

关于数据外推定理的迭代改进^{*}

吴春林, 邓建松, 陈发来

(中国科学技术大学数学系, 安徽合肥 230026)

摘要: 研究数据外推技术中非常重要的带状区域定位方法. 数据外推定理给出外推后带状区域的定位方案. 指出这个定理给出的只是一个非常粗糙的定位方案, 甚至很多情况下是无效的. 针对这个问题, 提出了基于迭代进行改进的方案. 新方案能够更加精确地定位带状区域, 并且在适当的假定下对粗糙方案无效的情况也能定位出一个有效的带状区域. 实验例子表明了新方案的精确性与有效性.

关键词: 数据外推; 定位; 迭代

中图分类号: O241.8

文献标识码: A

Iterative improvement of data extrapolating theorem

WU Chun-lin, DENG Jian-song, CHEN Fa-lai

(Department of Mathematics, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China)

Abstract: The locating methods of available bands, which was very important in the data extrapolating technique, were studied. Data Extrapolating Theorem which may offer a method of locating are available band, was proved. Then it is pointed out that current locating methods were very rough and even unfeasible in many cases. Therefore, an iteration-based locating method was proposed, which may locate an available band more precisely and also can locate an available band for cases in which current locating methods fail to work under an appropriate assumption. Examples show the accuracy and effectiveness of the iteration-based method.

Key words: data extrapolating; locating; iteration

0 引言

数据外推技术是曲面上图像处理与 Level Set 方法中不可或缺的一个环节. 对近年来日益受到人们重视的曲面上的图像处理, 由于很难直接应用平面图像处理中的经典方法, 因此基于微分方程的方法^[1~3] 则成为处理曲面上图像数据的主要方法^[4~6]. 隐式曲面是一种非常流行的曲面表示方法,

处理定义于隐式曲面上的图像数据成为非常有意义的问题. Osher 等人在文献[4]中研究了隐式曲面上的图像去噪问题, 我们在文献[6]中给出隐式曲面上的图像修复算法. 这些方法都是基于能量极小及偏微分方程技术. 由于数值求解的需要, 定义于曲面上的数据必须先外推到曲面附近的一个窄带(一种数据延拓).

数据外推技术在 Level Set 方法中也扮演着重

^{*} 收稿日期: ; 修回日期:

基金项目: 国家重点基础研究发展(973)计划(2004CB318000), 国家杰出青年基金(60225002), 国家自然科学基金(60533060 和 60473132), 教育部留学回国人员科研启动基金资助.

作者简介: 吴春林, 男, 1982 年生, 博士. 研究方向: 计算机辅助几何设计与图形学, 图像处理, 偏微分方程数值解.

通讯作者: 邓建松, 教授. E-mail: dengjs@ustc.edu.cn

要的角色. 自上世纪 80 年代末以来, Level Set 方法及其应用发展迅速, 且日益受到人们的重视^[7~11]. Level Set 方法将界面表达成一个隐函数如符号距离函数的零等值集, 然后通过这个隐函数的演化来控制界面的运动. 这就需要给出隐函数在空间中的演化速度(在窄带 Level Set 方法中演化速度需要在一个带状区域中给出). 然而在很多实际问题中, 速度只是在界面上给定, 在空间中其他地方没有给出, 这方面典型的例子是 Stefan 问题^[7]及 Hele-Shaw 流问题^[8]. 为了实现隐函数的演化或求解 Level Set 方程, 需要在整个空间或至少界面附近的一个带状区域中给出演化速度, 这就需要进行数据外推.

数据外推技术基于一种 Hamilton 方程^[9]. 假设给定隐式曲面 S , 根据外推方程, 数据将沿着 S 的法向(S 外部)或者反法向(S 内部)进行延拓, 从而形成一个带状区域. 为便于理解, 我们举一个从隐式曲线进行数据外推的例子, 如图 1 所示, (a) 中显示了一条平面隐式曲线; (b) 中给出了定义于其上的一个函数数据, 这个函数在曲线的左半部分取高灰度值, 在右半部分取低灰度值; (c) 是数据外推的结果. 可以看到, 定义于曲线上的数据被外推到一个带状区域. 外推技术使得函数数据沿着隐函数的等值集之法向保持不变. 如(c)所示, 在这个带状区域中, 各种图像处理方程或者 Level Set 方程可以进行数值求解. 在 Level Set 方法中, 定义于曲线上的的是向量值函数, 用来表示速度, 此时将数据外推技术按分量逐个执行.

