近似可展曲面的构造及应用*

李亮　邓建松
(中国科学技术大学数学系, 合肥 230026)

CONSTRUCTION AND APPLICATION OF APPROXIMATE DEVELOPABLE SURFACES

Li Liang　Deng Jiansong
(Dept. of Math., University of Science and Technology of China, Hefei 230026)

Abstract Developable surfaces have wide applications in free form surface modeling. In the three dimensional space, there is not always a regular developable surface that interpolates a given boundary which is an arbitrary piecewise closed curve. In this paper, we discuss how to construct an approximate developable surfaces interpolating a closed curve. We construct a surface, in tensor-product polynomial surface space, which minimizes the Gaussian curvature of the surface in some sense, where the nonlinear optimization problem is solved by trust region algorithm and quasi Newton method in optimization theory. The result is applied, as an application, into texture mapping in computer graphics, and a method is proposed to decrease the distortion.

Key words tensor-product polynomial surfaces, developable surfaces, texture mapping, nonlinear optimization.
AMS(2000) subject classifications 65D18
中图法分类号 O242. TP391.72

1 引 言

* 本工作得到 "973" 项目 (2004CB318000), 国家杰出青年基金 (60225002), 国家自然科学基金 (10201030 与 60473132), 教育部高校青年教师奖励计划, 教育部留学回国人员科研启动基金的资助
收稿日期: 2004-11-28.

经典微分几何中 Gauss 曲率为零的曲面称为可展曲面，它是一种特殊的直纹面. 可展曲面有且只有三种，即锥面、柱面和切线面，它对于自由曲面造型具有重要的意义. 例如，如果物体外壳是可展曲面，那么它可以没有形变地展开到平面上，从而可以用平板材料无形变地设计出来. 这一性质对于造船业、航空业中的外形设计具有重要的意义.

关于可展曲面的微分几何性质，可以在任何一本微分几何教材中找到，例如 [3]. 可展曲面可以说是微分几何中比较简单的一类曲面，但是在计算机辅助几何设计 (CAGD) 和计算机图形学中至今还不存在简单有效的设计方法. 在 [1,2,5] 以及它们的参考文献中有大量的关于可展曲面构造与工业中应用的论述.

当给定一组首尾相邻的曲线做边界时，理论上无法保证存在正则的可展曲面插值于给定的边界. 而且从严格的角度来说，实际所用的曲面并不是真正可展的曲面，因此本文讨论的问题就是如何构造近似可展曲面插值于给定的边界曲线.

本文以下各节的主要内容为：第 2 节基于 Gauss 曲率在某种范数意义下极小定义了近似可展曲面；第 3 节应用优化理论中的信赖域方法和拟牛顿方法，在张量积多项式空间中求解插值给定边界的近似可展曲面；第 4 节给出了求解的算例；第 5 节讨论了在近似可展曲面上的纹理映射.

2　近似可展曲面

在本节我们给出基于曲面 Gauss 曲率的近似可展曲面的定义，对于给定的参数曲面 $\mathbf{S}(u,v)$，它的 Gauss 曲率定义为

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2},$$

其中

$$L=\langle \mathbf{S}_{uu},\mathbf{n}\rangle,\qquad M=\langle \mathbf{S}_{uv},\mathbf{n}\rangle,\qquad N=\langle \mathbf{S}_{vv},\mathbf{n}\rangle,\qquad \mathbf{n}=\frac{\mathbf{S}_u\wedge\mathbf{S}_v}{|\mathbf{S}_u\wedge\mathbf{S}_v|},$$

$$E=\langle \mathbf{S}_u,\mathbf{S}_u\rangle,\qquad F=\langle \mathbf{S}_v,\mathbf{S}_u\rangle,\qquad G=\langle \mathbf{S}_v,\mathbf{S}_v\rangle.$$

定义 2.1　三维空间中，给定一条空间分段光滑的闭曲线 $\Gamma:\varphi(u,v)$，Ω 是由 Γ 在参数平面上的投影 $\partial\Omega$ 所围成的区域，$(u,v)\in\Omega$，有曲面集合：

$$\Pi:=\{\mathbf{S}(x(u,v),y(u,v),z(u,v)):(u,v)\in\Omega\mid \mathbf{S}(\partial\Omega)=\Gamma\},$$

则 $\mathbf{S}^*\in\Pi$ 称为近似可展的，是指

$$\|K^*\|=\min_{\mathbf{S}\in\Pi}\|K\|,\tag{2.1}$$

其中 $\|K\|$ 是 K 的某种范数，K^* 是 $\mathbf{S}^*$ 的 Gauss 曲率，K 是 $\mathbf{S}$ 的 Gauss 曲率.

