

有理 B 样条曲面的区间隐式化

陈越强, 冯玉瑜, 邓建松

(中国科学技术大学数学系, 安徽合肥 230026)

摘要: 本文研究有理 B 样条曲面的区间隐式化方法, 即对一个有理 B 样条曲面, 要寻求包含给定的曲面的区间隐式 B 样条曲面, 使得区间隐式 B 样条曲面的“厚度”尽量小, 同时尽量避免多余分支的出现。问题等价于求区间隐式 B 样条曲面的两个边界曲面。本文将针对这个问题建立一个最优化模型并求解。

关键词: 有理 B 样条曲面; 区间隐式 B 样条曲面; 区间隐式化

Interval implicitization of rational B-spline surfaces

CHEN Yue-qiang, FENG Yu-yu, DENG Jian-song

(Department of Mathematics, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China)

Abstract: In this paper, we study the interval implicitization of rational B-spline surfaces, that is, finding an interval implicit B-spline surface which bounds a given rational B-spline surface such that the width of the interval implicit B-spline surface is as small as possible. This problem is equivalent to finding the two bounding surfaces of interval implicit B-spline surface. We will establish an optimization model and give the solution.

Keywords: rational B-spline surface; interval implicit B-spline surface; interval implicitization

§1 引言

参数表示和隐式表示是 CAGD 中的两种基本表达形式, 它们有各自的优缺点。例如参数表示易于绘制且可以很容易得到几何形体上的采样点, 而隐式表示则比较容易判断一个点是否在几何形体上或者是在其内侧、外侧。如果能同时得到一个几何形体的这两种表达形式将是非常有用的。

给定一个有理 B 样条曲线(曲面), 理论上可以找到该曲线(曲面)的精确隐式化。但由于精确隐式化方法涉及大量的符号运算, 得到的结果往往次数较高, 而且很难控制多余分支, 因此有时使用不太方便; 另一方面, 由于计算机浮点误差的存在, 得到的通常也只是近似结果。但是我们又希望不要丢失原有理曲线(曲面)的信息, 因此引入了区间隐式曲线(曲面)的概念 ([1])。区间隐式曲线(曲面)是个有“宽度”(“厚度”)的曲线(曲面), 包含了原有理曲线(曲面)。这样当这个“宽度”(“厚度”)足够小时, 在某种意义上我们就可以认为求得了该有理曲线(曲面)的隐式表示。

关于参数表示的隐式化已经有了很多研究工作。杨周旺等人讨论了离散点的动态隐式曲线重构 ([2]), 这相当于把离散点近似认为参数曲线。陈发来实现了低次代数曲线逼近高次有理曲线的方法 ([3])。高小山等人讨论了用二次样条逼近平面有理参数曲线的方法 ([4])。陈发来等人讨论了用区间

隐式曲线逼近有理曲线的方法 ([5])。陈效群等人讨论了用区间 Bézier 曲线逼近有理曲线的方法 ([6])。樊旭川等人讨论了有理 B 样条曲线的区间隐式化的方法 ([7, 8])。刘利刚等人给出了利用区间 Bézier 曲面逼近一般曲面和有理参数曲面的方法 ([9])。李亚娟等人讨论了用低阶多项式隐式曲面来逼近有理参数曲面的方法 ([10])。

本文要讨论的是用区间隐式 B 样条曲面来近似给定的有理 B 样条参数曲面的方法：先分割加细参数曲面，然后在每个小区域利用一个立方体包含参数曲面，再令所要求的区间隐式 B 样条曲面的两个边界分别在立方体的两侧得到限制条件，利用这些限制条件建立最优化模型并求解。

本文结构如下：第 1 节简要叙述了问题的背景和一些结论；第 2 节介绍关于区间运算的一些概念和区间隐式 B 样条曲面的定义；第 3 节给出了用区间隐式 B 样条曲面来逼近给定的有理 B 样条曲面的方法；第 4 节给出了几个算例；第 5 节是对前几节内容的概括。

§2 区间算法和区间隐式 B 样条曲面

区间是指实闭区间 $[a, b] := \{x | a \leq x \leq b\}$ 。若 $a = b$ ，则称 $[a, b]$ 为一个退化的区间。两个区间 $[a, b]$, $[c, d]$ 相等，指的是 $a = c$ 且 $b = d$ 。区间 $[a, b]$ 的宽度定义为 $w([a, b]) := b - a$ ，中心定义为 $c([a, b]) := (a + b)/2$ 。由所有有界闭区间组成的集合通常记为 $I\mathbb{R}$ 。对于该集合上定义的代数与区间运算以及区间函数，在 Moore 的经典著作“区间分析 (Interval Analysis[1])”一书中，均作了详细讨论。在这里我们作一些简要的叙述。

