

基于保角映射构造流形上的细分曲线

朱文明 邓建松 陈发来

(中国科学技术大学 数学系, 安徽合肥, 230026)

摘要: 流形上的曲线设计在很多领域有着广泛的应用. 本文通过对流形的保角映射, 把常用的曲线细分格式应用于流形上, 生成流形上的光滑曲线. 实验证明这类曲线具有较好的光滑度, 并继承了 R^3 空间中细分曲线的一些特征, 如曲线可以是插值或者逼近原始点列. 本文同时给出实例以说明方法的有效性.

关键词: 曲线细分 保角映射 流形

中图法分类号: TP391 **文献标识码:** A **文章编号:** 1006-8961(年)

Constructing Subdivision Curves on Manifolds with Conformal Mapping

ZHU Wen-ming, DENG Jian-song, CHEN Fa-lai

(Department of Mathematics, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China)

Abstract: Curve design on manifolds is very important in many applications. We propose a curve subdivision approach based on conformal mapping of manifolds. It is proved by experiments that the resulting curves in some sense have nice smoothness and inherit some properties of subdivision curves in R^3 space, such as the curves might interpolate or approximate the initial points. Some examples are provided to illustrate the efficiency.

Keyword: curve subdivision, conformal mapping, manifold.

1 引言

流形上的曲线设计在机器人刚体动作设计^[10,12], 制造几何学^[5,13]以及计算机动画^[8,11,14]等领域有着广泛的应用, 是最近十几年来研究的热点问题之一. 比如在动画设计中, 要求摄像机沿着物体表面从一点移动到另外一点, 这就需要给摄像机安排

一条好的光滑路径曲线, 并且要求这条曲线能紧贴着物体表面。

对于一般欧氏空间里的自由曲线设计方法有很多种, 比如样条曲线、细分曲线等等, 这里不再赘述. 我们关注的是给定曲面上的一些点, 如何通过细分的方法设计一条这个曲面上比较光滑的路径, 使得它插值或者逼近这些点. 目前这方面的研究还主要使用的是变分方法. Hofer^[7]通过扩展三次 B 样

¹本工作得到“973”项目(2004CB318000), 国家杰出青年基金(60225002), 国家自然科学基金(No. 60533060 和 60473132), 教育部高校青年教师奖励计划, 教育部留学回国人员科研启动基金的资助。

条曲线以及张力样条，设计流形上的能量极小化样条，但是这种样条一般没有显式表达，也不便于做多分辨率的曲线设计。本文试图从另一个方面考察流形上光滑曲线的快速生成算法，即通过构造流形上的保角梯度场，建立流形与参数域（单位圆盘或单位球）之间的可逆保角映射。因此流形上的细分曲线便可与对应参数域上的细分曲线简历一一对应，从而达到流形上光滑曲线设计的目的。

由 Riemann 几何中的一致化定理，任意单连通的 Riemann 曲面 K 都与复平面 \mathbf{C} 或者 Riemann 球 $\mathbf{C} \cup \infty$ 或者开圆盘 $\{z \in \mathbf{C} : \|z\| < 1\}$ 保角等价。作为 Riemann 曲面 K 的一个线性逼近，单边界三角网格 M 总是可以同胚于二维欧氏空间中的一个圆盘 S^2 ，而亏格为零的闭曲面通常可被保角映射到 R^3 中的单位球 S^3 上。对于复杂拓扑的曲面，通过引进基础域 (Fundamental domain) 的概念，分别建立各基础域上相互兼容的保角映射图 (Atlas)，同样可以得到整体保角映射的构造方法^[4]。

本文由五个部分组成，第二节主要介绍当前应用广泛的保角映射算法以及欧氏空间中的曲线细分格式；第三节详细描述基于曲面保角映射的细分曲线构造过程；第四和第五节分别给出实例和结论。