本文所讨论的问题是，已知一条三维空间中的分段光滑闭曲线 $\Gamma:\varphi(u,v)$，寻找以这条空间曲线为边界的近似可展曲面并要求曲面具有一定光滑性（至少一阶）. 从上述的定

义中可以看到, 求解 Gauss 曲率按某种范数最小的优化问题是非常关键的一步. 为便于处理, 我们对问题进行适当简化, 假设空间分段光滑闭曲线 Γ 是由 $\{\Gamma_i\}_{i=1}^4$ 四条曲线首尾相连而成. 在此,Gauss 曲率 K 的范数也有多种取法, 比如 $L^p(\Omega)$ 范数

$$\|K\|_{L^p} = \left(\iint_\Omega \left(\frac{LN - M^2}{EG - F^2} \right)^p \mathrm{d}u\mathrm{d}v \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.2}$$

本文主要采用了 $L^2(\Omega)$ 范数, 因此所考虑的问题为如下泛函极小值问题:

$$\min_{\mathbf{S}\in\Pi} \|K\|_{L^2} = \left(\iint_\Omega \left(\frac{LN - M^2}{EG - F^2} \right)^2 \mathrm{d}u\mathrm{d}v \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.3}$$

其中

$$\Pi := \{\mathbf{S}(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) : (u,v) \in \Omega \mid \mathbf{S}(\partial\Omega) = \Gamma\}.$$

这个泛函的极值点称为近似可展曲面. 采用变分方法首先导出其 Euler-Lagrange 方程, 然后解偏微分方程是一种很自然的选择 [6,7]. 但是导出的 Euler-Lagrange 方程是非线性的, 而且含有四阶偏导数, 表示相当复杂, 求解十分困难, 因此采用变分方法处理该问题是一个有待深入探讨的问题. 本文采用待定曲面表示形式, 应用优化方法直接求解曲面的表示.

3 模型的构造及算法

对于近似可展曲面的求解, 我们考虑在张量积多项式空间 [4] 进行, 并由前面的定义将该问题转化为求解非线性优化问题. 本节讨论优化目标函数的形成、初值选择及信赖域、拟牛顿两种优化算法, 最后给出模型的求解过程.

3.1 $m \times n$ 次张量积曲面构造近似可展曲面

由于要求曲面有一定光滑性且处理又不能太过复杂, 所以将所求曲面放在张量积多项式曲面空间中考虑是个很好的选择. 张量积多项式曲面自然具有一定的光滑性, 而且目前已有成熟的处理方法. $m \times n$ 次张量积曲面通常采用它的 Bézier 表示.

为方便起见, 假设 Γ 是由空间四条 Bézier 曲线构成, 即: $\Gamma_1 : \mathbf{c}_0(u)$, $\Gamma_2 : \mathbf{d}_0(v)$, $\Gamma_3 : \mathbf{c}_1(u)$, $\Gamma_4 : \mathbf{d}_1(v)$, $(0 \le u, v \le 1)$, 且参数区域 $\Omega = [0,1] \times [0,1]$, 则极小值优化问题 (2.1) 的近似解可表示为

$$\mathbf{S}(u,v) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \mathbf{P}_{ij} B_i^m(u) B_j^n(v), \tag{3.1}$$

其中 $\mathbf{P}_{i0}$, $\mathbf{P}_{in}$, $\mathbf{P}_{0j}$, $\mathbf{P}_{mj}$ 是控制顶点 (三维空间向量) 且由边界曲线 Γ 决定, 其它 $(m-1)(n-1)$ 个控制顶点 $\mathbf{P}_{ij} = (\mathbf{P}_{ij}^x, \mathbf{P}_{ij}^y, \mathbf{P}_{ij}^z)$, $(1 \le i \le m-1, 1 \le j \le n-1)$ 是待定的. 而确定未知顶点 $\mathbf{P}_{ij}$ 是一个非线性优化问题.