区间运算定义为

$$[a, b] \circ [c, d] = \{x \circ y | x \in [a, b], y \in [c, d]\}. \quad (2.1)$$

其中， $\circ \in \{+, -, \times, /\}$ 。具体地说，即为

$$\begin{aligned} [a, b] + [c, d] &= [a + c, b + d], \\ [a, b] - [c, d] &= [a - d, b - c], \\ [a, b] \times [c, d] &= [\min(ac, ad, bc, bd), \max(ac, ad, bc, bd)], \\ [a, b] / [c, d] &= \left[\min\left(\frac{a}{c}, \frac{a}{d}, \frac{b}{c}, \frac{b}{d}\right), \max\left(\frac{a}{c}, \frac{a}{d}, \frac{b}{c}, \frac{b}{d}\right) \right], \quad 0 \notin [c, d]. \end{aligned} \quad (2.2)$$

这里，当 $0 \in [c, d]$ 时，除法运算是未定义的。不过在有些应用中，也可以将除法运算的结果定义为两个分别延伸到正、负无穷的区间。

区间隐式 B 样条曲面的定义为

$$[f](x, y, z) := \sum_{i=0}^{m_x} \sum_{j=0}^{m_y} \sum_{k=0}^{m_z} [f_{ijk}] N_i^{n_x}(x) N_j^{n_y}(y) N_k^{n_z}(z) = [0]. \quad (2.3)$$

其中 $N_i^{n_x}(x)$, $N_j^{n_y}(y)$, $N_k^{n_z}(z)$ 为基函数， $[0]$ 表示含 0 区间， $x \in [\underline{x}, \bar{x}]$, $y \in [\underline{y}, \bar{y}]$, $z \in [\underline{z}, \bar{z}]$, $[f_{ijk}] := [\underline{f}_{ijk}, \bar{f}_{ijk}]$ 。则 (2.3) 式定义的区间曲面的几何图形是如下的点集合

$$\left\{ (x, y, z) \left| \sum_{i=0}^{m_x} \sum_{j=0}^{m_y} \sum_{k=0}^{m_z} f_{ijk} N_i^{n_x}(x) N_j^{n_y}(y) N_k^{n_z}(z) = 0 \forall f_{ijk} \in [f_{ijk}] \right. \right\}. \quad (2.4)$$

很自然地, 区间隐式曲面 (2.3) 的两个边界定义为

$$\begin{aligned} \text{l}f(x, y, z) &:= \sum_{i=0}^{m_x} \sum_{j=0}^{m_y} \sum_{k=0}^{m_z} \underline{f}_{ijk} N_i^{n_x}(x) N_j^{n_y}(y) N_k^{n_z}(z) = 0, \\ \text{u}f(x, y, z) &:= \sum_{i=0}^{m_x} \sum_{j=0}^{m_y} \sum_{k=0}^{m_z} \bar{f}_{ijk} N_i^{n_x}(x) N_j^{n_y}(y) N_k^{n_z}(z) = 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

区间隐式 B 样条曲面的“厚度”定义为

$$w([f]) := \frac{1}{(m_x + 1)(m_y + 1)(m_z + 1)} \sum_{i=0}^{m_x} \sum_{j=0}^{m_y} \sum_{k=0}^{m_z} w([f_{ijk}]). \quad (2.6)$$

§3 有理 B 样条曲面的区间隐式化

这一节我们给出有理 B 样条曲面的区间隐式化的一些定义及其算法。给定一个 $n_u \times n_v$ 次有理 B 样条参数曲面

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(u, v) &= (x(u, v), y(u, v), z(u, v), w(u, v)) \\ &= \sum_{i=0}^{m_u} \sum_{j=0}^{m_v} w_{ij}(\mathbf{P}_{ij}, 1) N_i^{n_u}(u) N_j^{n_v}(v), \quad (u, v) \in \Omega := [\underline{u}, \bar{u}] \times [\underline{v}, \bar{v}]. \end{aligned} \quad (3.1)$$