迄今为止虽然有不少关于数据外推的工作^[6, 9, 12], 但是外推后带状区域的定位问题却研究得很少. Osher 等^[9]根据数据外推方程的物理特点为其设计了基于迎风格式的离散方案. 该方案提供了各种数据外推方法的基本思路. 文献^[9]直接采用

这种离散格式, 极为容易在程序上实现, 但是效率不是很高. 文献^[12]提出了基于窄带的 Level Set 方法. 在窄带 Level Set 方法中, 数据外推只需要执行一个小的时间段, 从而提高了计算效率. 但是在这两种方法中, 在每一个时间步里都需要访问和处理所有网格点. 另外, 文献^[12]虽然指出了带状区域的一种定位方案并将其应用于一种特殊的隐函数符号距离函数, 但是并没有给出这种方案的具体理论依据和细节, 因而对于一般的隐函数不再适用. 针对这个困难, 文献^[6]给出一个关于数据外推的定理, 该定理对所有类型的隐函数均适用. 根据这个定理, 用户可以很容易地定位数据外推后的有效带状区域. 在本文中, 我们将指出文献^[6]中的数据外推定理的定位结果比较粗糙, 且存在无效定位的情况, 然后提出一个对此进行迭代改进的方案. 我们将在理论上证明这种迭代的收敛性以及说明新方案不存在无效定位的情形, 然后用实际例子说明迭代算法的有效性.

1 数据外推

假设我们有一张隐式曲面 S , 它是函数 $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ 的零等值集. 在 S 内部, $\varphi < 0$; 在 S 外部, $\varphi > 0$. 在很多问题中, 要求在 S 上有 $|\nabla \varphi| > 0$. 如果在 S 上某些地方 $|\nabla \varphi| = 0$, 可以利用符号距离函数的方法重新表示该曲面, 使得在 S 上有 $|\nabla \varphi| > 0$, 细节请参考文献^[9]. 因此我们总是假定在 S 上有 $|\nabla \varphi| > 0$. 假设数据(函数) u 定义于 S 上. 我们的数据外推方程为

$$u_t + \text{sign}(\varphi)(\nabla \varphi \cdot \nabla u) = 0. \quad (1)$$

其中 $\text{sign}(\varphi)$ 是 φ 的符号函数.

根据这个方程, 定义于 S 上的数据 u 将沿着 φ 的各等值集的法向(S 外部)或反法向(S 内部)进行外推. 在曲面外部, 数据将不断向高 φ 值的地方前

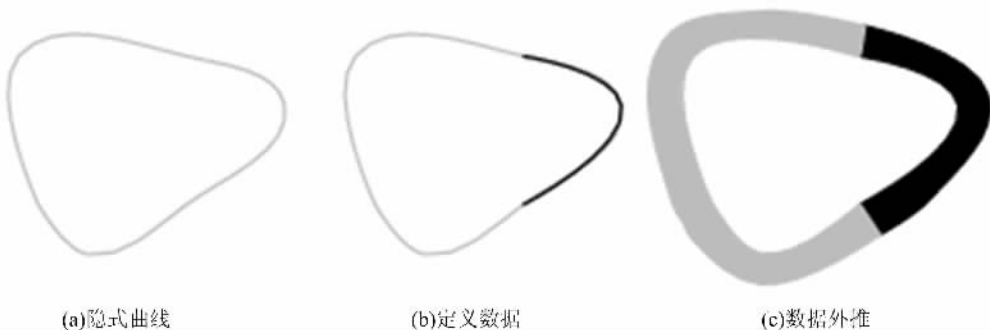


图 1 从隐式曲线进行数据外推

Fig. 1 Extrapolating data from an implicit curve

进;在曲面内部,数据不断向低 φ 值的地方前进. 内外形成一个带状区域. 外推时间越长,带状区域的宽度越大. 当然,在法向相交的地方有可能会出现激波. 本文中假定隐函数 φ 的性质较好,至少在其零等值集附近不会有相交的法向(S 上有 $|\nabla\varphi|>0$ 的假定保证了这一点). 这足以满足我们的要求,因为我们只需要将数据外推到一个窄带区域. 实际应用中我们假定在有界的空间区域 D 中求解数据外推方程;并且外推时间不会太长(只是将数据外推到一个窄带区域),通常取

$$K \min \left(\frac{\max_{(x,y,z) \in D, \varphi(x,y,z) \geq 0} \varphi}{\max_{(x,y,z) \in D, \varphi(x,y,z) \geq 0} |\nabla\varphi|^2}, \frac{\max_{(x,y,z) \in D, \varphi(x,y,z) \leq 0} -\varphi}{\max_{(x,y,z) \in D, \varphi(x,y,z) \leq 0} |\nabla\varphi|^2} \right), \quad (1)$$

其中, $K \in (0, 1]$ 为用户指定. 下面这个定理给出了带状区域的宽度与外推时间(即求解外推方程到某一时刻)的关系.

