

三角域上球形控制点的 Bézier 曲面的降阶逼近^{*}

陈越强, 吴 卉, 邓建松

(中国科学技术大学数学系, 安徽合肥 230026)

摘要: 讨论了三角域上球形控制点的 Bézier 曲面的降阶逼近问题, 给出了次数从 n 到 $n-m$ ($1 \leq m \leq n-1$) 的降阶逼近的方法. 在逼近过程中, 要求低阶球形控制点的 Bézier 曲面包含原来的实体, 同时两者的差别在某种意义下尽可能地小. 还给出了一些例子来说明该方法.

关键词: 三角域; 球形控制点; 区间 Bézier 曲面; 降阶逼近

中图分类号: TP391.72; O241.5 **文献标识码:** A

AMS Subject Classification (2000): Primary 41A10; Secondary 68U07

Degree reduction of ball-control-point Bézier surfaces over triangular domain

CHEN Yue-qiang, WU Hui, DENG Jian-song

(Department of Mathematics, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China)

Abstract: The problem of degree reduction of ball-control-point Bézier surfaces over triangular domain was discussed. A method to reduce degree from n to $n-m$ ($1 \leq m \leq n-1$) was proposed. In the method, the lower-degree ball-control-point Bézier surface was required to enclose the given original surface and the difference between the two surfaces was as small as possible. Some examples were provided to illustrate the method.

Key words: triangular domain; ball-control-point; interval Bézier surfaces; degree reduction

0 引言

在计算机图形学和计算机辅助几何设计 (computer-aided geometric design, CAGD) 中, 通常采用 Bézier 曲线和曲面表示几何形体, 因为这种表示具有许多优势, 例如仿射不变性、凸包性质等. 但是由于计算机浮点运算特征以及数值算法的近似解等原因, 一般得到的曲线和曲面只能是不精确的, 而基于这种不精确表示的几何形体进行操作时, 无法

保证得到稳定的解. 例如, 计算两条 Bézier 曲线的交, 基于浮点运算无法稳定计算出切点或者离切点很近的交点.

基于以上的原因, 在计算机图形学和 CAGD 中引入了“区间曲线”与“区间曲面”的概念, 即曲线或曲面的控制顶点为区间或者区间的张量积^[1~3]. 为了简单起见, 我们统称这种控制顶点为区间控制顶点. 区间控制顶点定义的 Bézier 曲线或曲面实际上并不是真正的曲线或曲面, 而是一个区域, 可以认为

* 收稿日期: 2006-09-05; 修回日期: 2007-01-20

基金项目: 国家重点基础研究发展(973)计划(2004CB318000), 国家自然科学基金(60473132, 10626049), 教育部博士学科点专项科研基金和教育部留学回国人员科研启动基金资助.

作者简介: 陈越强, 男, 1980年生, 博士生. 研究方向: 计算机辅助几何设计. E-mail: yqchen@mail.ustc.edu.cn

通讯作者: 邓建松, 博士/教授. E-mail: dengjs@ustc.edu.cn; Tel: 0551-3601009

它们是具有误差限的曲线或曲面. 当对这种曲线或曲面进行仿射变换后, 曲线或曲面的“宽度”或“厚度”有可能发生变化. 一种可能的改进就是把控制顶点变为圆盘或球体, 对应的 Bézier 曲线或曲面分别称为圆盘控制点的 Bézier 曲线或球形控制点的 Bézier 曲面^[4].

在处理一些具体问题时, 有时需要对几何形体的参数表示进行降阶, 而通常精确的降阶是难以实现的, 因此就考虑用近似降阶来代替. 关于这个问题已经有了不少结论.

(I) 曲线或曲面的降阶逼近

Watkins 等给出了 Bézier 曲线的降阶逼近的一些方法^[5]. 康宝生等利用遗传算法实现了有理 Bézier 曲线保端点插值的多阶逼近^[6]. 胡事民等讨论了三角域上 Bézier 曲面的降阶问题^[7].

(II) 普通“区间曲线”或“区间曲面”的降阶逼近(即控制顶点为区间或区间的张量积)

在某些情况下我们不希望丢失原有的曲线或曲面的信息, 就考虑用“区间曲线”或“区间曲面”代替原有的曲线或曲面进行降阶逼近. 孙红兵等利用线性规划和最佳一致逼近的方法实现了区间有理曲线的降阶逼近^[8]. 杨勤民等利用线性规划的方法实现了区间三角 Bézier 曲面的降阶逼近^[9].