其中 $\mathbf{P}_{ij} = (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij})$, w_{ij} 为权参数, $N_i^{n_u}(u)$, $N_j^{n_v}(v)$ 为 B 样条基函数。 $\mathbf{P}(u, v)$ 定义的可理 B 样条曲面在参数 (u, v) 处对应的点为

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \left(\frac{x(u, v)}{w(u, v)}, \frac{y(u, v)}{w(u, v)}, \frac{z(u, v)}{w(u, v)} \right) \\ &= \left(\frac{\sum_{i=0}^{m_u} \sum_{j=0}^{m_v} x_{ij} w_{ij} N_i^{n_u}(u) N_j^{n_v}(v)}{\sum_{i=0}^{m_u} \sum_{j=0}^{m_v} w_{ij} N_i^{n_u}(u) N_j^{n_v}(v)}, \frac{\sum_{i=0}^{m_u} \sum_{j=0}^{m_v} y_{ij} w_{ij} N_i^{n_u}(u) N_j^{n_v}(v)}{\sum_{i=0}^{m_u} \sum_{j=0}^{m_v} w_{ij} N_i^{n_u}(u) N_j^{n_v}(v)}, \frac{\sum_{i=0}^{m_u} \sum_{j=0}^{m_v} z_{ij} w_{ij} N_i^{n_u}(u) N_j^{n_v}(v)}{\sum_{i=0}^{m_u} \sum_{j=0}^{m_v} w_{ij} N_i^{n_u}(u) N_j^{n_v}(v)} \right). \end{aligned} \quad (3.2)$$

对于给定的如 (3.2) 式所示的可理 B 样条参数曲面的区间隐式化是指

问题的描述: 给定可理 B 样条参数曲面 $\mathbf{P}(u, v)$, 希望能找到一个区间隐式 B 样条曲面 $[f](x, y, z)$, 使得 $\mathbf{P}(u, v) \subseteq [f](x, y, z)$, 即 $\text{l}f(\mathbf{P}(u, v)) \leq 0 \leq \text{u}f(\mathbf{P}(u, v))$, 也即

$$[f] \left(\frac{x(u, v)}{w(u, v)}, \frac{y(u, v)}{w(u, v)}, \frac{z(u, v)}{w(u, v)} \right) = [0], \quad \forall (u, v) \in \Omega = [\underline{u}, \bar{u}] \times [\underline{v}, \bar{v}]. \quad (3.3)$$

且求得的区间隐式 B 样条曲面的“厚度”尽可能地小, 表面形状与原参数曲面尽可能地接近。

在求解包含可理 B 样条曲面的区间隐式 B 样条曲面时, 包含条件是最难处理的环节, 一般的解决方法如下:

- 首先由于有理 B 样条曲面在不同区域的表达式不同, 这样在计算时就必须按节点分割区域进行包含条件的处理。而由于所要求的区间隐式 B 样条曲面在定义域的按节点分割的不同块上表达式也不同, 因此就必须把参数区域按节点分割后的每块区域再进行分割, 使得分割后的小块区域上的参数 B 样条曲面包含在区间隐式 B 样条曲面的定义域的某个块中。比如 Ω_{ij} 是参数区域 Ω 的一个按节点分割的矩形块, 如果参数曲面 $\mathbf{P}(u, v)$ 限制在 Ω_{ij} 上的部分不完全包含于区间隐式曲面的某个按节点分割的小立方区域上, 就必须把参数区域 Ω_{ij} 分割成各个小参数区域 $(\Omega_{ij})_{kl}$, 使得在每个 $(\Omega_{ij})_{kl}$ 上参数曲面完全包含于某个区间隐式曲面按节点分割的小立方区域。这个是比较困难的工作, 而且即使理论上能得到精确的分割, 由于计算机浮点误差的存在, 实际上也是不太可能做到的;
- 其次, 如果按照上述分割区域的方法做: 把参数表达式代入隐式表达式的两个边界, 分别化为张量积 Bernstein 基形式, 再令所有系数分别大于零或者小于零, 得到区间隐式 B 样条曲面包含参数曲面的一个充分条件。而这个充分条件的规模很大 (即使是对于参数曲面和区间隐式曲面的节点和次数都不高的情况)。这样大的求解规模得到的解也不可能是很准确的解。