定理 1.1 在空间区域 D 中求解方程(1), 图像数据 u 将沿着 φ 的各等值集的法向(S 外部)或反法向(S 内部)进行外推. 在时刻 t , 数据将外推到

$$\begin{aligned} X &= \{(x(t), y(t), z(t)) \in D: \varphi(x(t), y(t), z(t)) = \\ &\quad \varphi_+(x(t), y(t), z(t))\} \text{ (S 外部) 及} \\ Y &= \{(x(t), y(t), z(t)) \in D: \varphi(x(t), y(t), z(t)) = \\ &\quad \varphi_-(x(t), y(t), z(t))\} \text{ (S 内部),} \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \varphi_+(x(t), y(t), z(t)) &= \int_0^t |\nabla\varphi(x(\tau), y(\tau), z(\tau))|^2 d\tau, \\ \varphi_-(x(t), y(t), z(t)) &= -\int_0^t |\nabla\varphi(x(\tau), y(\tau), z(\tau))|^2 d\tau. \end{aligned} \quad (2)$$

特别地, 我们有估计:

(I) u 将至少外推到等值集 $\tilde{X} = \{(x, y, z) \in D: \varphi(x, y, z) = \tilde{\varphi}_+\}$ (S 外部) 及 $\tilde{Y} = \{(x, y, z) \in D: \varphi(x, y, z) = \tilde{\varphi}_-\}$ (S 内部), 其中

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_+ &= \min_{(x,y,z) \in D, \varphi(x,y,z) \geq 0} |\nabla\varphi|^2 t, \\ \tilde{\varphi}_- &= -\min_{(x,y,z) \in D, \varphi(x,y,z) \leq 0} |\nabla\varphi|^2 t. \end{aligned} \quad (3)$$

(II) u 将至多外推到等值集 $\hat{X} = \{(x, y, z) \in D: \varphi(x, y, z) = \hat{\varphi}_+\}$ (S 外部) 及 $\hat{Y} = \{(x, y, z) \in D: \varphi(x, y, z) = \hat{\varphi}_-\}$ (S 内部), 其中

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_+ &= \max_{(x,y,z) \in D, \varphi(x,y,z) \geq 0} |\nabla\varphi|^2 t, \\ \hat{\varphi}_- &= -\max_{(x,y,z) \in D, \varphi(x,y,z) \leq 0} |\nabla\varphi|^2 t. \end{aligned} \quad (4)$$

证明 这个定理是文献[6]中定理在有界空间区域及短暂时间上的限制. 我们只需证明曲面外部的情况, 内部是类似的. 根据 Hamilton 方程的性质, 在方程(1)的进化下, 数据 u 将沿着 φ 的各等值集的法向(曲面外部)或者反法向(曲面内部)不断外推.

具体地, 数据 u 在 $p_0 \in S$ 的信息将沿着一条所谓的从 p_0 出发的法向曲线 C_n 不断前进. 这里的“法向曲线”是一条这样的曲线: 其起始点位于曲面 $S(\varphi$ 的零等值集)上; 在曲线上的任意一点 p 处, 曲线的切向量即是 φ 的经过该点的等值集的法向量. 在时刻 t , 位于 $p_0 \in S$ 处的数据信息将到达从该点出发的法向曲线上的点 p_t . 因而我们可以假设此时图像数据 u 被外推到集合 $X = \{(x(t), y(t), z(t)) \in D: \varphi(x(t), y(t), z(t)) = \varphi_+(x(t), y(t), z(t))\}$. 不失一般性, 此时图像数据中位于 $p_0 = (x_s, y_s, z_s) \in S$ 的信息将到达点 $p_t = (x(t), y(t), z(t)) \in X$, 并且具有如下的外推速度

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \varphi_x(x(t), y(t), z(t)), \\ \frac{dy}{dt} &= \varphi_y(x(t), y(t), z(t)), \\ \frac{dz}{dt} &= \varphi_z(x(t), y(t), z(t)), \end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t \varphi_x(x(\tau), y(\tau), z(\tau)) d\tau + x_s, \\ y(t) &= \int_0^t \varphi_y(x(\tau), y(\tau), z(\tau)) d\tau + y_s, \\ z(t) &= \int_0^t \varphi_z(x(\tau), y(\tau), z(\tau)) d\tau + z_s. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \varphi_+(x(t), y(t), z(t)) &= \\ \varphi(x_s + \int_0^t \varphi_x(x(\tau), y(\tau), z(\tau)) d\tau, \\ y_s + \int_0^t \varphi_y(x(\tau), y(\tau), z(\tau)) d\tau, \\ z_s + \int_0^t \varphi_z(x(\tau), y(\tau), z(\tau)) d\tau). \end{aligned}$$

显然上式中的函数是一个关于 t 的单变量函数, 其变化构成一条法向曲线. 对两边微分, 可得到

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_+}{dt} &= \varphi_x \varphi_x + \varphi_y \varphi_y + \varphi_z \varphi_z = \\ &\quad |\nabla\varphi(x(t), y(t), z(t))|^2. \end{aligned}$$

积分上式, 同时考虑到我们是从 $S(\varphi=0)$ 出发进行数据外推, 有式(2)得证. 至此, 两个估计也就是显然

的了,从而定理得证.

