

应用代数张量积 B 样条曲面构造 Blending 曲面^{*}

王 俊, 杨周旺, 邓建松

(中国科学技术大学数学系, 安徽合肥 230026)

摘要:给出了一种应用代数张量积 B 样条曲面构造 blending 曲面的框架并详细讨论了二次代数曲面间 blending 曲面的构造方法. 应用该方法可以得到一个整体 C^1 连续的代数样条曲面, 且能够通过增加节点、约束点和逼近点等途径来调整曲面的形状, 使得参数调节具有一定的几何直观性, 并在复杂曲面 blending 问题中表现出较大的灵活性. 数值实验结果说明了该方法的有效性.

关键词:代数张量积 B 样条曲面; blending 曲面; 薄板能量; 最优化

中图分类号:TP391.72

文献标识码:A

Blending surfaces with algebraic tensor-product B-spline surfaces

WANG Jun, YANG Zhou-wang, DENG Jian-song

(Department of Mathematics, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China)

Abstract: A frame to construct a blending surface among quadrics with the algebraic tensor-product B-spline surfaces was presented. A C^1 continuous algebraic spline surface was obtained that very smoothly joined the given quadrics. Examples were provided to demonstrate the detailed construction procedure. The results indicate that the method can control the shape of blending surfaces by adding the numbers of knots, restrictive points and approximation points, and that it has several parameters with more intuitionistic and more geometric signification. So the method is very flexible in solving complex blending problems.

Key words: algebraic tensor-product B-spline surfaces; blending surfaces; thin-plate energy; optimization

0 引言

在曲面造型中, blending 方法是一种构造曲面间光滑过渡的技术. 它在很多领域中有着重要的应用, 如机械设计与制造、计算机图形与动画、飞行模拟等. Blending 方法根据所构造 blending 曲面的不同表示形式, 可以分为参数方法和隐式方法. 关于参数 blending 曲面的构造, 详见文献[1]. 近年来, 随着隐式曲面在造型中的广泛应用, 隐式 blending 方

法的研究取得了较大的发展.

文献[2]中, Rossignac 和 Requicha 利用滚球法进行 blending 曲面的构造, 但其结果复杂且容易出现自交的情形. Hoffmann 和 Hopcroft 提出的势能方法^[3]以及 Li 等提出的更一般的泛函样条方法^[4]都利用了函数的幂次构造, 因此曲面次数较高. WU 利用 Gröbner 基方法给出了相对次数较低的曲面^[5], 但如何选取组合系数生成曲面并不直观. CHEN 提出了应用分片低次代数曲面构造 blending 曲面的

* 收稿日期: 2005-12-15; 修回日期: 2006-05-29

基金项目: 国家自然科学基金(60473132, 60533060)资助.

作者简介: 王俊, 男, 1980 年生, 博士生. 研究方向: 计算机辅助几何设计, 代数曲面造型. E-mail: wangj007@mail.ustc.edu.cn

通讯作者: 邓建松, 教授. E-mail: dengjs@ustc.edu.cn

方法^[6~8],但空间剖分的构造仍是一个没有得到很好解决的问题.

我们希望寻找一种无需人为构造空间剖分,且参数具有一定几何直观意义的 blending 方法. 本文给出了代数张量积 B 样条曲面构造 blending 曲面的方法,在满足指定的边界连续性条件下,通过能量最优化模型求解曲面系数,避免了人为构造空间剖分和系数选取不直观等问题. 该方法可以通过调节 B 样条的节点、曲面的逼近点和约束点来增加曲面的自由度,满足复杂造型的要求. 本文讨论的主要是二次代数曲面的 blending 问题,实际上二次曲面以及它们之间的 blending 曲面在 CAD/CAM 中有着不同于其他高次曲面的特殊地位^[9].