3.1.1 目标函数形成及初值的选择

首先讨论如何形成优化问题中非线性的目标函数，本文采用目标函数为 (2.2) 式中 $p=2$ 的情形，其它情形可类似处理. 由于曲面 $\mathbf{S}(u,v)$ 是未知的，且 Gauss 曲率表达式又非常复杂，因此目标函数 $\|K\|_{L^2}$ 中的积分很难用显式表达. 故对 (2.2) 中的积分，可用数值积分代替，即

$$\|K\|_{L^2}=\left(\iint_{\Omega}\left(\frac{LN-M^2}{EG-F^2}\right)^2\mathrm{d}u\mathrm{d}v\right)^{\frac{1}{2}}\approx\sqrt{\frac{1}{pq}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\left(\frac{LN-M^2}{EG-F^2}\right)^2(i/p,j/q)}. \tag{3.2}$$

对于非线性优化问题，通常采用迭代方法进行求解. 一般迭代格式为：$X_{i+1}=X_i+\lambda_i d_i$，其中 λ_i 是步长，d_i 是下降方向. 尽管迭代格式的构造非常重要，但初值 X_0 的选择也是关键的步骤，它直接影响优化算法的速度和结果. 有些算法 (比如 Newton 法) 对初值的依赖是很强的，所以应该用合理方法得到初值. 在 CAGD 中，插值边界的 Coons 曲面构造简单且有一定光滑性. 特别地，可以证明如果有两个对边是直线，那么得到的 Coons 曲面就是直纹面；或者如果曲线次数不高 (不超过三次)，而且存在一个直纹面 (其直纹方向不一定平行于某个参数方向) 插值于这组边界曲线，那么 Coons 曲面就是直纹面. 因此用 Coons 曲面作为初值是个很好的选择. Coons 曲面的表达式 (见 [4]) 为

$$\mathbf{P}(u,v)=\mathbf{P}_1(u,v)+\mathbf{P}_2(u,v)-\mathbf{P}_3(u,v), \tag{3.3}$$

其中

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_1(u,v) &= (1-v)\mathbf{c}_0(u)+v\mathbf{c}_1(u),\\ \mathbf{P}_2(u,v) &= (1-u)\mathbf{d}_0(v)+u\mathbf{d}_1(v),\\ \mathbf{P}_3(u,v) &= (1-u)[(1-v)\mathbf{c}_0(0)+v\mathbf{c}_1(0)]+u[(1-v)\mathbf{d}_1(0)+v\mathbf{d}_1(1)],\end{aligned}$$

$\mathbf{c}_0(u),\mathbf{c}_1(u),\mathbf{d}_0(v),\mathbf{d}_1(v)$ 为边界曲线且首尾相接，即

$$\mathbf{c}_0(0)=\mathbf{d}_0(0),\mathbf{c}_0(1)=\mathbf{d}_1(0),\mathbf{c}_1(0)=\mathbf{d}_0(1),\mathbf{c}_1(1)=\mathbf{d}_1(1).$$

3.1.2 优化算法

关于求解优化问题的算法，本文主要考虑了信赖域法和伪 Newton 法两种算法，这些方法在优化理论 [10] 中比较成熟而且非常有效，但针对本文的具体问题还需要对这些通用算作适当修改，以更加适合求解本文的优化问题.

算法 1 信赖域算法

首先对信赖域方法作一下简介，目标函数同上节取法 (3.2)，这里重写如下：

$$F(X)=\left(\iint_{\Omega}\left(\frac{LN-M^2}{EG-F^2}\right)^2\mathrm{d}u\mathrm{d}v\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.4}$$

其中 X 是待定控制顶点各未知分量所排成的一维向量. 信赖域方法基本思想是, 在迭代点 X_k 附近用一个二次函数逼近原优化问题, 一般称为逼近子问题, 并构造试探步 d_k, 且要求试探步 d_k 在信赖域之内, 即每次迭代时有一正数 e_k 使得 $\|d_k\| \le e_k$, 其中 $\|\cdot\|$ 是某一范数. 对于逼近子问题而言, $X_k + d_k$ 是其在 $\{X_k + d, \|d\| \le e_k\}$ 中的最优解. 当 d_k 满足某种下降条件时令 $X_{k+1} = X_k + d_k$, 否则 $X_{k+1} = X_k$, 然后再以某种方式给出下一步的信赖域半径 e_{k+1}.

对于本节目标函数 (3.4) 而言, 在已知迭代点 X_k 附近用如下二次函数来逼近

$$Q_k(d) = F(X_k) + g_k^{\top} d + d^{\top} G_k d, \tag{3.5}$$

其中 $g_k = \nabla F(X_k)$,$G_k = \nabla(\nabla F(X_k))$. 由于未知变量很多且目标函数复杂, 导出目标函数梯度 $\nabla F(X_k)$ 表达式很复杂, 再导出 Hessen 阵已经大大降低了计算的速度, 而且还不能保证半正定性, 因此这里采用如下的拟牛顿法中 BFGS 校正来近似 Hessen 阵:

$$G_{k+1} = G_k + \frac{y_k y_k^{\top}}{y_k^{\top} y_k} - \frac{G_k s_k s_k^{\top} G_k}{s_k^{\top} G_k s_k}, \tag{3.6}$$

$$H_{k+1} = \left(I - \frac{s_k y_k^{\top}}{s_k^{\top} y_k}\right) H_k \left(I - \frac{y_k s_k^{\top}}{s_k^{\top} y_k}\right) + \frac{s_k s_k^{\top}}{s_k^{\top} y_k}, \tag{3.7}$$