2 保角映射与曲线细分格式综述

本节我们主要介绍流形上的保角映射构造方法，并简单概括 R^3 中曲线细分的几种常用格式。

2.1 流形的保角映射

流形的保角映射在Gu^[4]的文章中有比较详细的介绍，在这里我们做个简单的概括。对亏格为 g 的 Riemann 曲面 K ，首先我们使用 K 上的同调基和上同调群构造梯度场线性空间，通过求解一个线性方程组得到这个空间的一组基，最后再由这组基的线性组合获得 K 的一个保角梯度场，记为 $\omega + \sqrt{-1}^* \omega$ ，这里 ω 和 $^* \omega$ 分别为梯度场的实部和虚部。

通过 K 的同调基 $\{e_i\}_{i=1}^{2g}$ 构造，曲面可以沿每个 e_i 分解成与亏格 g 相关的单边界曲面片，称为基础域。上同调群是同调群上的线性泛函空间，由 Riemann 几何理论，保角的梯度场（全纯-型） $\omega + \sqrt{-1}^* \omega$ 具有如下性质：

- 封闭性， ω 和 $^* \omega$ 都是闭的。
- 调和性， ω 和 $^* \omega$ 都是调和的，即 $\Delta \omega = 0$ ， $\Delta ^* \omega = 0$ 。

- 二元性， ω 和 $^* \omega$ 的上同调群可以由他们沿着每个同调基上的积分得到。
- 共轭性， ω 总与 $^* \omega$ 垂直。

由Hodge理论，给定 $2g$ 个实数 c_1, \dots, c_{2g} ，存在唯一的梯度场 ω 满足上面的前三个条件，即

$$\begin{cases} d\omega = 0 \\ \Delta \omega = 0 \\ \int_{e_i} \omega = c_i, i = 1, \dots, 2g \end{cases}$$

其中 d 为外微分算子， Δ 为 Laplacian-Beltrami 算子，第三式则是对 ω 的上同调群做相关约束。梯度场的共轭性则由 $^* \omega = \vec{n} \times \omega$ 得到，这里 \vec{n} 为曲面的法向空间。一旦得到保角梯度场空间的基 $\{\omega_i + \sqrt{-1}^* \omega_i\}_i$ ，曲面的一个保角参数化便可通过梯度场在曲面的每个基础域上积分得到。

保角参数化的一个例子如图^[4]，其中(a)表示的是 $g = 2$ 的模型上的4个同调基 e_1, \dots, e_4 ；(b)为 e_1 上的梯度向量场；(c)为与(b)正交的向量场 $^* \omega$ ；(d)是(b)和(c)的组合，即保角梯度场 $\omega + \sqrt{-1}^* \omega$ 。

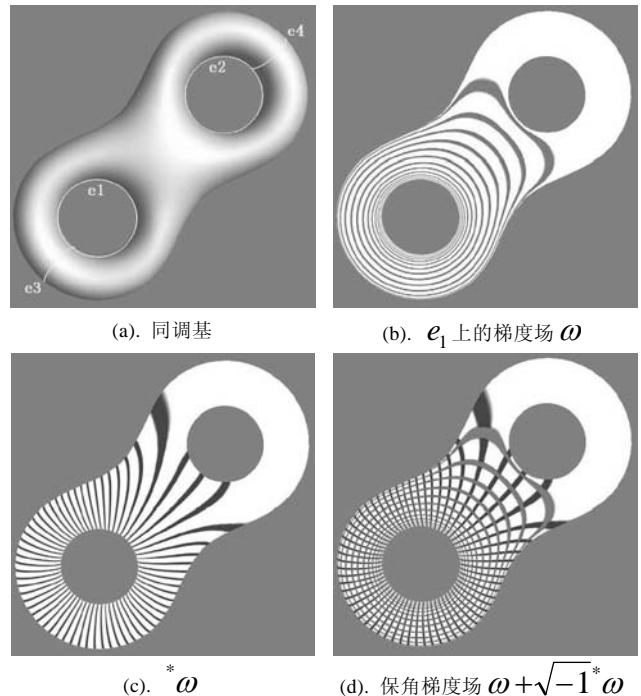


图 1. 保角梯度场的构造

虽然Gu给出了Riemann几何意义上的保角参数化方法，但是在工程应用中处理的对象都是多边形网格，

即流形的线性逼近。特别对于三角形网格，很多种离散的保角参数化方法被提出，关于这方面的介绍可以参考Floater的综述性文章^[3]。Gu通过使用单纯形上调和逼近De Rham上调和，同时对Hodge星算子，Laplacian-Beltrami算子分别做线性逼近，给出了网格上的整体保角参数化框架：