1 代数张量积 B 样条曲面

定义 1.1 在 $\mathbb{R}^3$ 中区域

$$\Omega = [x_1, x_{M+d+1}] \times [y_1, y_{N+d+1}] \times [z_1, z_{L+d+1}]$$

上定义的 (d, d, d) 次张量积 B 样条函数是指

$$g(x, y, z) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^L c_{ijk} M_i(x) N_j(y) L_k(z).$$

其中, $c_{ijk} \in \mathbb{R}$ 是控制系数, $\{M_i(x)\}_{i=1}^M$, $\{N_j(y)\}_{j=1}^N$, $\{L_k(z)\}_{k=1}^L$ 分别为定义在节点序列 $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{M+d+1}$, $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_{N+d+1}$, $z_1 \leq z_2 \leq \dots \leq z_{L+d+1}$ 上的 d 次 B 样条基函数.

定义 1.2 张量积 B 样条函数 $g(x, y, z)$ 的零点集

$$V(g) = \{(x, y, z) \in \Omega \mid g(x, y, z) = 0\},$$

我们称之为代数张量积 B 样条曲面. 在取定 B 样条基函数的情况下,隐式曲面 $V(g)$ 完全由控制系数 $\{c_{ijk}\}$ 决定.

两个代数曲面的 blending 问题一般性描述为: 给定代数曲面 $V(f_1)$ 和 $V(f_2)$, 分别与辅助曲面 $V(F_1)$ 和 $V(F_2)$ 横截相交于曲线 C_1 和 C_2 , 要求 blending 曲面 $V(g)$ 分别与 $V(f_1)$ 和 $V(f_2)$ 沿交线 C_1 和 C_2 满足一定的连续性.

待 blending 曲面为辅助曲面所截,辅助曲面之间的部分是我们感兴趣的区域,通常称为 blending 区域. 在实际应用中,辅助曲面 $V(F_r)$ 往往为一平面,所以我们一般取长方体 Ω 作为 blending 区域,然后在 Ω 中定义相应张量积 B 样条函数及构造代数张量积 B 样条曲面. 本文讨论 $V(F_r)$ 相互平行或垂直的情形,下面给出一个简单的情形作为示例.

问题 1.3 两个待 blending 二次代数曲面

$$f_1 = x^2 + z^2 - 1 = 0, \quad y < -2;$$

$$f_2 = x^2 + z^2 - 1 = 0, \quad y > 2,$$

分别与辅助平面 $F_1 = y + 2 = 0$ 和 $F_2 = y - 2 = 0$ 横截相交,要求曲面 $V(g)$ 分别与 $V(f_1)$ 和 $V(f_2)$ 在辅助平面上光滑拼接,如图 1 所示.

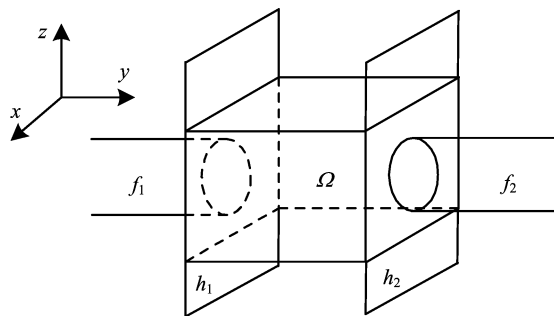


图 1 两个代数曲面的 blending 问题

Fig. 1 The problem of blending two algebraic surfaces

选定 blending 区域

$$\Omega = [x_1, x_{M+d+1}] \times [-2, 2] \times [z_1, z_{L+d+1}],$$

它是一个以 $V(F_1)$ 和 $V(F_2)$ 为两个侧面的长方体. x, y, z 方向选取节点序列 $\{x_i\}_{i=1}^{M+d+1}$, $\{y_i\}_{i=1}^{N+d+1}$, $\{z_k\}_{k=1}^{L+d+1}$, 由此定义的代数张量积 B 样条曲面 $V(g)$ 就是用来构造 blending 的过渡曲面. 在本文中, B 样条基函数的节点序列中内节点都取单节点, 则代数张量积 B 样条函数是 $d-1$ 阶连续的, 所以代数张量积曲面 $V(g)$ (除奇异点外) 是 C^{d-1} 光滑的^[10].