鉴于以上理由, 我们采用参数曲面的控制网格加细, 然后对基于控制网的每个小块取一个小立方区域包含对应的参数曲面片, 用所有这些小立方区域代替参数曲面得到区间隐式曲面包含参数曲面的充分条件。这样, 求解的规模就取决于我们把控制网格加细的程度, 和参数曲面的次数以及节点数无关。以下是这个算法的详细步骤:

边界限制条件求解算法:

1. 把定义如 (3.1) 的参数曲面的定义域在节点处分块, 使得在每个长方形区域 $\Omega_{ij} \subseteq \Omega$ 上 $\mathbf{P}(u, v)$ 有单一的表达式 (即不是分片形式的表达式);
2. 把 Ω_{ij} 上的参数曲面化为张量积 Bernstein 基形式并求出其控制网格;
3. 把 Ω_{ij} 细分为多个小长方形区域 $(\Omega_{ij})_{kl}$, 在每个 $(\Omega_{ij})_{kl}$ 上求出在这个区域上定义的参数曲面片的 Bernstein 基形式;
4. 在上一步中的每个面片均可求出其控制网格, 从而可以得到包含该面片的最小立方体 $(C_{ij})_{kl}$;
5. 令 $lf((C_{ij})_{kl}) \leq 0$, $uf((C_{ij})_{kl}) \geq 0$, 遍历所有的 i, j, k, l 即可得到区间隐式 B 样条包含有理 B 样条曲面的一个充分条件。

记 $[f](x, y, z)$ 的两个边界曲面的系数列向量分别为 $\mathbf{F}_l$ 和 $\mathbf{F}_u$ 。为了使求得的区间隐式 B 样条曲面和有理 B 样条曲面的差别尽可能地小, 考虑极小化以下几个量

1. 区间隐式 B 样条曲面 $[f](x, y, z)$ 与参数曲面 $\mathbf{P}(u, v)$ 的代数距离

$$\begin{aligned} L_l(\mathbf{F}) &:= \int_{\underline{u}}^{\overline{u}} \int_{\underline{v}}^{\overline{v}} lf\left(\frac{x(u, v)}{w(u, v)}, \frac{y(u, v)}{w(u, v)}, \frac{z(u, v)}{w(u, v)}\right)^2 dudv := \mathbf{F}'_l * LF_l * \mathbf{F}_l, \\ L_u(\mathbf{F}) &:= \int_{\underline{u}}^{\overline{u}} \int_{\underline{v}}^{\overline{v}} uf\left(\frac{x(u, v)}{w(u, v)}, \frac{y(u, v)}{w(u, v)}, \frac{z(u, v)}{w(u, v)}\right)^2 dudv := \mathbf{F}'_u * LF_u * \mathbf{F}_u. \end{aligned} \quad (3.4)$$

由于两个边界曲面的基函数相同, (3.4) 中的 LF_l 和 LF_u 实际上是相同的, 记为 LF 。这个量的引入是很自然的, 因为我们要求参数曲面的区间近似隐式化, 当然希望参数曲面和区间隐式曲面之间的距离尽可能地小;

2. 区间隐式 B 样条曲面 $[f](x, y, z)$ 与参数曲面 $\mathbf{P}(u, v)$ 的法向差距

为控制区间隐式曲面的表面形状, 使得其尽量接近参数曲面, 引入法向差

$$\begin{aligned} M_l(\mathbf{F}) &:= \int_{\underline{u}}^{\bar{u}} \int_{\underline{v}}^{\bar{v}} \left(\nabla l f(\mathbf{P}(u, v)) - \vec{n}(u, v) \right)^2 dudv := \mathbf{F}_l' * MF_l * \mathbf{F}_l, \\ M_u(\mathbf{F}) &:= \int_{\underline{u}}^{\bar{u}} \int_{\underline{v}}^{\bar{v}} \left(\nabla u f(\mathbf{P}(u, v)) - \vec{n}(u, v) \right)^2 dudv := \mathbf{F}_u' * MF_u * \mathbf{F}_u. \end{aligned} \quad (3.5)$$

其中 $\vec{n}(u, v)$ 为参数曲面在 u, v 处的法向量值, $MF_l = MF_u := MF$;