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^3 \omega([u_{j-1}, u_j]) = 0, \forall [u_0, u_1, u_2] \in M \\ \sum_{[u,v]} \kappa_{u,v} \omega([u, v]) = 0, \forall u \in M \\ \sum_{j=1}^{n_i} \omega([u_{j-1}^i, u_j^i]) = c_i, \forall e_i = \sum_{j=1}^{n_i} [u_{j-1}^i, u_j^i] \end{cases}$$

这里 ω 即表示的是网格 M 上的梯度场实部， $[u, v]$ 为节点 u 与 v 之间的边， $\kappa_{u,v}$ 是边上的弹性拉伸系数，下标 i 从1到 $2g$ 。一旦求得实梯度场的一组基 $\{\omega_i\}_{i=1}^{2g}$ ，其虚部 $\{*\omega_i\}_{i=1}^{2g}$ 便可以通过线性方程组 $W\Lambda = B$ 得到，其中矩阵 W 与向量 B 的元素都可以由 ω 与 $*\omega$ 地外积得到，未知向量 Λ 则是 $\{\omega_{u,v}\}$ 的组合系数。

上述过程其实是Riemann流形保角映射在三角形网格上的离散实现，由 $\omega + \sqrt{-1}*\omega$ 表示的一组基张成了网格 M 上的保角梯度场空间。目前提到的关于三角网格保角参数化方法都可以在这个空间中找到表达方式。

2.2 曲线细分格式

细分方法是近年来曲面曲线造型研究的课题之一。其优点在于对少量的初始曲线或者曲面，通过收敛的细分方法，便可快速有效地生成光滑的极限曲线曲面，并且算法简单，容易实现，在CAGD领域内占有很重要的位置。这也是我们在设计流形上曲线考虑使用细分方法的原因之一。

Dyn^[2]等首先给出四点二进制的插值曲线细分格式，在经过适当的修改之后证明格式是 C^1 的。四点二进制插值格式的细分模板为 $[-\frac{1}{16}, \frac{9}{16}, \frac{9}{16}, -\frac{1}{16}]$ 。三点二进制逼近细分是从均匀三次B样条推导而出，对给定的任何初始点列，其极限为一个 C^2 的光滑曲线。细分模板为

$$\begin{cases} p_{2k}^{j+1} = \frac{1}{8}(p_{k-1}^j + 6p_k^j + p_{k+1}^j) \\ p_{2k+1}^{j+1} = \frac{1}{8}(4p_k^j + 4p_{k+1}^j) \end{cases}$$

Hassan^[6]等还提出了带参数 μ 的四点三进制细分，并且证明当 $\frac{1}{15} < \mu < \frac{1}{9}$ 时格式是 C^2 的，其细分模板为

$$\begin{cases} p_{3k}^{j+1} = p_k^j \\ p_{3k+1}^{j+1} = a_0 p_{k-1}^j + a_1 p_k^j + a_2 p_{k+1}^j + a_3 p_{k+2}^j \\ p_{3k+2}^{j+1} = a_3 p_{k-1}^j + a_2 p_k^j + a_1 p_{k+1}^j + a_0 p_{k+2}^j \end{cases}$$

其中权值组 $\{a_0, a_1, a_2, a_3\}$ 的元素分别用 μ 表示为 $\{-\frac{1}{18} - \frac{1}{6}\mu, \frac{13}{18} + \frac{1}{2}\mu, \frac{7}{18} - \frac{1}{2}, -\frac{1}{18} + \frac{1}{6}\mu\}$ 。