2 边界连续性条件

待 blending 的代数曲面形如

$$V(f) = \{(x, y, z) \in \Omega \mid f(x, y, z) = \sum_{i+j+k=d} a_{ijk} x^i y^j z^k = 0, f(x, y, z) \in P_d\},$$

其中, 多项式函数空间定义为

$$P_d = \text{span}\{x^i y^j z^k\}_{i=1, j=1, k=1}^{d, d, d}.$$

考虑 (d, d, d) 次代数张量积 B 样条函数空间

$$T_d = \text{span}\{M_i(x) N_j(y) L_k(z)\}_{i=1, j=1, k=1}^{M, N, L}.$$

易知 P_d 是 T_d 的子空间^[10], 任意 d 次多项式 $f(x, y, z)$ 可用 (d, d, d) 次代数张量积 B 样条基函数 $g(x, y, z)$ 表示. 下面我们利用一元 B 样条函数的 Marsden 恒等式性质^[10] 给出多项式的代数张量积 B 样条表示. 以 x 方向节点序列 $x_1 \leq \dots \leq x_{M+d+1}$ 上 d 次 B 样条函数 $\{M_i(x)\}_{i=1}^M$ 为例, 对任意 $x \in [x_1, x_{M+d+1}]$, 有

$$x^v = \sum_{i=1}^M \xi_i^{v+1} M_i(x), \quad v = 1, 2, \dots, d. \quad (1)$$

其中,

$$\xi_i^{v+1} = (-1)^v \frac{j!}{d!} D^{d-v} \phi_i(0),$$

$$\phi_i(x) = \prod_{u=1}^d (x - x_{i+u}).$$

由式(1)可得

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \sum_{i+j+k=d} a_{ijk} x^i y^j z^k = \\ &= \sum_{i+j+k=d} \left\{ a_{ijk} \left(\sum_{i'=1}^M \xi_{i'}^{i+1} M_{i'}(x) \right) \cdot \right. \\ &\quad \left. \left(\sum_{j'=1}^N \xi_{j'}^{j+1} N_{j'}(y) \right) \left(\sum_{k'=1}^L \xi_{k'}^{k+1} L_{k'}(z) \right) \right\} = \\ &= \sum_{i'=1}^M \sum_{j'=1}^N \sum_{k'=1}^L c_{i'j'k'} L_{k'}(z) N_{j'}(y) M_{i'}(x). \end{aligned}$$

其中, $c_{i'j'k'} = \sum_{i+j+k=d} a_{ijk} \xi_{i'}^{i+1} \xi_{j'}^{j+1} \xi_{k'}^{k+1}$.

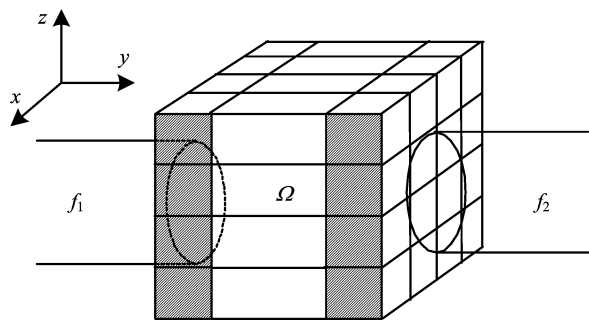


图2 Blending 区域的网格层

Fig. 2 The gridding levels of blending field

由上述可知,我们可以将待 blending 代数曲面延展进入 blending 区域,并表示为代数张量积 B 样条曲面形式.以问题 1.3 为例, x, y, z 三个方向的节点序列分别将 blending 区域 Ω 剖分为 $M-d$, $N-d$, $L-d$ 个网格层.若将待 blending 曲面延展进入区域 Ω ,则由式(1)可得, $V(f_r)$ 在与各自的截平面 $V(F_r)$ 相邻的网格层(即 y 方向的第 1 层与第 $N-d$ 层,如图 2 中阴影所示)内的 (d, d, d) 次代数张量积 B 样条形式

$$f_1(x, y, z) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^L Q = 0, -2 < y < y_2;$$

$$f_2(x, y, z) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=N-2}^N \sum_{k=1}^L Q = 0, y_{N-2} < y < 2.$$