我们看到,定理给出外推后数据所到达的位置与外推时间 t 之间的关系,这里采用的是隐式(即通过空间处的函数值 φ)的定位方法.定理中的式(2)是一个精确的结论,但是并不适合于具体应用.因为在 φ 的各个等值集的不同地方,未必相同的法向量模长导致数据沿不同方向的外推速度未必相同,故很难对表面上的数据所到达的位置完全精确的定位.因此定理中的两个估计显得非常重要.估计(I)断言在时刻 t 所有数据均已外推到 $\tilde{X}$ 与 $\tilde{Y}$,用户可以在由 $\tilde{X}$ 与 $\tilde{Y}$ 围成的带状区域中求解各种处理方程或 Level Set 方程;估计(II)断言在时刻 t 数据顶多到达 $\hat{X}$ 与 $\hat{Y}$,在 $\hat{X}$ 以外的地方以及 $\hat{Y}$ 以内的地方不可能有来自表面上的数据.

我们指出定理中的两个估计是粗糙的.根据定理,随着外推时间的增长,数据不断外推,到达的地方越来越远离曲面,但是在某个给定时刻,数据只可能到达某些等值面所围成的区域之内部.而定理 1.1 中的估计方案则是在全局进行的(曲面外部的所有地方或者曲面内部的所有地方).这显然是没必要的,同时也是粗糙的估计.另外,如果

$$\min_{(x,y,z) \in D, \varphi(x,y,z) \leq 0} |\nabla \varphi|^2 = 0,$$

$$\text{或者} \quad \min_{(x,y,z) \in D, \varphi(x,y,z) \geq 0} |\nabla \varphi|^2 = 0,$$

定位则是无效的.在下一节我们将给出这个定理的迭代改进方案,从而解决这些问题.关于外推方程的数值方法请参考文献[9],不再赘述.

2 数据外推定理的迭代改进

这一节我们给出本文的核心定理.基于前面的考察,我们发现定理 1.1 的估计是粗糙的,同时想要通过(2)式得到数据外推的精确定位结果也是不可行的.我们的策略就是对那些粗糙的估计进行改进.通过迭代估计,我们证明最后将得到一个收敛的较为精确的定位估计.

定理 2.1 在空间区域 D 中求解方程(1),图像数据 u 将沿着 φ 的各等值集的法向(S 外部)或反法向(S 内部)进行外推.在时刻 t ,数据将外推到 $X = \{(x(t), y(t), z(t)) \in D: \varphi(x(t), y(t), z(t)) = \varphi_+(x(t), y(t), z(t))\}$ (S 外部)及 $Y = \{(x(t), y(t), z(t)) \in D: \varphi(x(t), y(t), z(t)) = \varphi_-(x(t), y(t), z(t))\}$ (S 内部),其中

$$\varphi_+(x(t), y(t), z(t)) = \int_0^t |\nabla \varphi(x(\tau), y(\tau), z(\tau))|^2 d\tau,$$

$$\varphi_-(x(t), y(t), z(t)) = -\int_0^t |\nabla \varphi(x(\tau), y(\tau), z(\tau))|^2 d\tau.$$

进一步,存在 $G_+^*, g_+^*, G_-^*, g_-^*$, 满足

$$\left. \begin{aligned} G_+^* &= \max_{(x,y,z) \in D, 0 \leq \varphi(x,y,z) \leq G_+^* t} |\nabla \varphi|^2, \\ g_+^* &= \min_{(x,y,z) \in D, 0 \leq \varphi(x,y,z) \leq G_+^* t} |\nabla \varphi|^2, \\ G_-^* &= \max_{(x,y,z) \in D, -G_-^* t \leq \varphi(x,y,z) \leq 0} |\nabla \varphi|^2, \\ g_-^* &= \min_{(x,y,z) \in D, -G_-^* t \leq \varphi(x,y,z) \leq 0} |\nabla \varphi|^2, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

使得我们有估计:

(I) u 将至少外推到等值集 $\tilde{X}^* = \{(x, y, z) \in D: \varphi(x, y, z) = \tilde{\varphi}_+^*\}$ (S 外部)及 $\tilde{Y}^* = \{(x, y, z) \in D: \varphi(x, y, z) = \tilde{\varphi}_-^*\}$ (S 内部),其中

$$\tilde{\varphi}_+^* = g_+^* t, \quad \tilde{\varphi}_-^* = -g_-^* t. \quad (6)$$

(II) u 将至多外推到等值集 $\hat{X}^* = \{(x, y, z) \in D: \varphi(x, y, z) = \hat{\varphi}_+^*\}$ (S 外部)及 $\hat{Y}^* = \{(x, y, z) \in D: \varphi(x, y, z) = \hat{\varphi}_-^*\}$ (S 内部),其中

$$\hat{\varphi}_+^* = G_+^* t, \quad \hat{\varphi}_-^* = -G_-^* t. \quad (7)$$

证明 定理的前半部分不需再证,我们主要证明这里的估计.首先,由定理 1.1 我们有估计:在 t 时刻,数据将至多外推到等值集 $\hat{X}^0 = \{(x, y, z) \in D: \varphi(x, y, z) = \hat{\varphi}_+^0\}$ (S 外部)及 $\hat{Y}^0 = \{(x, y, z) \in D: \varphi(x, y, z) = \hat{\varphi}_-^0\}$ (S 内部),其中

$$\hat{\varphi}_+^0 = \max_{(x,y,z) \in D, \varphi(x,y,z) \geq 0} |\nabla \varphi|^2 t := G_+^0 t$$

$$\hat{\varphi}_-^0 = -\max_{(x,y,z) \in D, \varphi(x,y,z) \leq 0} |\nabla \varphi|^2 t := -G_-^0 t$$