3. 能量

为减少区间隐式曲面出现多分支的可能性, 考虑如下的能量

$$\begin{aligned} T_l(\mathbf{F}) &:= \int_{\underline{x}}^{\bar{x}} \int_{\underline{y}}^{\bar{y}} \int_{\underline{z}}^{\bar{z}} (l f_{xx}^2 + l f_{yy}^2 + l f_{zz}^2 + 2(l f_{xy}^2 + l f_{yz}^2 + l f_{xz}^2)) dxdydz := \mathbf{F}_l' * TF_l * \mathbf{F}_l, \\ T_u(\mathbf{F}) &:= \int_{\underline{x}}^{\bar{x}} \int_{\underline{y}}^{\bar{y}} \int_{\underline{z}}^{\bar{z}} (u f_{xx}^2 + u f_{yy}^2 + u f_{zz}^2 + 2(u f_{xy}^2 + u f_{yz}^2 + u f_{xz}^2)) dxdydz := \mathbf{F}_u' * TF_u * \mathbf{F}_u. \end{aligned} \quad (3.6)$$

同样地, 我们有 $TF_l = TF_u := TF$.

有了以上的准备工作, 我们现在可以建立求解模型。首先引入几个记号: $\mathbf{F}_2 := [\mathbf{F}_l; \mathbf{F}_r]$ (即两个列向量上下相连), $LF_2 := \begin{pmatrix} LF & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & LF \end{pmatrix}$, $MF_2 := \begin{pmatrix} MF & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & MF \end{pmatrix}$, $TF_2 := \begin{pmatrix} TF & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & TF \end{pmatrix}$.

求解模型:

$$\begin{aligned} \min \mathbf{F}_2' * H * \mathbf{F}_2 &:= \mathbf{F}_2' * (LF_2 + w_1 * MF_2 + w_2 * TF_2) * \mathbf{F}_2, \\ s.t. \quad &\begin{cases} l f(\mathbf{P}(u, v)) \leq 0 \leq u f(\mathbf{P}(u, v)), & (a) \\ \bar{f}_{ijk} - \underline{f}_{ijk} \geq 0, \forall i, j, k, & (b) \\ \sum_{i,j,k} (\bar{f}_{ijk}^2 + \underline{f}_{ijk}^2) = 1. & (c) \end{cases} \end{aligned} \quad (3.7)$$

求解模型中的限制条件 (c) 是为了规范化求出的结果, 防止产生全 0 解。

§4 几个例子

例 1: 双二次参数曲面的节点为 $p_u = p_v = [0, 0, 0, 1/2, 1, 1, 1]$, 控制顶点为

$$q = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0, 0, 0, \frac{1}{2} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, 1, \frac{7}{10} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{2}{3}, \frac{1}{6}, 0, \frac{3}{5} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1, 0, 1, \frac{5}{6} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, 0, \frac{4}{5} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1, \frac{7}{7} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, \frac{4}{5} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{5}{6}, \frac{1}{3}, 1, \frac{2}{5} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{6}, \frac{2}{3}, 0, \frac{3}{5} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{5} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 0, \frac{1}{2} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{5}{6}, \frac{2}{3}, 1, \frac{5}{6} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0, 1, 0, \frac{3}{5} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{1}{3}, \frac{5}{6}, 1, \frac{4}{5} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, 0, \frac{4}{7} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1, 1, 1, \frac{2}{3} \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

考虑节点为

$$p_x = [0, 0, 0, 1/2, 1, 1, 1],$$

$$p_y = [0, 0, 0, 1, 1, 1],$$

$$p_z = [0, 0, 0, 1, 1, 1].$$

的 $2 \times 2 \times 2$ 次的区间隐式 B 样条曲面，在求解模型中取适当的权观察结果，见图 1, (b) 中的两张曲面是区间隐式曲面的边界曲面。在参数曲面上取 100×100 共一万个点代入区间隐式曲面的两个边界曲面计算代数距离并分析结果如下，

下边界：最小值为 -1.0994×10^{-4} ，平均值为 -6.6435×10^{-5} ，最大值为 -1.3112×10^{-5} ；

上边界：最小值为 1.8697×10^{-6} ，平均值为 4.6097×10^{-5} ，最大值为 9.2745×10^{-5} 。

例 2: 双二次参数曲面的节点为 $p_u = p_v = [0, 0, 0, 1/3, 2/3, 1, 1, 1]$ ，控制顶点为

$$q = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{6}, 0, 0, \frac{3}{5} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{3}, \frac{7}{10} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{1}{2}, 0, 0, \frac{7}{10} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{3}{4}, 0, \frac{1}{3}, \frac{4}{5} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{5}{6}, 0, 0, 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{3}{10} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{10} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{2} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1, \frac{1}{4}, 0, \frac{3}{10} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{3}{10} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, \frac{4}{5} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \frac{2}{5} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, 1, 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{3}{10} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0, \frac{3}{4}, 0, \frac{3}{10} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 0, \frac{7}{10} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{9}{10} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1, \frac{3}{4}, 0, \frac{4}{5} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{6}, 1, 0, \frac{1}{2} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{5} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{1}{2}, 1, 0, \frac{3}{5} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{3}{4}, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{5} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{5}{6}, 1, 0, \frac{7}{10} \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