其中, $Q = (x_i x_{i+1} + z_k z_{k+1} - 1) M_i(x) N_j(y) L_k(z)$. 于是,令 blending 曲面 $V(g)$ 的控制系数满足

$$\left. \begin{aligned} c_{ijk} &= x_i x_{i+1} + z_k z_{k+1} - 1, i = 1, \dots, M, \\ j &= 1, 2, 3, N-2, N-1, N; k = 1, \dots, L. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

在这里,条件(2)使得在与截面 $V(F_r)$ 相邻的网格层

内,曲面 $V(g)$ 与 $V(f_r)$ 具有完全相同的张量积 B 样条表达,因此 blending 曲面 $V(g)$ 与待 blending 曲面 $V(f_r)$ 在边界线 C_r 上达到 C^{d-1} 光滑.

3 最优化模型

能量优化思想早在 20 世纪 80 年代就被 Terzopolous 等引入到曲面造型中^[11,12],目前已得到广泛的应用.所谓能量优化是指在满足几何约束的条件下寻找具有最小物理变形能量的曲线曲面造型方法.本节我们将利用能量最优化方法来构造 blending 曲面,其中,边界连续性条件(2)已经决定了 blending 曲面的一部分控制系数,余下的控制系数将通过能量最优化方法来确定.

3.1 能量优化

函数 $g(x, y, z)$ 在空间区域中的薄板能量可以近似刻画其相应隐式曲面 $V(g)$ 的曲率变化^[13].薄板能量定义如下

$$E(g) = \iiint_{\Omega} (g_{xx}^2 + g_{yy}^2 + g_{zz}^2 + 2g_{xy}^2 + 2g_{yz}^2 + 2g_{zx}^2) dx dy dz, \quad (3)$$

在本文问题中 Ω 即是 blending 区域.如果曲面 $V(g)$ 在 Ω 中有凸起或褶皱等不光顺的现象,则薄板能量 $E(g)$ 较大.为此我们可以构造能量最优化模型

$$\min E(g),$$

使得 blending 曲面 $V(g)$ 满足边界几何连续性条件的同时,在区域 Ω 中尽量光顺.

在某些情况下,人们对 blending 曲面形状有一定的预期,这时可对上述最优化模型添加相应的约束条件.例如,在区域 Ω 内选取约束点列 $\{S_1, \dots, S_{m_0}, S_{m_0+1}, \dots, S_m\}$,其中, $\{S_1, \dots, S_{m_0}\}$ 位于 blending 曲面 $V(g)$ 的外部,而 $\{S_{m_0+1}, \dots, S_m\}$ 在曲面内部.于是以点的代数距离符号作为约束条件,构造如下带约束的能量最优化模型

$$\left. \begin{aligned} \min E(g), \\ \text{s. t. } g(S_i) &\geq 0, i = 1, \dots, m_0; \\ g(S_i) &\leq 0, i = m_0+1, \dots, m. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

显然,这种约束最优化模型可大致地界定 blending 曲面 $V(g)$ 的形状.

在给定区域及其剖分下的 blending 曲面 $V(g)$ 将由控制系数 $\{c_{ijk}\}$ 决定,且必须满足边界连续性条件(2).因此我们可设 $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)^T$ 作为相应最优化模型的变量,它表示 blending 曲面 $V(g)$ 经边界连续性条件限定后的待求系数向量.此时,薄板能量

$E(g)$ 是关于未知系数向量 $\mathbf{c}$ 的二次函数,符号约束条件则是线性的. 于是,带约束的能量最优化模型(4)可表示成如下矩阵形式

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\mathbf{c}} (\mathbf{c}^T \mathbf{H} \mathbf{c} + \mathbf{b}^T \mathbf{c} + a), \\ \text{s. t. } \mathbf{U} \mathbf{c} \leq \mathbf{v}. \end{array} \right. \quad (5)$$