这里我们引入了几个记号 G_+^0, G_-^0 . 根据外推方程的性质,我们将方程限制在由等值集 $\hat{X}^0$ 与 $\hat{Y}^0$ 所围成的带状区域 $D^0 = \{(x, y, z): -G_-^0 t \leq \varphi(x, y, z) \leq G_+^0 t\}$ 中求解与在全空间中求解所得的数据外推结果应该是一致的.因此,还是根据定理 1.1 我们有更进一步的估计:数据将至多外推到等值集 $\hat{X}^1 = \{(x, y, z) \in D: \varphi(x, y, z) = \hat{\varphi}_+^1\}$ (S 外部)及 $\hat{Y}^1 = \{(x, y, z) \in D: \varphi(x, y, z) = \hat{\varphi}_-^1\}$ (S 内部),其中

$$\hat{\varphi}_+^1 = \max_{(x,y,z) \in D^0, \varphi(x,y,z) \geq 0} |\nabla \varphi|^2 t = \max_{(x,y,z) \in D, 0 \leq \varphi(x,y,z) \leq G_+^0 t} |\nabla \varphi|^2 t := G_+^1 t,$$

$$\hat{\varphi}^{-1} = - \max_{(x,y,z) \in D^0, \varphi(x,y,z) \leq 0} |\nabla \varphi|^2 t = - \max_{(x,y,z) \in D, -G_-^0 t \leq \varphi(x,y,z) \leq 0} |\nabla \varphi|^2 t := -G_-^1 t.$$

同样,这里引入了记号 G_+^1, G_-^1 . 容易看出 $G_+^1 \leq G_+^0, G_-^1 \leq G_-^0$. 我们可以迭代地执行这个过程. 对 $k=1, 2, 3, \dots$, 有等值集序列 $\hat{X}^k = \{(x, y, z) \in D: \varphi(x, y, z) = \hat{\varphi}_+^k\}$ (S 外部) 及 $\hat{Y}^k = \{(x, y, z) \in D: \varphi(x, y, z) = \hat{\varphi}_-^k\}$ (S 内部) 及数列 G_+^k, G_-^k , 其中

$$\hat{\varphi}_+^k = \max_{(x,y,z) \in D, 0 \leq \varphi(x,y,z) \leq G_+^{k-1} t} |\nabla \varphi|^2 t := G_+^k t,$$

$$\hat{\varphi}_-^k = - \max_{(x,y,z) \in D, -G_-^{k-1} t \leq \varphi(x,y,z) \leq 0} |\nabla \varphi|^2 t := -G_-^k t.$$

显然,数列 $G_+^k, G_-^k, k=1, 2, 3, \dots$ 均为递减数列,同时它们又都有下界 0, 故而收敛. 设极限分别为 G_+^*, G_-^* , 则 G_+^*, G_-^* 即为式(5)中的定义. 根据极限 G_+^*, G_-^* 再给出 g_+^*, g_-^* 的定义如式(5). 从而定理得证.

根据定理 2.1 的证明,容易得到一个计算 G_+^*, G_-^* 的迭代算法,当 G_+^*, G_-^* 确定后,再根据定义给出 g_+^*, g_-^* . 这个过程是相当明确的,也容易编程实现. 迭代算法不仅可以给出更加精确的定位,而且对一种粗糙定位无效的特殊情形(参看图 4 球面的例子)更是必须的. 由于在 S 上有 $|\nabla \varphi| > 0$ 的假设及外推时间 t 不是很长的实际原因,迭代算法总能给出一个有效的带状区域,其边界曲面不包含曲面 S (参看下面球面的例子).

3 示例

根据我们的实验,上述迭代算法收敛得非常快,通常只需要少数几步迭代就得到 G_+^*, G_-^* 了. 另外,这个算法还有个非常大的好处就是迭代过程中一旦某个 m 及 n 使得 $G_+^m = G_+^{m-1}, G_-^n = G_-^{n-1}$, 那么不再继续,极限即是 G_+^m 与 G_-^n .