(III) 圆盘或球形控制点的 Bézier 曲线或曲面的降阶逼近

由于区间或区间的张量积在仿射变换下发生变化, 因此有时就用对称性更高的圆盘或球体来代替. 陈发来等对圆盘控制顶点的 Bézier 曲线的降阶逼近进行了详细讨论, 在对误差度量进行了恰当定义后, 给出了降阶逼近的解析表示^[10]. 吴卉等讨论了矩形域上控制顶点为球体的 Bézier 曲面的降阶逼近问题^[11].

本文要讨论的是在三角域上控制顶点为球体的 Bézier 曲面的降阶问题. 与文献[11]类似, 我们把降阶逼近问题转化为一个可以给出解析表示的线性规划问题进行求解.

1 三角域上球形控制点的 Bézier 曲面

本节给出关于球运算的基本定义以及球形控制点的 Bézier 曲面的定义.

1.1 球运算

定义 1.1 三维空间中以 (x_0, y_0, z_0) 为中心, 半径为 r_0 的球记为 $(x_0, y_0, z_0)_{r_0}$, 即

$$\begin{aligned} (S) &:= (x_0, y_0, z_0)_{r_0} := \\ &\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - x_0)^2 + \\ &(y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \leq r_0^2\}. \end{aligned} \quad (1)$$

半径为零的球就退化为通常的三维点, 即 $(x_0, y_0, z_0)_0 = (x_0, y_0, z_0)$. 在实数域 $\mathbb{R}$ 中的数与球之间以及两个球之间可以定义如下运算:

定义 1.2

$$\begin{aligned} a(x_1, y_1, z_1)_{r_1} &:= (ax_1, ay_1, az_1)_{|a|r_1}, \forall a \in \mathbb{R}, \\ (x_1, y_1, z_1)_{r_1} + (x_2, y_2, z_2)_{r_2} &:= \\ (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)_{r_1+r_2}. \end{aligned}$$

自然地, 有下式成立:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^m a_i(x_i, y_i, z_i)_{r_i} &= \\ \left(\sum_{i=0}^m a_i x_i, \sum_{i=0}^m a_i y_i, \sum_{i=0}^m a_i z_i \right)_{\sum_{i=0}^m |a_i| r_i} \end{aligned} \quad (2)$$

1.2 三角域上球形控制点的 Bézier 曲面

与矩形域上球形控制点的 Bézier 曲面的定义类似.

定义 1.3 三角域上 n 次球形控制点的 Bézier 曲面 (ball-control-point triangular Bézier surface, 简记为 BTB 曲面) 定义为

$$(P)(u, v, w) := \sum_{i+j+k=n} (P_{ijk}) B_{ijk}^n(u, v, w), \quad (u, v, w) \in \Omega. \quad (3)$$

式中, $B_{ijk}^n(u, v, w) := \frac{n!}{i! j! k!} u^i v^j w^k$ 为 Bernstein 基函数, $(P_{ijk}) := (x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk})_{r_{ijk}}$ 称为控制球, 曲面定义域为

$$\Omega := \{(u, v, w) \mid u + v + w = 1, 0 \leq u, v, w \leq 1\}.$$

显然 BTB 曲面也可表示为

$$(P)(u, v, w) := (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))_{r(u, v, w)}, \quad (4)$$

式中,

$$\begin{aligned} x(u, v, w) &:= \sum_{i+j+k=n} x_{ijk} B_{ijk}^n(u, v, w), \\ y(u, v, w) &:= \sum_{i+j+k=n} y_{ijk} B_{ijk}^n(u, v, w), \\ z(u, v, w) &:= \sum_{i+j+k=n} z_{ijk} B_{ijk}^n(u, v, w), \\ r(u, v, w) &:= \sum_{i+j+k=n} r_{ijk} B_{ijk}^n(u, v, w). \end{aligned}$$

参数曲面

$$\begin{aligned} C(u, v, w) &:= \\ (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) &= \\ \sum_{i+j+k=n} C_{ijk} B_{ijk}^n(u, v, w). \end{aligned}$$

称为 BTB 曲面的中心曲面, $r(u, v, w)$ 称为它的半径.

可以认为 BTB 曲面就是在中心曲面 $C(u, v, w)$ 上移动半径等于 $r(u, v, w)$ 的球所扫过的实体. 这个曲面的厚度定义为 $r(u, v, w)$ 在 Ω 上的某种范数, 例如 $\|r(u, v, w)\|_1$, $\|r(u, v, w)\|_2$ 或 $\|r(u, v, w)\|_\infty$.