考虑节点为

$$p_x = [0, 0, 0, 1/3, 2/3, 1, 1, 1],$$

$$p_y = [0, 0, 0, 1/3, 2/3, 1, 1, 1],$$

$$p_z = [0, 0, 0, 1/2, 1, 1, 1].$$

的 $2 \times 2 \times 2$ 次的区间隐式 B 样条曲面，在求解模型中取适当的权观察结果，见图 2, (b) 中的两张曲面是区间隐式曲面的边界曲面。在参数曲面上取 100×100 共一万个点代入区间隐式曲面的两个边界曲面计算代数距离并分析结果如下，

下边界：最小值为 -1.1615×10^{-4} ，平均值为 -5.9243×10^{-5} ，最大值为 -6.5400×10^{-6} ；

上边界：最小值为 9.6785×10^{-8} ，平均值为 5.0134×10^{-5} ，最大值为 8.5685×10^{-5} 。

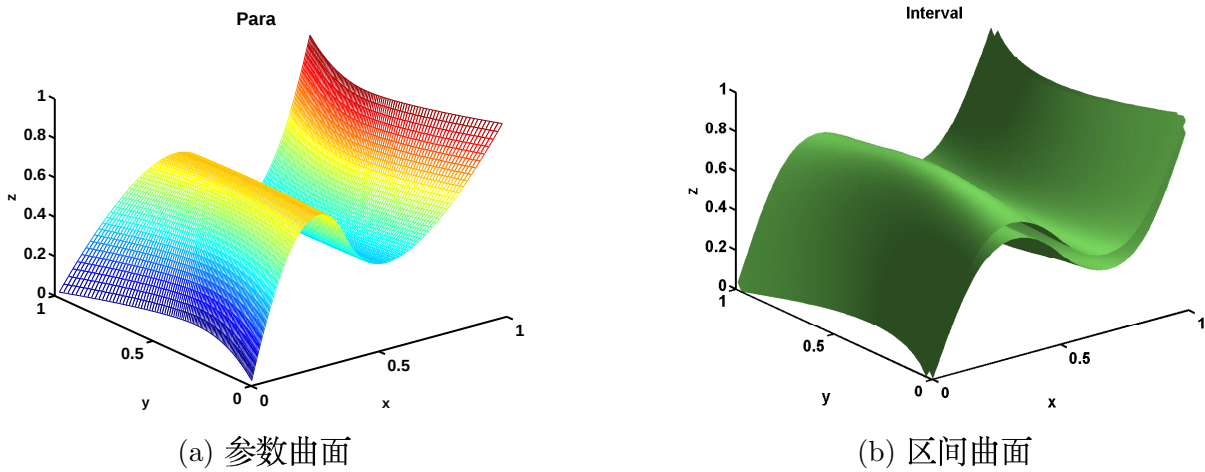


图 1: 参数曲面和区间曲面

Fig.1 Parametric surface and interval surface

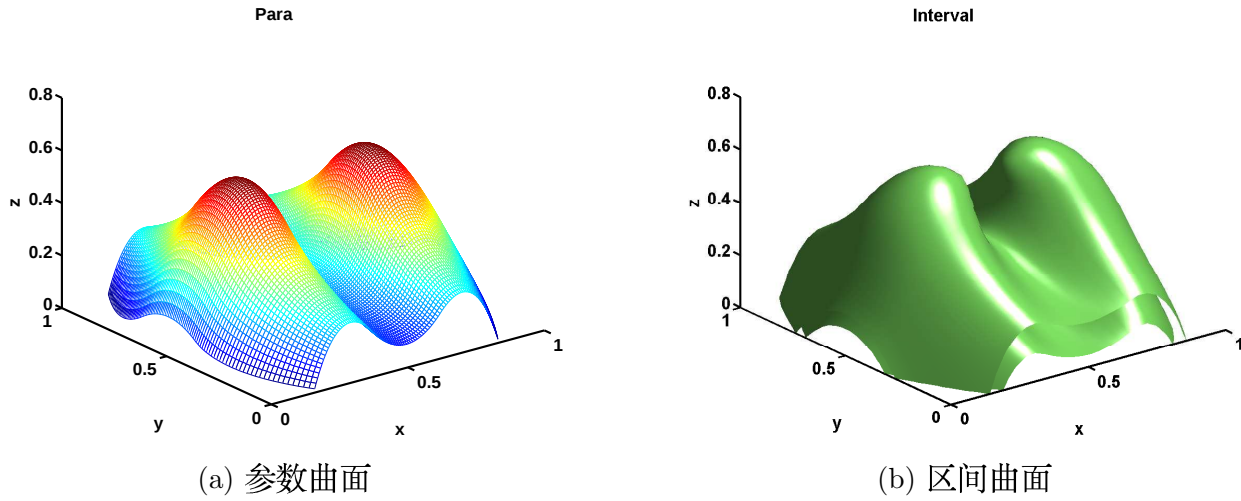


图 2: 参数曲面和区间曲面
Fig.2 Parametric surface and interval surface

§5 结论

用本文提出的方法能比较好地求得包含给定有理 B 样条曲面的区间隐式 B 样条曲面，上一节的两个例子求得的结果都较好。但是这个也存在一些问题，首先，在实际求解过程中，求解模型中的能量和法向对结果影响很大，所以如何自动调整合适的权参数使得得到的结果尽可能地好是个值得进一步研究的问题。另一个问题是在**边界限制条件求解算法**的第三步中细分参数区域 Ω_{ij} 时，如果剖分过细，则得到的限制条件太多导致求解规模太大，但如果剖分太粗，则得到的立方体也比较大，求得的区间隐式 B 样条的“宽度”会比较大，因此如何合适的剖分参数区域也是个应该进一步考虑的问题。