图 2 是瓶子上的黑环图像. 图中(a)给出了定义

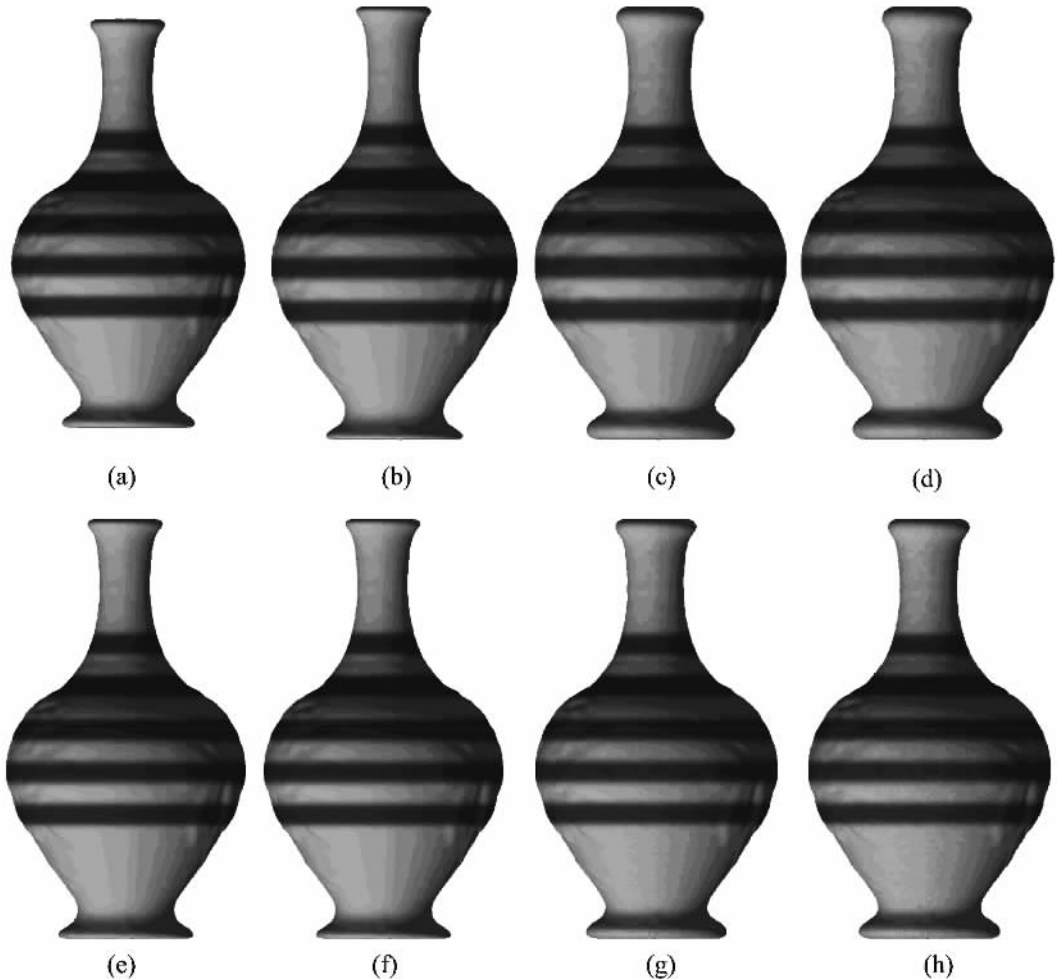


图 2 瓶子上的黑环图像

Fig. 2 Black circles on a bottle

于瓶子(零等值集)上的数据;(b),(c),(d)分别是外推 80 个时间步长后曲面内部迭代前后 ($\varphi = -0.004\ 281\ 32$), 曲面外部迭代前 ($\varphi = 0.012\ 233\ 7$)与迭代后($\varphi = 0.014\ 699\ 1$)等值集上的图像;(e),(f),(g),(h)分别为外推 40 个时间步长后曲面内部迭代前($\varphi = -0.002\ 1406\ 6$)与迭代后 ($\varphi = -0.002\ 319\ 87$), 曲面外部迭代前 ($\varphi = 0.006\ 116\ 87$)与迭代后($\varphi = 0.007\ 349\ 57$)等值集上的图像. 我们看到迭代后所定位出的等值面比迭代前的等值面更加远离零等值面.

图 3 是马身上的文字图像. 数据定义于图 3 (a);(b),(c),(d)分别为外推 80 个时间步长后曲面内部迭代前后($\varphi = -0.000\ 874\ 269$), 曲面外部迭代前 ($\varphi = 0.000\ 642\ 899$)与迭代后 ($\varphi = 0.002\ 024\ 61$)等值面上的图像;(e),(f),(g),(h)分别为外推 20 个时间步长后曲面内部迭代前($\varphi = -0.000\ 218\ 567$)与迭代后($\varphi = -0.000\ 237\ 634$),

曲面外部迭代前($\varphi = 0.000\ 160\ 725$)与迭代后($\varphi = 0.000\ 506\ 152$)等值面上的图像.