其他还有更多的从样条导出的格式也被提出^[1, 15, 16]。所有的格式都适用于我们的方法，在实例中我们考虑的是两种具有代表性的带参数四点三进制插值格式和三点二进制逼近格式。

3 基于保角映射的曲线细分

本节我们分别对单边界的开网格和零亏格的闭网格进行分析，详细描述三角网格上细分曲线的生成过程，并在复杂拓扑的网格上引入局部参数化的方法，按模版顺序依次生成新一层的顶点。

首先定义几个记号：

M ，给定的网格；

$\vec{v}^j = \{v_0^j, v_1^j, \dots, v_{N_j}^j\}^T$ ，网格 M 上经 j 次细分后的点列；

$\vec{T}^j = \{t_0^j, t_1^j, \dots, t_{N_j}^j\}^T$ ，参数域上经 j 次细分后的点列；

S^m ， m 维欧氏空间中的单位球；

Φ, Φ_s ，分别对应单位圆盘和单位球上的保角映射算子；

S ，欧氏空间中细分算子，通常是线性的；

\tilde{N} ，向量归一化算子。

3.1 单边界开网格的全局参数化方法

单边界开网格 M 总是可以同胚于二维欧氏空间中的一个圆盘 S^2 ，其上的保角映射算子定义如下：

$$\begin{aligned} \Phi : M &\rightarrow S^2 \\ \Phi(p_i) &= q_i \in S^2, \forall p_i \in M \\ \text{s.t. Min} &\sum_{(i,j) \in \text{Edges}} \lambda_{ij} \|q_i - q_j\|^2 \end{aligned}$$

则 M 上的初始点列 \vec{v}^0 通过映射 Φ 一一对应到参数域 S^2 上的初始点列 \vec{T}^0 ： $\vec{T}^0 = \Phi(\vec{v}^0)$

任意给定一个收敛的曲线细分格式 S ，在 S^2 上总可以对 \bar{T}^0 做细分操作。经过 n 步细分之后，得到点列 \bar{T}^n ： $\bar{T}^j = S^j \bar{T}^0, j = 0, \dots, n$ 。

最后，我们需要将它从 S^2 映回到 M 上去。这里需要 Φ 的逆映射，即 $\Phi^{-1} : \bar{V}^n = \Phi^{-1} \bar{T}^n$ ，点列 \bar{V}^n 即为我们所求。

上述细分过程概括起来可以描述成一个算子，表示为 $P = \Phi^{-1} \cdot S \cdot \Phi$ ， n 次细分只需在初试点列连续作用 P 算子 n 次即可：

$$\begin{aligned}\bar{V}^n &= P^n \bar{V}^0 \\ &= \Phi^{-1} \cdot S \cdot \Phi \cdot \Phi^{-1} \dots \Phi^{-1} \cdot S \cdot \Phi \bar{V}^0 \\ &= \Phi^{-1} \cdot S^n \cdot \Phi \bar{V}^0.\end{aligned}$$