其中, $\mathbf{H}$ 为 $n \times n$ 阶实对称正定阵,可由薄板能量(3)计算得到, $\mathbf{U}$ 为 $m \times m$ 阶约束矩阵, $\mathbf{b}, \mathbf{v}$ 分别是 n 阶和 m 阶向量, a 是实数. 易知,最优化模型(5)是典型的二次规划问题,只要约束集 $\{\mathbf{c} | \mathbf{U} \mathbf{c} \leq \mathbf{v}\}$ 非空,其解一定存在. 本文通过迭代算法求解该问题,也可以直接利用数值软件 MATLAB 的最优化工具箱来求解.

3.2 代数距离逼近

当 blending 问题较为复杂或对 blending 曲面形状的预期更为精细的时候,需要更加准确地控制 blending 曲面的形状. 这里,我们考虑在能量最优化模型的目标函数中增加代数距离逼近项. 根据对曲面的预期和实际问题的要求,选取 Ω 中的逼近点集 $\{P_k\}_{k=1}^l$,希望曲面尽量逼近这些点. 我们将所有逼近点的代数距离平方和添加到最优化模型(4)的目标函数中,从而加强对曲面形状的控制. 此时,可建立最优化模型

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\mathbf{c}} (\alpha E(g) + (1-\alpha)A(g)), \\ \text{s. t. } g(S_i) \geq 0, i = 1, \dots, m_o; \\ g(S_i) \leq 0, i = m_{o+1}, \dots, m. \end{array} \right. \quad (6)$$

其中, $\alpha \in [0, 1]$ 称为能量权重系数,

$$A(g) = \sum_{k=1}^l g^2(P_k)$$

是所有逼近点到曲面 $V(g)$ 的代数距离平方和. 通过求解式(6),并结合条件(2),便可得到相应 blending 曲面 $V(g)$.

4 实例

本文用三个实例来示范代数张量积 B 样条曲面 blending 方法. 在例 4.1 中,我们构造一个代数张量积 B 样条曲面 blending 两个二次代数曲面,两个截平面平行;例 4.2 中,两个给定二次管道曲面的轴线平行,两个截平面平行;例 4.3 是两个截平面相互垂直的二次代数曲面 blending. 这些例子说明,本文给出的方法能有效地生成 blending 曲面,并能通过参数来调节 blending 曲面的形状.

4.1 例子 4.1

给定两个二次曲面及其截面

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1 = y^2 + z^2 - r^2 = 0, \quad F_1 = x - h_1 = 0; \\ f_2 = y^2 + z^2 - x = 0, \quad F_2 = x - h_2 = 0. \end{array} \right. \quad (7)$$

在 blending 区域 $\Omega = \{(x, y, z) : -h_1 \leq x \leq h_2, |y| \leq w_y, |z| \leq w_z\}$ 内寻找一个 $(2, 2, 2)$ 次的代数张量积曲面

$$V(g) = \left\{ (x, y, z) \mid g(x, y, z) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^L c_{ijk} M_i(x) N_j(y) L_k(z) = 0 \right\}, \quad (8)$$

分别在截平面 $V(F_1)$ 和 $V(F_2)$ 上与待 blending 代数曲面 $V(f_1)$ 和 $V(f_2)$ 达到边界 C^1 连续.

首先处理曲面 $V(g)$ 与待 blending 代数曲面在边界曲线上的连续性条件,将曲面(7)化为代数张量积 B 样条形式

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1 = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^L [(y_j y_{j+1} + z_k z_{k+1} - r^2) M_i(x) N_j(y) L_k(z)], \\ f_2 = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^L \left[\left(y_j y_{j+1} + z_k z_{k+1} - \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right) M_i(x) N_j(y) L_k(z) \right]. \end{array} \right. \quad (9)$$

根据第 2 节中边界连续性条件分析可得

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{ijk} = y_j y_{j+1} + z_k z_{k+1} - r^2, \\ i = 1, 2, 3, j = 1, \dots, N, k = 1, \dots, L; \\ c_{ijk} = y_j y_{j+1} + z_k z_{k+1} - \frac{x_i + x_{i+1}}{2}, \\ i = M-2, M-1, M, \\ j = 1, \dots, N, k = 1, \dots, L. \end{array} \right. \quad (10)$$

记曲面 $V(g)$ 的未知系数为列向量 $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)^T$, 其中, $n = MNL - 6NL$.