其中, $y_k = g_{k+1} - g_k$, $s_k = d_k$, G_{k+1} 是 Hessen 阵近似, H_{k+1} 是 Hessen 阵的逆近似, BFGS 校正在一定条件下保证正定性且仅依赖一阶信息, 计算简单.

实际上每一步迭代最关键的是求解信赖域子问题:

$$\min_{d^{\top} d \le e_k} Q_k(d) = F(X_k) + g_k^{\top} d + d^{\top} G_k d. \tag{3.8}$$

在此假定在 $d^{\top} d \le e_k$ 中上式是对原问题很好的逼近. 由约束最优化的 Kuhn-Tucker 条件知, 该子问题的解可由线性方程组 $(G_k + \mu_k)d = -g_k$ 来表征, μ_k 的选取等效于选择信赖域半径 e_k, 第 k 步实际下降量 $F(X_k) - F(X_k + d_k)$ 与预计下降量 $F(X_k) - Q(X_k + d_k)$ 的比值 ρ_k 很好地衡量了二次模型近似目标函数的程度, 通过自适应地改变参数 μ_k 保持二次模型与目标函数尽可能一致的同时加速收敛. 综合上述可以给出算法如下:

Algorithm 1

(1) 初始化: 给定 X_0, μ_0, $0 < \beta_1 < \beta_2 < 1$, $\mu > 0$, $\varepsilon > 0$, $G_0 = I$, $k := 0$.

(2) 已知 X_k, μ_k, 计算 $g_k = \nabla F(X_k)$ 并利用式 (3.3) 计算 G_k, 若 $\|g_k\| < \varepsilon$ 停止.

(3) 利用对称 QR 分解求出线性方程组 $(G_k + \mu_k)d = -g_k$ 得到 d_k.

(4) 计算

$$\rho_k = \frac{F(X_k) - F(X_k + d_k)}{F(X_k) - Q(X_k + d_k)}.$$

(5) 修正 μ: 若 $\mu_k < \beta_1$, 则 $\mu_{k+1} = 4\mu_k$; 若 $\mu_k > \beta_2$, 则 $\mu_{k+1} = \max(\mu, \frac{1}{2}\mu_k)$; 否则 $\mu_{k+1} = \mu_k$.

(6) 若 $\rho_k \leq 0$, 则 $X_{k+1} = X_k$; 否则 $X_{k+1} = X_k + d_k$.

(7) 令 $k := k + 1$, 转 (2).

由收敛性分析, 上述算法是具有整体收敛性的, 详见文献 [10].

算法 2　拟牛顿法

牛顿法是一种常用而且有效的优化算法, 它利用到了由 Hessen 阵提供的二阶信息, 但计算 Hessen 阵的工作量往往很大, 并且有些目标函数 Hessen 阵很难估计甚至不好求出, 这直接导致了拟牛顿法的出现, 仅利用目标函数值和梯度的信息构造出 Hessen 阵的近似. 因此拟牛顿法关键所在就是如何构造近似的 Hessen 阵, 这里对各种构造方法就不再进行推导, 详情见文献 [10].

在此讨论的目标函数及对原问题逼近的二次函数同算法一, 对 Hessen 阵近似的构造有很多方法, 比较成功是 BFGS 校正 (3.6) 与 (3.7). 另外下降方向仍采用牛顿方向 $d_k = -H_k g_k$, 对于步长则采用了如下方法

$$\alpha_k = \frac{g_k^{\top} H_k g_k}{g_k^{\top} H_k G_k H_k g_k}, \tag{3.9}$$

其中 $g_k = \nabla F(X_k)$, G_k, H_k 分别是 Hessen 阵及其逆的近似. 很多文献都采用一维线搜索法得到 α_k, 但该法计算量大而复杂, 速度也很慢, 实际效果并不好, 在此不再赘述.