最后一个例子是球面上的 Lena 图像,如图 4 所示. 由于表达球面的隐函数 $\varphi = x^2 + y^2 + z^2 - r^2$ (r 是常数),显然有 $\min_{(x,y,z) \in D, \varphi(x,y,z) \leq 0} |\nabla \varphi|^2 = 0$, 因此如果直接利用定理 1.1 中的结论的话,数据根本就没有外推,这对接下来的数值求解带来困难. 对于这种情况,迭代是必须的. 迭代前后的等值面结果请参看图 4. 其中(a)为零等值面上的图像;(b),(c),(d)为外推 200 个时间步之后曲面内部迭代前 ($\varphi = -1.988\ 95 \times 10^{-5}$)与迭代后($\varphi = -0.058\ 686\ 7$), 曲面外部迭代前后($\varphi = 0.088\ 310\ 2$)各等值面上的图像;(e),(f),(g)为外推 300 个时间步后曲面内部迭代前 ($\varphi = -2.983\ 43 \times 10^{-5}$)与迭代后 ($\varphi = -0.065\ 098$), 曲面外部迭代前后($\varphi = 0.132\ 465$)各等值面上的图像.

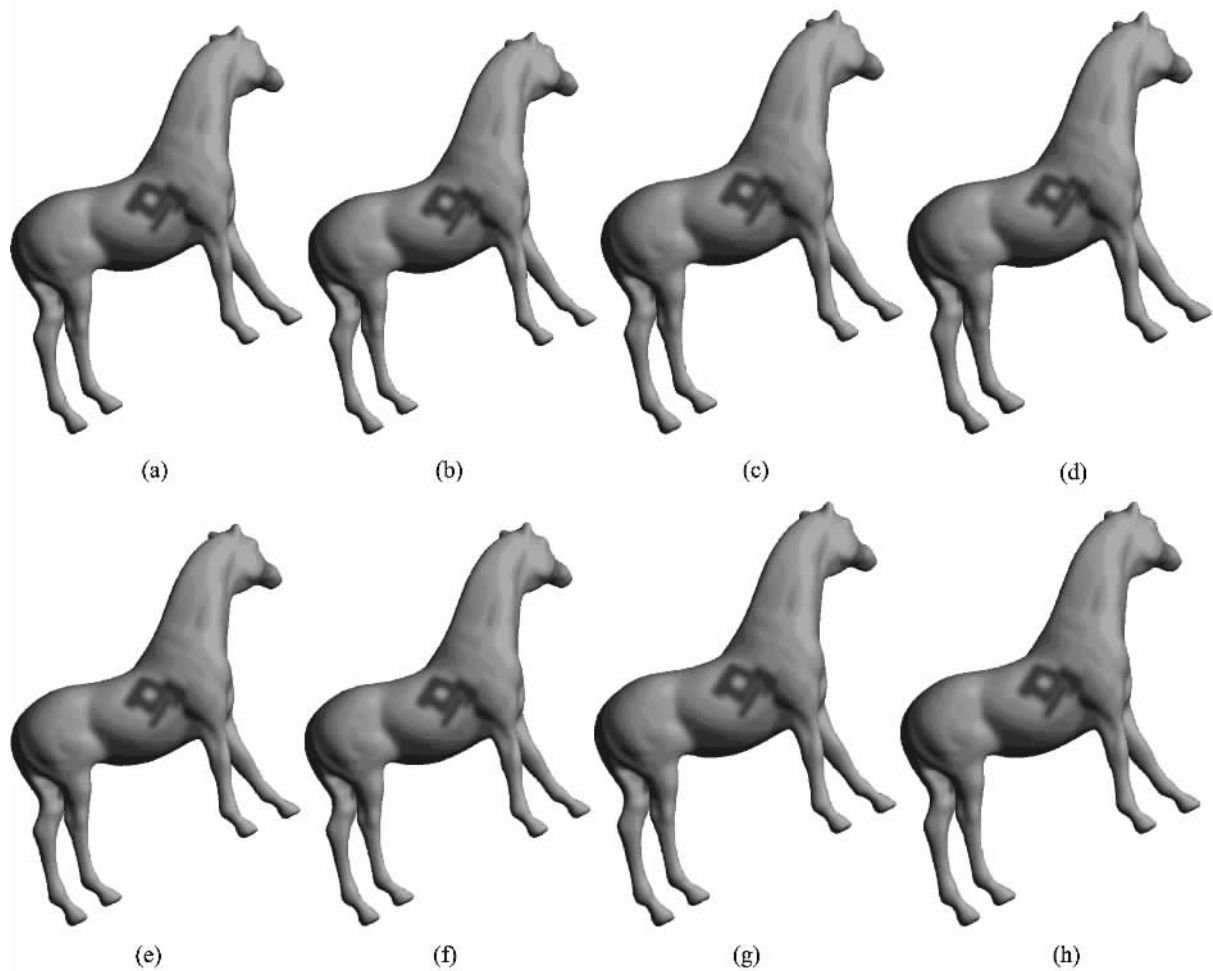


图 3 马身上的文字图像

Fig. 3 Text image on a horse

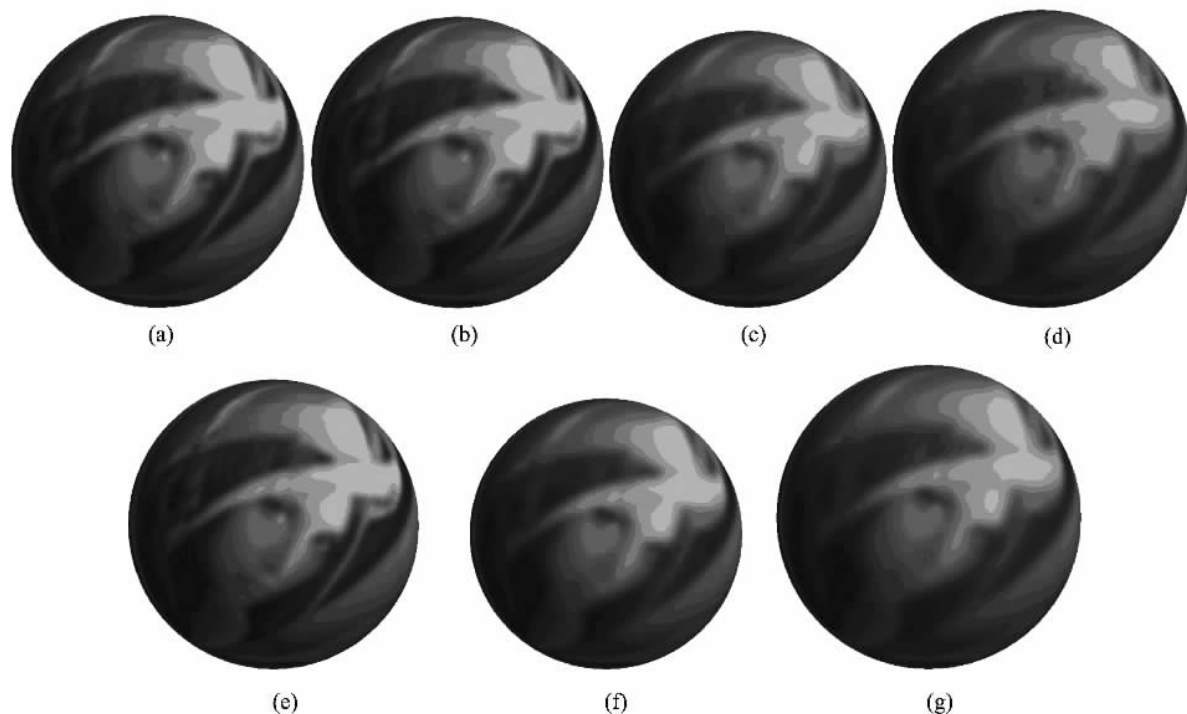


图 4 球面上的 Lena

Fig. 4 Lena on sphere

4 结论

针对以往给出的对数据外推后带状区域的粗糙定位问题,本文根据外推方程的物理特点给出数据外推定理的迭代改进.我们在理论上证明了这种迭代的收敛性.实际例子说明迭代算法的有效性与快速收敛性.对于那种粗糙定位方案无效的隐式曲面(如本文中的球面),迭代是必须的,同时在适当的假定下,迭代方案总能给出一个有效的带状区域.但是我们也注意到在给定外推时间下,迭代方案依然使用的是时间全局的定位参数.如果我们设计一个在时间上也分段局部的,空间上迭代的定位方案,则有望得到更加精确的定位结果.这将是我们的后续工作.

参考文献(References)

- [1] Perona P, Malik J. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion[J]. IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell., 1990, 12(7):629-639.
- [2] Rudin L, Osher S, Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms[J]. Physica D, 1992, 60:259-268.
- [3] Chan T F, Shen J, Vese L. Variational PDE models in image processing[J]. Notice of Amer. Math. Soc., 2003, 50(1):14-26.