将式(10)代入曲面(8),根据第 3 节内容构造最优化模型,这个例子里我们没有选取逼近点,也没有约束点,因此得到的是一个无约束的最优化模型

$$\min_{\mathbf{c}} (\mathbf{c}^T \mathbf{H} \mathbf{c} + \mathbf{b}^T \mathbf{c} + a), \quad (11)$$

取 $r = 1, h_1 = -2, h_2 = 2, w_y = w_z = 1.2, M = 7, N = 4, L = 4$, 且样条基函数的节点序列等距选取, 这里我们取内节点为单节点, 曲面 $V(g)$ 整体 C^1 光滑. 求解模型(11)得系数向量 $\mathbf{c}$, 与式(10)一起代入式(8), 得到 blending 曲面, 如图 3 所示.

如果要对 blending 曲面的形状进行更细致的控制, 可以通过增加约束点来实现. 我们要求点

$S_1=(0,0,0.8)$ 与 $s_2=(0,0,-0.8)$ 位于曲面外,即希望曲面在 $x=0$ 平面上处更凹一些,最优化模型变为

$$\left. \begin{aligned} & \min_c (c^T H c + b^T c + a), \\ & \text{s. t. } g(0,0,0.8) \geq 0, \\ & \quad g(0,0,-0.8) \geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

结果如图 4 所示.

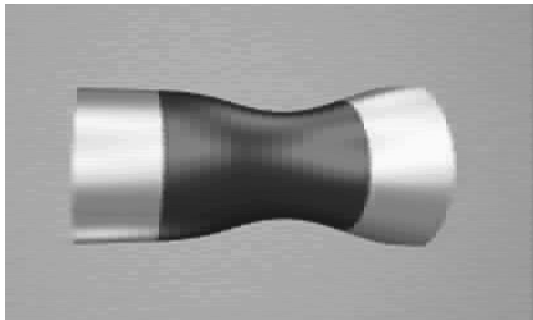


图 3 圆柱和圆锥的 blending 曲面

Fig. 3 Blending a cylinder and a cone

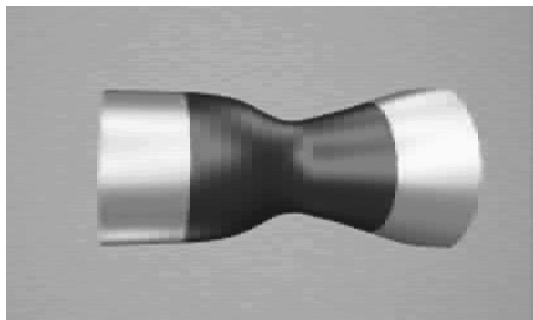


图 4 增加了两个约束点的 blending 曲面

Fig. 4 Blending a cylinder and a cone with adding two restraint points

4.2 例子 4.2

给定两个圆柱曲面及其截平面

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= (y-0.5)^2 + z^2 - 1 = 0, \quad F_1 = x+2 = 0; \\ f_2 &= (y+0.5)^2 + z^2 - 1 = 0, \quad F_2 = x-2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

在 blending 区域

$\Omega = \{(x,y,z): -2 \leq x \leq 2, |y| \leq w_y, |z| \leq w_z\}$ 构造(2,2,2)次的代数张量积 B 样条曲面 $V(g)$, 表达形式如式(8). 取 $M=7, N=4, L=6, w_y=2.2, w_z=2.2$. 在 x, y, z 方向上分别选取节点序列,

$$\begin{aligned} -2 &= x_1 < \cdots < x_6 = 2, \\ -2.2 &= y_1 < y_2 < y_3 = 2.2, \\ -1.2 &= z_1 < \cdots < z_5 = 1.2. \end{aligned}$$