按照一般优化算法的步骤, 到此已经准备妥当, 但是步长的选择仍存在问题. 当 X_k 足够接近收敛点时, 目标函数值会出现震荡现象, 不再下降, 其主要原因是尽管朝下降方向迭代, 但步长过大, 反而使得函数值增加. 对此可采用逐渐减小步长的方法解决, 当目标函数值震荡时, 则下降方向不变, 将步长减小一小于 1 的倍数, 比如令 $d_{k+1} = d_k, \alpha_{k+1} = 0.5\alpha_k, X_{k+1} = X_k$. 综合上述可以给出算法如下:

Algorithm 2

(1) 初始化: 给定 X_0, $0 < \beta < 1$, $\varepsilon > 0$, $G_0 = I$, $H_0 = I$, $k := 0$.

(2) 已知 X_k, 计算 $g_k = \nabla F(X_k)$ 并利用式 (3.3)(3.4) 计算 G_k 和 H_k, 若 $\|g_k\| < \varepsilon$ 停止.

(3) 计算 $d_k = -H_k g_k$ 以及利用 (式 3.6) 计算 α_k.

(4) 令 $X = X_k + \alpha_k d_k$, 计算 $F(X)$ 和 $F(X_k)$, 若 $F(X) \geq F(X_k)$, 又若 $\nabla F(X) < \varepsilon$, 停止; 否则 $\alpha_{k+1} = \beta\alpha_k, d_{k+1} = d_k, X_{k+1} = X_k, k := k + 1$, 转 (4); 若 $F(X) < F(X_k)$, 则 $X_{k+1} = X_k + \alpha_k d_k$.

(5) 令 $k := k + 1$, 转 (2).

上面提供了两种优化算法. 这两种算法各有自己的优势, 具体应用时根据需要进行选用. 其中信赖域方法得到的结果一般比拟牛顿方法得到的结果精度高, 但是实现的复杂性高速度比较慢.

3.2 模型求解算法

综合上面关于优化问题求解的讨论, 给出求解近似可展曲面的问题的一般步骤如下:

(1) 确定边界, 即 $\mathbf{P}_{i0},\mathbf{P}_{i2},\mathbf{P}_{0j},\mathbf{P}_{2j}$, 以及待定的控制点 $\mathbf{P}_{ij},(1\le i\le m-1,1\le j\le n-1)$.

(2) 确定目标函数 $F(X)=\|K\|$, 其中 X 为所有待定控制点各分量排列而成.

(3) 给出初值 X_0, 可用 Coons 曲面得到.

(4) 解优化问题 $\min F(X)$ 以得到 $\mathbf{P}_{ij},(1\le i\le m-1,1\le j\le n-1)$.

4 实 例

前面已经讨论了构造近似可展曲面的基本过程, 本节我们将给出几个具体例子. 在此本文不打算用太高次数的多项式构造曲面, 高次数往往使得求解过程的计算量成倍增加, 到达难以接受的程度, 且很多时候也是不必要的, 更为重要的是高次多项式往往对光滑函数逼近效果很差. 因此实验中主要用双二次和双三次张量积多项式曲面来构造, 但在双二次张量积多项式空间中, 自由度太少造型能力较低是其不足之处, 于是此处给出双三次张量积多项式曲面构造例子. 以双三次张量积多项式构造曲面, 自由度加大, 复杂性又比较适中, 下面分别举出可展曲面和不可展曲面的例子.

对于双三次曲面, 去掉边界条件还需要求解四个控制顶点, 这相对于双二次曲面的一个自由控制顶点而言, 自由度大了很多, 但待定未知变量却是原来的四倍 (12 个), 复杂性也相应增加.

第一例我们取四条边界曲线是锥面上四条首尾相连曲线. 图 1 是信赖域法得到的结果, Gauss 曲率最大值为 10^{-8} 量级. 图 2 是拟牛顿法优化的结果, 这时 Gauss 曲率最大值也为 10^{-8} 量级, 这两个结果都是可以接受的, 同时也说明优化方法比较有效. 第二例中给出的四条边界曲线是一般的比较平滑的曲线, 这种情况下是否存在可展的曲面是未知的. 如图 3、图 4 分别是信赖域法和拟牛顿法优化结果, Gauss 曲率最大值分别为 $|K|=0.0134$ 和 0.0164, 从这里可以看出这种边界在双三次张量积多项式曲面空间中不太可能存在可展曲面, 但是我们得到了近似可展曲面.

此外注意到, 算法对初值的选择依赖性很强, 在实验中, 当初值人为地调至距离边界曲线过于远时, 优化结果就会得到一个近似的有奇异点的锥面 (局部解), 这当然也是一个解, 但却不是希望的结果. 而采用 Coons 曲面做为初值不致距离边界曲线过远. 由这两例子可知两种算法的效果是相当的, 但实际中拟牛顿法速度要快些.(注: 下面所有图示, 左图是所求曲面, 它的边界是给定的, 右图是该曲面的 Gauss 曲率在参数域上的分布, 深度代表曲率值大小.)