- [4] Bertalmio M, Cheng L T, Osher S, et al. Variational problems and partial differential equations on implicit surfaces[J]. J Comput. Phys., 2001, 174(2):759-780.
- [5] Tang B, Sapiro G, Caselles V. Diffusion of general data on non-flat manifolds via harmonic maps theory: the direction diffusion case[J]. International Journal of Computer Vision, 2000, 36(2):149-161.
- [6] WU C L, DENG J S, ZHU W M, et al. Inpainting images on implicit surfaces[C]//Proceeding of Pacific Graphics 2005, Macau, 2005:142-144.
- [7] Chen S, Merriman B, Osher S, et al. A simple level set method for solving Stefan problems[J]. J Comput. Phys., 1997, 135:8-29.
- [8] Hou T, Li Z, Osher S, et al. A hybrid method for moving interface problems with applications to the Hele-Shaw flows[J]. J Comput. Phys. 1997, 134:236.
- [9] Osher S, Fedkiw R. Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces[M]. New York:Springer, 2002.
- [10] Chen S, Merriman B, Kang M, et al. A level set method for thin film epitaxial growth[J]. J Comp. Phys., 2001, 167:475-500.
- [11] Cheng L T, Burchard P, Merriman B, et al. Motion of curves constrained on surfaces using a level set approach[J]. J Comp. Phys., 2002, 175(2):604-644.
- [12] Peng D, Merriman B, Osher S, et al. A PDE based fast local level set method[J]. J Comp. Phys., 1999, 155(2):410-438.