1.3 性质

BTB 曲面实际上是一个隐式曲面族(球面)扫过的空间区域, 为了计算这个区域的表面, 设 BTB 曲面的中心曲面为

$C(u, v, w) = (x_c(u, v, w), y_c(u, v, w), z_c(u, v, w))$, 并令

$$F(x, y, z, u, v, w) = (x - x_c(u, v, w))^2 + (y - y_c(u, v, w))^2 + (z - z_c(u, v, w))^2 - r^2(u, v, w).$$

和矩形域上球形控制点的 Bézier 曲面一样, 根据曲面的包络理论, BTB 曲面构成的区域的上下表面由下述方程确定,

$$F(x, y, z, u, v, w) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial u} F(x, y, z, u, v, w) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial v} F(x, y, z, u, v, w) = 0.$$

从这个联立方程中解出 x, y, z , 它们是关于 u, v 的函数 (w 可由 $1-u-v$ 表示), 解有两个分支, 在 $(u, v, w) \in \Omega$ 上定义参数曲面就分别是区域的上下表面.

2 BTB 曲面的降阶

2.1 问题

给定 n 次的 BTB 曲面 $(P)(u, v, w)$, 定义见式(3), 从 n 次到 $n-m$ 次的降阶就是求出一个次数为 $n-m$ 次的 BTB 曲面 $(Q)(u, v, w)$,

$$(Q)(u, v, w) = \sum_{i+j+k=n-m} (Q_{ijk}) B_{ijk}^{n-m}(u, v, w),$$

使得

$$\{(P)(u, v, w) \mid (u, v, w) \in \Omega\} \subset \{(Q)(u, v, w) \mid (u, v, w) \in \Omega\}, \quad (5)$$

而且两个 BTB 曲面之间的差别在某种意义上尽可能地小.

为了便于后面的求解, 我们需要把 $n-m$ 次的 BTB 曲面表示成 n 次 BTB 曲面,

$$(Q)(u, v, w) := \sum_{i+j+k=n} (\hat{Q}_{ijk}) B_{ijk}^n(u, v, w). \quad (6)$$

设升阶后的 $(Q)(u, v, w)$ 的中心曲面和半径方程分别为

$$\begin{aligned} \tilde{C}(u, v, w) &:= (\tilde{x}(u, v, w), \tilde{y}(u, v, w), \tilde{z}(u, v, w)) = \\ &\sum_{i+j+k=n} \tilde{C}_{ijk} B_{ijk}^n(u, v, w), \\ \tilde{r}(u, v, w) &:= \sum_{i+j+k=n} \tilde{r}_{ijk} B_{ijk}^n(u, v, w). \end{aligned} \quad (7)$$

如果 $(P)(u, v, w)$ 的中心曲面和半径方程如式(4)所示, 那么包围条件(5)等价于

$$\tilde{r}(u, v, w) \geq r(u, v, w) + \text{dist}(C(u, v, w), \tilde{C}(u, v, w)), \quad (9)$$

式中,

$$\begin{aligned} \text{dist}(C(u, v, w), \tilde{C}(u, v, w)) &= \sqrt{A}, \\ A &:= (x(u, v, w) - \tilde{x}(u, v, w))^2 + \\ &(y(u, v, w) - \tilde{y}(u, v, w))^2 + \\ &(z(u, v, w) - \tilde{z}(u, v, w))^2. \end{aligned}$$

则两个 BTB 曲面的差别尽可能地小, 就可以定义为 $\|\tilde{r}(u, v, w) - r(u, v, w)\|$ 在某种意义下尽可能地小. 我们把过程分为两步, 第一步求出中心曲面在最佳一致意义下的低阶近似, 第二步给出半径满足式(9)的低阶近似.

2.2 中心曲面的降阶

首先用最小二乘逼近方法求降阶后的 BTB 曲面的控制球的球心. 对于初始曲面的控制球心 $\{V_{ijk}, i+j+k=n\}$, 假设所要求的降阶曲面的控制球心为 $\{\hat{V}_{ijk}, i+j+k=n-m\}$. 对 $\{\hat{V}_{ijk}\}$ 进行升阶为 $\{\bar{V}_{ijk}, i+j+k=n\}$, 这里 $\{\hat{V}_{ijk}, i+j+k=n-m\}$ 和 $\{\bar{V}_{ijk}, i+j+k=n\}$ 未知. $\{\hat{V}_{ijk}, i+j+k=n\}$ 满足对 $\{V_{ijk}, i+j+k=n\}$ 的最小二乘逼近, 即

$$\sum_{i+j+k=n} \|V_{ijk} - \bar{V}_{ijk}\|_2^2. \quad (10)$$

达到最小, 上式中 $\|\cdot\|_2$ 为欧氏距离.