图 2 描述了基于开网格上保角映射的曲线细分过程，(2.c)和(2.d)分别为参数域 S^2 上的初始曲线及细分曲线。

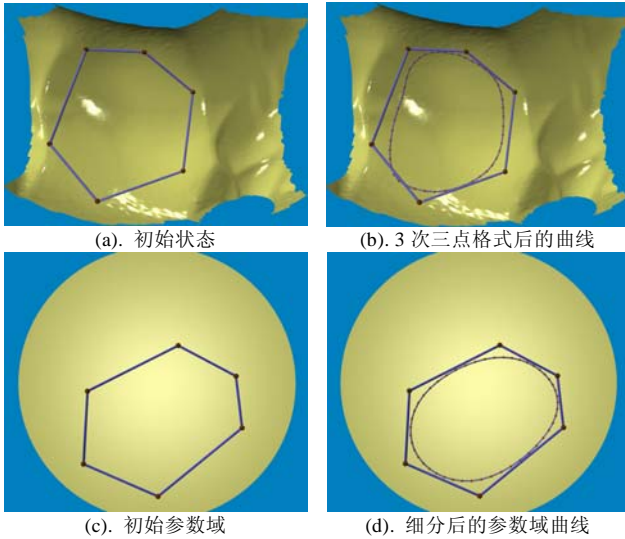


图 2. 单边界开表面上的曲线细分

由算子 Φ 的特点，角度在保角映射的作用下是保持不变的。因此在足够光滑的流形 K 上，当细分步数 $n \rightarrow \infty$ 时，其极限曲线 $\bar{V}^\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} P^n \bar{V}^0$ 至少能保持 C^1 连续。当然这里需要细分格式 S 至少是 C^1 的。

3.2 零亏格闭网格的全局参数化方法

由于零亏格闭网格拓扑同胚于 $S^3 \subset R^3$ ，其上的保角映射等价于调和映射^[4]，我们应用球面参数化 Φ_s 实现从 M 到 S^3 的保角映射：

$$\begin{aligned}\Phi : M &\rightarrow S^3 \\ \Phi(p) &= q \in S^3, \forall p \in M \\ \text{s.t. Min} &\sum_{(i,j) \in \text{Edges}} \lambda_{ij} \|q_i - q_j\|^2\end{aligned}$$

同时将欧氏空间中的曲线细分格式限制在球面 S^3 上。这主要是通过对细分过程中新生成的点做归一化处理 \tilde{N} 而得到。

记 $\tilde{S} = \tilde{N} \cdot S$ ，将 \tilde{S} 和 Φ_s 分别代替 3.1 节中的 S 和 Φ ，我们得到另一个参数化细分算子：

$$\begin{aligned}P_s &= \Phi_s^{-1} \cdot \tilde{N} \cdot S \cdot \Phi_s \\ &= \Phi_s^{-1} \cdot \tilde{S} \cdot \Phi_s\end{aligned}$$

经过 n 次 P_s 的作用，我们得到

$$\begin{aligned}\bar{V}^n &= P_s^n \bar{V}^0 \\ &= \Phi_s^{-1} \cdot \tilde{S} \cdot \Phi_s \cdot \Phi_s^{-1} \dots \Phi_s^{-1} \cdot S \cdot \Phi_s \bar{V}^0 \\ &= \Phi_s^{-1} \cdot \tilde{S}^n \cdot \Phi_s \bar{V}^0.\end{aligned}$$

图 3 演示的是基于球面参数化的曲线细分。(3.c)和 (3.d) 分别是参数域 S^3 上的初始曲线和细分曲线。

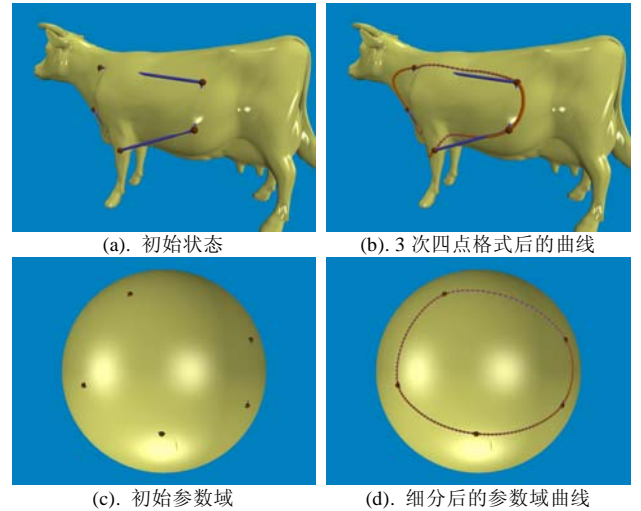


图 3. 零亏格闭表面上的曲线细分

3.3 复杂拓扑的局部参数化方法

在实际应用中，经常需要处理的海量数据的密集曲面或者具有很复杂的拓扑结构。在这种情况下前面描述的方法可行性不高。虽然 Φ 将整体的保角参数化应用到任意拓扑流形上，但是在处理海量数据的时候，其效率是非常低的。