根据边界连续条件可得

$$\left. \begin{aligned} c_{ijk} &= y_j y_{j+1} - \frac{y_j + y_{j+1}}{2} + z_k z_{k+1} - 0.75, \\ & \quad i = 1, 2, 3, j = 1, \cdots, 4, k = 1, \cdots, 6; \\ c_{ijk} &= y_j y_{j+1} + \frac{y_j + y_{j+1}}{2} + z_k z_{k+1} - 0.75, \\ & \quad i = 5, 6, 7, j = 1, \cdots, 4, k = 1, \cdots, 6. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

将式(14)代入曲面 $V(g)$, 选取逼近点 $P_1=(0,0,-1)$, $P_2=(0,0,1)$, 不加约束点, 构造最优化模型

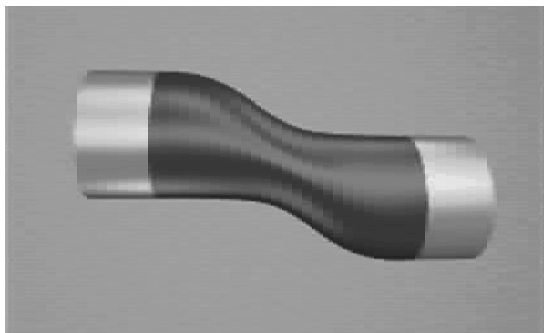
$$\min_c (\alpha E(g) + (1-\alpha)(g^2(P_1) + g^2(P_2))), \quad (15)$$

求解得到 blending 曲面. 选取不同的能量权重系数 α 调节曲面的形状, 如图 5 所示.

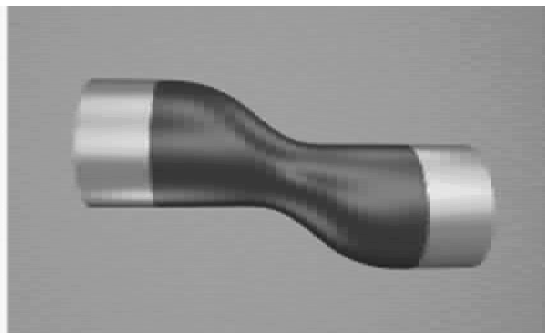
4.3 例子 4.3

给定两个椭圆柱曲面及其截平面

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= \frac{x^2}{4} + z^2 - \frac{1}{4} = 0, \quad F_1 = y-3 = 0; \\ f_2 &= x^2 + \frac{y^2}{4} - \frac{1}{4} = 0, \quad F_2 = z-2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$



(a) $\alpha=0.001$



(b) $\alpha=0.1$

图 5 两个轴线平行的圆柱管道 blending 曲面

Fig. 5 Blending two cylinders which axes are parallel to each other

在 blending 曲面的区域

$$\Omega = \{(x, y, z): |x| \leq w_x, w_y \leq y \leq 3, w_z \leq z \leq 2\}$$

内构造(2,2,2)次的代数张量积B样条曲面 $V(g)$, 表达形式如式(8). 取 $w_x = 1.2, w_y = -2.2, w_z = -2.2, M=4, N=7, L=7, x, y, z$ 方向上的节点序列不再取为等距节点, 这是因为本例中两个截面垂直相交, 需要避免边界曲线上的连续性条件出现不相容的情况. 根据边界连续性条件分析有

$$\left. \begin{aligned} c_{ijk} &= x_j x_{j+1} + z_k z_{k+1} - 1, \\ i &= 1, \dots, 4, j = 5, 6, 7, k = 1, \dots, 4; \\ c_{ijk} &= x_j x_{j+1} + y_k y_{k+1} - 1, \\ i &= 1, \dots, 4, j = 1, \dots, 4, k = 5, 6, 7. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

所以与式(17)中的系数相对应的基函数的支集必须两两无交, 这时需要调整 y, z 方向的节点序列来满足这一要求.