基于本文方法还存在的一些缺陷，如前述的如何调整权参数的问题，在实际计算中，根据经验初步可以判断权参数的数量级和大致范围，然后在程序运行中实时判断目标函数的值，再对权参数在给定的范围内扰动，可以得到进一步优化的目标函数值。对于前述的第二个问题，可以考虑自适应剖分，即在参数曲面相对较平坦的区域采用较粗的剖分，而在曲面变化比较剧烈的地方，采用细剖分，这样就可以用不是太细的剖分得到“宽度”比较小的结果。如果对于到处都变化比较剧烈的曲面，按照通常的想法得到的剖分会比较细，此时可以考虑过滤一些影响不是很大的限制条件，使得得到的限制条件规模不至于太大且能求出较理想的结果。当然，这些是目前的一些理论分析，实际结果有待进一步研究。

参考文献

- [1] Moore, R.E.. *Interval Analysis*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1966.
- [2] 杨周旺, 邓建松, 陈发来. 基于近似几何误差的动态隐式曲线重构. 软件学报, 15(6), 960–969, 2004.
- [3] 陈发来. 有理曲线的近似隐式化表示. 计算机学报, 21(9), 855–859, 1998.
- [4] Li, M., Gao, X.S. and Chou, S.C.. Quadratic approximation to plane parametric curves and its application in approximate implicitization. Visual Computer, 22(9), 906–917, 2006.

- [5] Chen, F.L., Deng, L.. Interval implicitization of rational curves. *Computer Aided Geometric Design*, 21(4), 401–415, 2004.
- [6] 陈效群, 姜文平. 有理曲线的区间 Bézier 曲线的逼近. *中国科学技术大学学报*, 31(4), 379–385, 2001.
- [7] 樊旭川, 陈发来. 有理 B 样条曲线的区间隐式化. *软件学报*, 15(6), 960–967, 2004.
- [8] 樊旭川. 区间多项式与区间隐式化方法. 博士学位论文, 中国科技大学数学系, 2005.
- [9] 刘利刚, 王国瑾, 寿华好. 区间 Bézier 曲面逼近. *计算机辅助设计与图形学学报*, 12(9), 645–650, 2000.
- [10] 李亚娟, 陈文喻, 汪国昭. 有理曲面的区间隐式化. *计算机辅助设计与图形学学报*, 18(7), 936–941, 2006.