在这里我们引入类似于基础域的概念，按每个

细分模板 Ω_i^j 构造网格 M 的一组子集, $\{U_i^j\}$ 。每个 U_i^j 均通过兼容的保角映射图 Φ_i^j 投影到复平面上的单位圆盘。其算法描述如下:

局部参数化上曲线细分算法描述

输入: 三角网格 M 及其上初始点列 \vec{V}^0

输出: M 上点列 \vec{V}^n

1. 对每个细分模板 $\Omega_i^j \subset \vec{V}^j$, 从 M 剪切曲面片 M_i^j ;
2. 应用算子 Φ 将 M_i^j 保角映射到 2 维圆盘 S^2 , 同时得到模板 Ω_i^j 在 S^2 上的像, 记为 $\hat{\Omega}_i^j$;
3. 在 S^2 上以 $\hat{\Omega}_i^j$ 为模板做曲线细分, 并通过 Φ^{-1} 将新生成的点映射回 M , 作为 \vec{V}^{j+1} 的元素;
4. 若 $j < n$, 重复 1-3.

图 4 中的网格是一个亏格为 1 的机器零件, 初始点列由 4 个点组成(4.a), (4.d)为某个模板所在的局部剪切曲面。

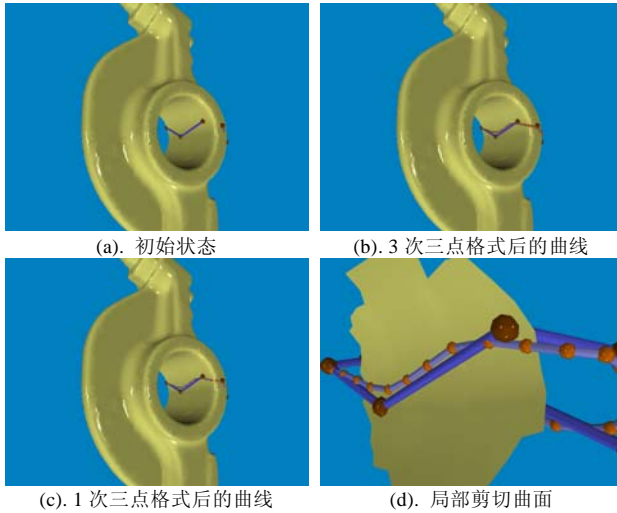


图 4. 基于局部参数化的曲线细分

前面介绍的平面参数化方法同样保证了当细分步数 $n \rightarrow \infty$ 时 M 上极限曲线的光滑性, 而相邻基础域上保角映射图 (Conformal Atlas) 的相互兼容性保证了在细分的过程中不会产生局部扭曲。

4 实例及说明

我们在多个不同实例上应用前面描述的算法, 并且得到期望的结果。不失一般性, 我们使用三点二进制逼近格式和四点三进制格式, 来生成网格上的闭曲线。对于开曲线, 只需要在端点处额外考虑边界条件即可。

图 5 显示的是 Bunny 模型上平面参数化的细分曲线。模型是底部开口的, 所以为单边界开网格。(3.b)和(3.c)分别是两种细分格式生成的曲线, (3.d)为参数域上的对应细分曲线。