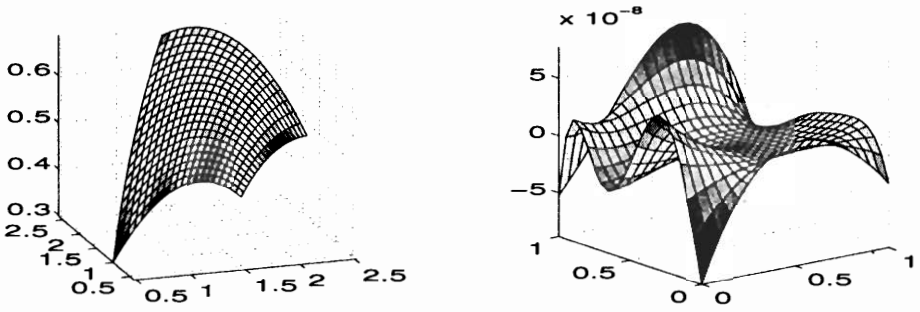

图 1: 左图：近似可展曲面，信赖域法 右图：Gauss 曲率分布，$\max|K| = 8.80 \times 10^{-8}$

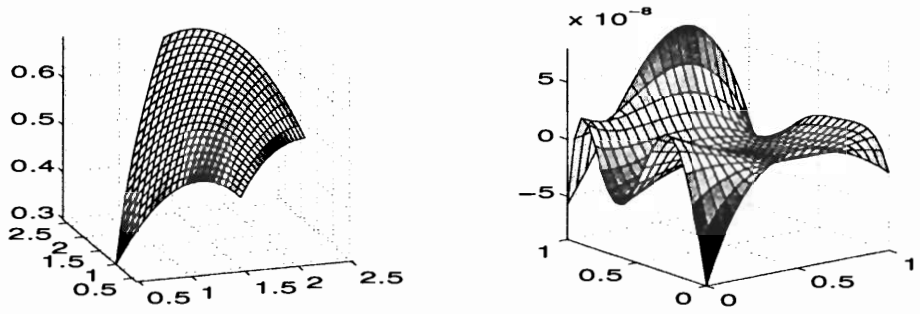

图 2: 左图：近似可展曲面，拟牛顿法 右图：Gauss 曲率分布，$\max|K| = 8.80 \times 10^{-8}$

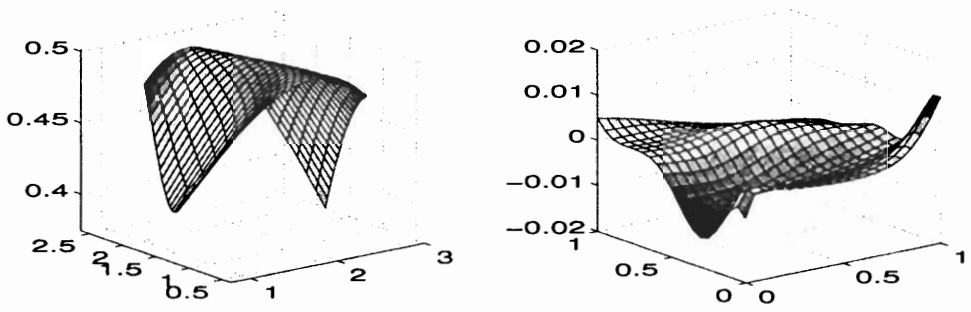

图 3: 左图：近似可展曲面，信赖域法 右图：Gauss 曲率分布，$\max|K| = 0.0134$

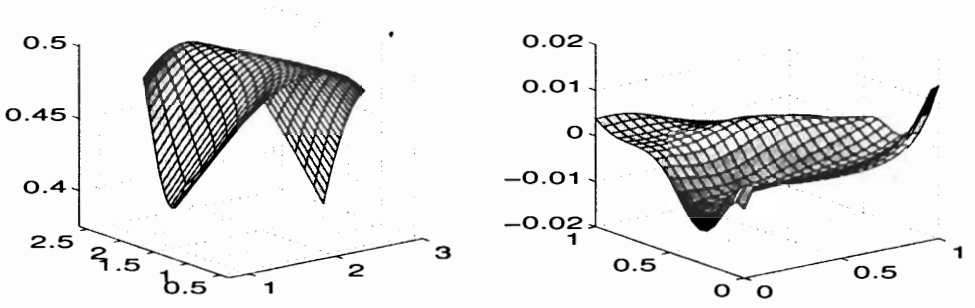

图 4: 左图: 近似可展曲面, 拟牛顿法 右图: Gauss 曲率分布, $\max|K| = 0.0164$

5 近似可展曲面的应用

本节讨论近似可展曲面的应用. 主要是给出了在近似可展曲面上如何进行纹理映射. 此外对曲面的展开算法作了简要说明. 对于展开算法的研究已经有大量文献, 比如 [8,9], 本文采用类似的能量定义但通过共轭梯度法解决. 另外举例说明了近似可展曲面在纹理映射中减少了形变程度.

