Theory, Birkhäuser-Verlag, Besel, 1979, 396-412.

ON THE DIMENSION OF THE C^4 SPLINE SPACE FOR MORGAN-SCOTT PARTITION

Deng Jiansong, Xi Meicheng, Feng Yuyu

(*Dept. of Math., University of Science and Technology of China, Hefei* 230026)

Abstract

As is well known that the dimension of spline space for Morgan-Scott partition relatives the geometry of the partition. Diener (1990) posed a conjecture. In this paper, it is proved that the conjecture for $r=4$ is not correct.

Key Words MS Partitions, Spline Spaces, Dimensions.

Subject Classification (CL) O152.2; (1991**MR**) 68U07, 65D07.