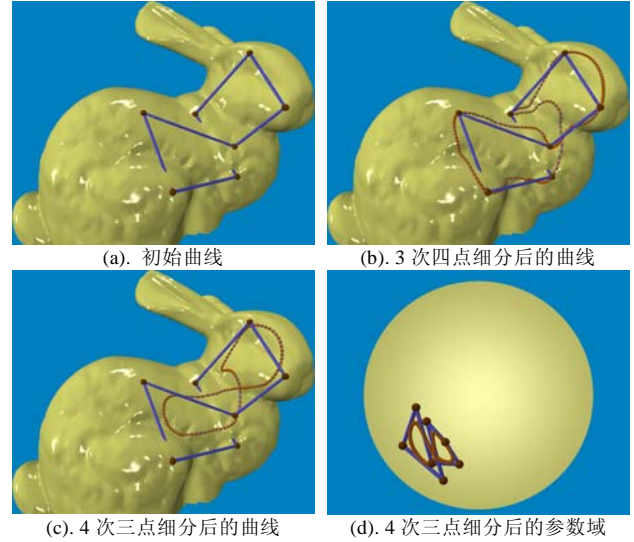


图 5. 单边界开曲面实例

显然, 对于同样给定的网格 M 及其上初始曲线 \vec{V}^0 , 逼近型的三点二进制方法得到的曲线效果要比插值型四点三进制格式的要好些, 并且逼近型细分格式作用后曲线会有一个收缩的效果, 这在图中也表现的比较明显。

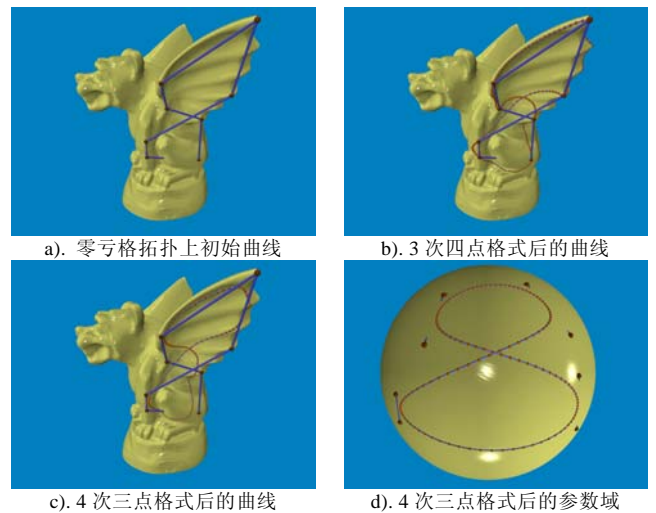


图 6. 零亏格闭曲面上的曲线细分, 模型为 Gargoyle.

对零亏格的闭网格, 我们应用 Gu^[4]提出的球面保角映射算法, 同样应用三点二进制和四点三进制格式进行细分曲线生成。效果如图 6, 使用的模型

为 Gargoyle, 我们在一边翅膀上设定初始曲线, 再经过球面参数化上的细分过程, 得到 6.b (四点格式) 和 6.c (三点格式) 的细分曲线, 6.d 为 4 次三点格式后的参数域曲线图。

在网格点密集或者复杂拓扑的曲面上我们应用局部参数化方法, 每次只取曲面的一小部分做保角映射, 最后得到效果如图 7。这里我们采用的模型是 Armadillo, 不过其背部被人工裁剪掉两个大小不一的洞, 经过局部参数化上的细分过程, 得到 7.b 和 7.c 的效果图, 7.d 的左右两图分别为第 1, 2 层细分上的某个模板对应的局部剪切曲面。由此表明基于局部参数化的曲线细分在处理复杂拓扑方面也是很有效的方法。

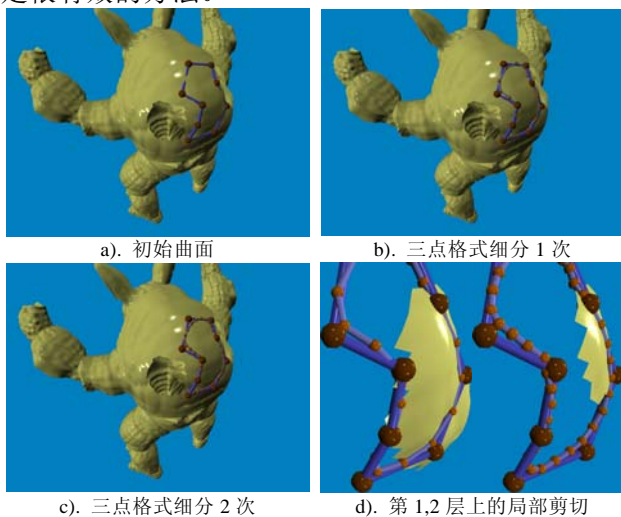


图 7. 局部参数化曲线细分实例. 模型为 Armadillo, 背部被剪切出大小不一的两个洞。

5 结论

本文利用流形保角参数化的结果给出了构造流形上光滑曲线的算法。在获取了曲面的参数域之后, 细分曲线的生成效率与一般欧氏空间中的细分方法相当。当细分步数较小 (比如小于 5) 时, 基本上可以实时的给出结果。利用这种方法可以快速的生成流形上的光滑曲线, 满足计算机图形学中曲线设计的需要, 第三和第四节通过实例演示的效果, 说明了这种方法的可行性。