我们选取三个逼近点 $P_1 = (0, 0, 0), P_2 = (0, -1, 1), P_3 = (0, 2, -0.5)$ 来构造最优化模型

$$\min_c (c^T H c + b^T c + a). \quad (18)$$

求解式(18)得 blending 曲面, 结果如图6所示.

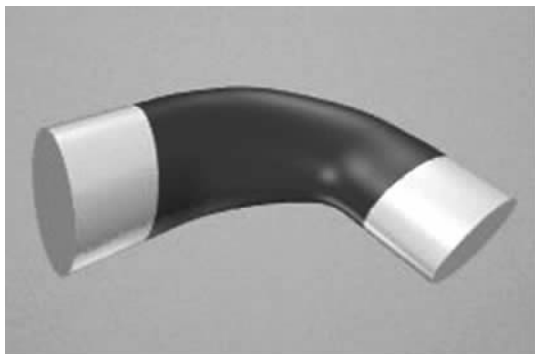


图6 两个截面垂直的椭圆柱曲面 blending 问题

Fig. 6 Blending two elliptical cylinders which axes are perpendicular to each other

5 结论

我们提出了一种用代数张量积B样条曲面blending代数曲面的方法, 所得到的blending曲面整体是 C^1 连续的. 该方法在不升高曲面次数的情况下可以通过增加节点、逼近点和约束点个数等途径

来满足复杂blending问题的要求, 并且给出了具有几何直观意义的参数来调整曲面的形状, 具有较大的灵活性. 本文的结果可以推广到任意代数曲面. 如何处理截面平行、垂直以外的情形是下一步要研究的课题.

参考文献 (References)

- [1] Vida J, Martin R R, Varady T. A survey of blending methods that use parametric surfaces[J]. Computer Aided Design, 1994, 26(5):341-365.
- [2] Rossignac J R, Requicha A A G. Constant radius blending in solid modeling[J]. Comp. Mech. Eng., 1984, 3(1):65-73.
- [3] Hoffmann C, Hopcroft J. Quadratic blending surfaces[J]. Computer Aided Design, 1986, 18:301-307.
- [4] Li J, Hoschek J, Hartmann E. Gn-1-functional splines for interpolation and approximation of curves, surfaces and solids[J]. Computer Aided Geometric Design, 1990, 7:209-220.
- [5] WU T R, GAO W G, FENG G C. Blending of implicit algebraic surfaces[C] // Proceedings of the ASCM, 1995. Tokyo: Scientists Incorporated, 1995:125-131.
- [6] CHEN C S, CHEN F L, DENG J S. Filling holes with piecewise algebraic surfaces [J]. Computer Mathematics, 2000, 8: 182-191.
- [7] CHEN F L, DENG J S, FENG Y Y. Algebraic surface blending using Wu's method[J]. Computer Mathematics, 2000,8:172-181.
- [8] CHEN C S, CHEN F L, FENG Y Y. Blending quadric surface with piecewise algebraic surfaces[J]. Graphical Models, 2001, 63(4): 212-227.
- [9] WU T R, ZHOU Y S. On blending of several quadratic algebraic surfaces [J]. Computer Aided Geometric Design, 2000, 17(8): 759-766.
- [10] Schumaker L. Spline Functions: Basic Theory[M]. New York: Wiley-Interscience, 1981.
- [11] Terzopolous D, Platt J, Barr A. Elastically deformable models[J]. ACM SIGGRAPH Computer Graphics, 1987, 21(4):205-214.
- [12] Terzopolous D, Qin H. Dynamic NURBS with geometric constraints for interactive sculpting [J]. ACM Transactions on Graphics, 1994, 13(2):103-136.
- [13] Turk G, O'brien J F. Modelling with implicit surfaces that interpolate[J]. ACM Transaction on Graphics, 2002, 21(4):855-873.