在实际应用中, 将一张平面的图极小形变地贴在曲面上十分具有应用价值, 比如各种产品上粘贴图标. 这里的极小形变相当于平面到曲面的近似等距映射, 也就是说平面映射到曲面上的图发生了极小拉伸扭曲, 从而在视觉上图片在平面和曲面看起来几乎一样.

已经知道可以把平面图形没有形变地贴在可展曲面上. 本文前面给出了构造近似可展曲面的方法. 如果近似可展曲面的 Gauss 曲率最大值非常小, 可以期望把平面图形粘贴到近似可展曲面上, 形变是非常小的. 现在的关键是如何构造两者之前的映射. 一种比较直接的方法是应用参数平面到近似可展曲面的参数映射: $\mathbf{\Psi} : (u, v) \mapsto \mathbf{S}(u, v)$, 这种方法显然并没有充分利用近似可展曲面的性质, 导致了较大扭曲.

因此这里选择另一种方法. 首先把曲面极小形变地展平, 得到平面上的有界区域, 然后在展平的有界域内赋予纹理信息, 并将曲面上每一点与展平区域内的点一一对应起来, 从而将展平区域的纹理信息映射到曲面上, 完成纹理映射. 因此曲面的展平是很重要的步骤, 首先将曲面进行三角剖分, 由于近似可展曲面有四条光滑边界, 因此可以选取平面上矩形 (边长与边界曲线长度相当) 作为初始展平区域, 并将该矩形进行同样的三角剖分, 使其数量与曲面三角片相同, 并且一一对应, 即: $\mathbf{t}_i \mapsto \mathbf{T}_i, l_i \mapsto L_i$, 其中 $\mathbf{t}_i$ 是平面上三角片, $\mathbf{T}_i$ 是曲面上对应的三角片, 它们相对应的边为为 l_i 和 L_i. 通过调整平面三角网格点位置并使得 l_i 与 L_i 尽量相等就实现了曲面极小形变地展平. 为此定义能量函数 E 如下:

$$E(X) = \sum_{j=1}^{N} (l_j - L_j)^2, \tag{5.1}$$

其中 l_j, L_j 分别是平面三角网格和曲面三角网格的边长，N 是网格边的数目，能量 E 是关于平面格点坐标的函数且 X 是格点坐标排列而成. 对于可展曲面，随着网格的细化可以使得 E 趋向于 0，从而实现曲面展平，但对于近似可展曲面，只能使得 E 到达非零最小值，也就是实现了近似展平. 于是曲面展平又转化为 $\min E(X)$ 的优化问题，该优化问题应用共轭梯度法可以很容易求解.

下面给出一个纹理映射的例子，这里使用两种映射方式，一是直接应用参数对应进行映射纹理，二是从展平域定义纹理再映射到曲面. 由于文字图片的映射可以比较明显的反映映射的形变效果，在此我们对文字图片 "B" 进行试验. 首先求得近似可展曲面 (信赖域法，Coons 初值，目标范数 L^2, $\max|K| = 0.03497$)，图 5 左边是该曲面展平后定义纹理信息，右边是将展平后定义的纹理映射到近似可展曲面，图 6 左是参数域上定义纹理信息，右边是将参数域纹理映射到曲面，图 7 是两种映射方式纹理信息形变效果对比，左边为将参数域纹理映射到曲面再展平的纹理，右边是先展平再定义的纹理. 由此可见，先展平再定义纹理最后映射到曲面的方式要好得多.