今后我们将考虑进一步提高上述算法的效果, 并与新近出现的所谓非线性细分算子^[17]进行比较, 以期得到更好的生成曲面上细分算法。

参考文献

- [1] G. Deslauriers and S. Dubuc. Symmetric iterative interpolation processes[J]. *Constr. Approx.*, 5:49-68, 1989.
- [2] N. Dyn, D. Levin and J. Gregory. A 4-point interpolation subdivision scheme for curve design[J]. *Computer Aided Geometric Design*, 4:257-268, 1987.
- [3] M. Floater and K. Hormann. Surface parameterization: a tutorial and survey[M]. In *Advances in Multiresolution for Geometric Modelling*, N. Dodgson, M. Floater and M. Sabin (Eds.), Springer-Verlag, 2004, pages 157-186
- [4] X. Gu. Parametrization for surfaces with arbitrary topologies[D]. PhD thesis, Harvard University, 2003.
- [5] D. Halperin, L. Kavraki and J. Latombe. Robotics[M]. In J. E. Goodman and J. O'Rourke, editors, *Handbook of Discrete and Computational Geometry*.
- [6] M. Hassan, I. Ivriissimitzis, N. Dodgson and M. Sabin. An interpolating 4-point C^2 ternary stationary subdivision scheme[J]. *CAGD*, 19(1):1-18, Jan 2002.
- [7] M. Hofer and H. Pottmann. Energy-Minimizing Splines in Manifolds[J]. *Trans. on Graphics* 23(3):284-293, 2004. (Proceedings of ACM SIGGRAPH 2004).
- [8] B. Juttler and M. Wagner. Kinematics and animation[M]. In G. Farin, J. Hoschek and M. Kim editors, *Handbook of Computer Aided Geometric Design*, pages 723-748. Elsevier, 2002.
- [9] L. Kobbelt. A variational approach to subdivision[J]. *Computer Aided Geometric Design*, 13:743-761, 1996.
- [10] J. Latombe. *Robot Motion Planning*. Kuwer, 2001.
- [11] E. Marchand and N. Courty. Controlling a camera in virtual environment[J]. *The Visual Computer*, 18:1-19, 2002.
- [12] F. Park and B. Ravani. Smooth invariant interpolation of rotations[J]. *ACM Trans. on Graphics*, 16:227-295, 1997.
- [13] M. Sharir. Algorithmic Motion Planning in Robotics[J]. *IEEE Computer* 22 (3): 9-20 (1989).
- [14] K. Shoemake. Animating rotation with quaternion curves[J]. *Computer Graphics*, 19:245-254, 1985.
- [15] A. Weissman. A 6-point interpolatory subdivision scheme for curve design[D]. Master's thesis, Tel-Aviv University, 1990.
- [16] D. Zorin and P. Schroder. Course 23: Subdivision for modeling and animation[C]. *ACM SIGGRAPH*, pages 17-64, 2000.
- [17] J. Wallner and N. Dyn. Convergence and C^1 analysis of subdivision schemes on manifolds by proximity[J]. 22 (2005), 593-622. *CAGD*, 22:593-562, 2005.

作者简介: 朱文明(1980—), 男, 江西萍乡人, 博士研究生, 主要研究领域为曲线曲面细分;

邓建松(1971—)，男，博士，副教授，主要研究领域为计算机辅助几何设计与计算机图形学；

陈发来(1966—)，男，教授，博士生导师，主要研究领域为计算机辅助几何设计与计算机图形学。