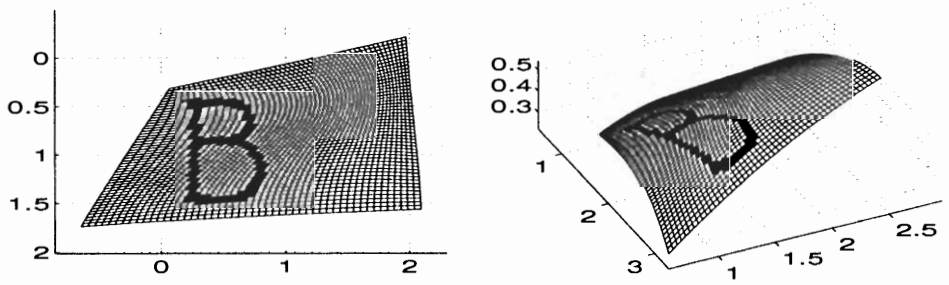

图 5: 左图：曲面展平后定义纹理信息　　右图：近似可展曲面纹理映射 (展平后定义)

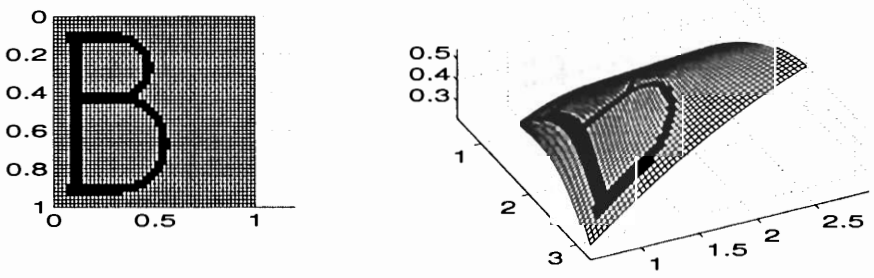

图 6: 左图：曲面参数域定义纹理信息　　右图：近似可展曲面纹理映射 (参数域定义)

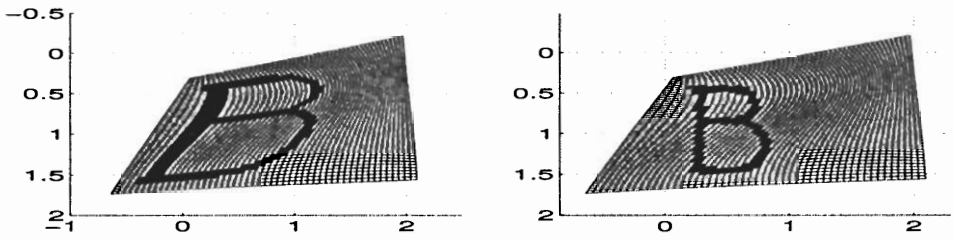

图 7: 左图: 参数域定义纹理信息　　右图: 曲面展平后定义纹理信息效果

6 总结与讨论

本文基于 Gauss 曲率在某种意义下极小定义了近似可展曲面, 并给出基于张量积多项式曲面表示时, 如何应用信赖域方法和拟牛顿方法求解出曲面的表示.. 另外我们还讨论了基于近似可展曲面的纹理映射. 对于我们所提出的问题还有很多工作可以改进, 比如如何合理选择 Gauss 曲率范数的定义; 如何有效求解相应的优化问题; 是否存在更有效的初值指定方法等等. 特别地, 本文中的示例只是针对多项式曲面进行求解的, 而对于给定样条曲线做边界, 如何构造近似可展的样条曲面的问题, 还没有系统分析. 对于这种情形, 如何降低优化问题的复杂度, 从而使之可解是相当关键的问题.

参 考 文 献

1 Aumann G. A simple algorithm for designing developable Bézier surfaces. Comput. Aided Geom. Design, 2003, 20(8-9): 601-619

2 Chu Chih-Hsing, Séquin C H. Developable Bézier patches: properties and design. Comput.-Aided Geom. Design, 2002, 34: 511-527

3 do Carmo M P. Differential geometry of curves and surfaces. Pearson Education, 1976

4 Hoschek J, Lasser D. Fundamentals of computer aided geometric design. Peters, Wellesley, MA, 1993

5 Pottmann H, Wallner J. Approximation algorithms for developable surfaces. Comput. Aided Geome. Design, 1999, 16(6): 539-556

6 Monterde J. Bézier surfaces of minimal area: The Dirichlet approach. Comput. Aided Geom. Design, 2004, 21(2): 117-136

7 满家巨, 汪国昭. B- 样条函数极小曲面造型. 软件学报, 2003, 14(4): 824-829

8 王弘, 王昌凌. 基于能量模型的曲面展开通用算法. 计算机辅助设计与图形学学报, 2001, 13(6): 556-560

9 Zhang Q L, Luo X Q. Finite element method for developing arbitrary surfaces to flatten forms. Finite Elements in Analysis and Design, 2003, 39: 977-984

10 袁亚湘, 孙文瑜. 最优化理论与方法 (第一版). 科学出版社, 1997