上面提到的 $\{\hat{V}_{ijk}, i+j+k=n-m\}$ 和由此得到的 $\{\bar{V}_{ijk}, i+j+k=n\}$ 满足方程

$$\sum_{i+j+k=n-m} \hat{V}_{ijk} B_{ijk}^{n-m}(u, v, w) = \sum_{i+j+k=n} \bar{V}_{ijk} B_{ijk}^n(u, v, w). \quad (11)$$

当 $m=1$ 时, 由式(11)易得控制顶点升阶递推公式

$$\bar{V}_{ijk} = \frac{1}{n} (i\hat{V}_{i-1,j,k} + j\hat{V}_{i,j-1,k} + k\hat{V}_{i,j,k-1}). \quad (12)$$

当 $m>1$ 时, 反复运用式(12)即可得到类似的递推关系. 升阶形成的控制网格序列就收敛到所定义的曲面片. 由升阶公式, 中心曲面的降阶逼近就转化为如下的无约束二次规划问题

$$\min \sum_{i+j+k=n} \|\bar{V}_{ijk} - V_{ijk}\|_2^2. \quad (13)$$

式中, 每个 $\bar{V}_{ijk}$ 是 $\hat{V}_{ijk}$ 的线性组合. 不妨记 $\hat{V}_{ijk} = (x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk})$, 则 $\hat{V}_{ijk}$ 满足规划问题式(13)的一个充要条件: 对目标函数中的每个变量的偏导数都为 0. 记

$$G := \sum_{i+j+k=n} \|\bar{V}_{ijk} - V_{ijk}\|_2^2. \quad (14)$$

则问题转化为求 $\bar{V}_{ijk}$, 即要求得 $\hat{V}_{ijk}$, 使得其满足

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x_{ijk}} &= 0, i+j+k = n-m, \\ \frac{\partial G}{\partial y_{ijk}} &= 0, i+j+k = n-m, \\ \frac{\partial G}{\partial z_{ijk}} &= 0, i+j+k = n-m. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

这时问题就变成一个容易求解的线性方程组问题.

2.3 半径的降阶逼近

求出中心曲面后, 降阶逼近过程的第二步就是求解控制球的半径, 使得到的降阶曲面包含初始曲面, 其方法和求解中心曲面类似. 设初始曲面的控制球半径为 $\{r_{ijk}, i+j+k=n\}$, 降阶后的控制球半径为 $\{\hat{r}_{ijk}, i+j+k=n-m\}$, 将 $\{\hat{r}_{ijk}, i+j+k=n-m\}$ 升阶为 $\{\bar{r}_{ijk}, i+j+k=n\}$, 我们的目的就是要求出 $\{\bar{r}_{ijk}\}$, 也即求出 $\{\hat{r}_{ijk}\}$, 使得降阶曲面满足包围条件式(5).

记

$$\varepsilon_{ijk} := \bar{r}_{ijk} - r_{ijk} - \|\bar{V}_{ijk} - V_{ijk}\|_2, \quad (16)$$

$$i+j+k = n.$$

则半径的降阶问题就转化为如下的优化问题

$$\left. \begin{aligned} \min \max \varepsilon_{ijk}, \\ \text{s. t.} \quad \varepsilon_{ijk} \geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

和控制球心的升阶一样, 当 $m=1$ 时, 控制球半径也满足升阶公式

$$\bar{r}_{ijk} = \frac{1}{n} (i\hat{r}_{i-1,j,k} + j\hat{r}_{i,j-1,k} + k\hat{r}_{i,j,k-1}). \quad (18)$$

当 $m>1$ 时, 反复运用 m 次升阶公式即可得到类似的递推公式, 则优化问题式(17)实际上是线性规划问题.

3 几个算例

例 3.1 给定初始 3 次 Bézier 曲面的控制球球心如下:

(0.5000, 0.8660, 0.0000), (0.3333, 0.5774, 0.1667),
(0.1667, 0.2887, 0.1667), (0.0000, 0.0000, 0.0000),
(0.6667, 0.5774, 0.1667), (0.5000, 0.2887, 0.3333),

(0.3333, 0.0000, 0.1667), (0.8333, 0.2887, 0.1667),
(0.6667, 0.0000, 0.1667), (1.0000, 0.0000, 0.0000).
控制球半径均为 0.2, 降阶到 2 次, 求解结果如下:

(I) 中心曲面近似降阶一次后的控制球中心为
(0.5000, 0.8660, -0.0095), (0.2500, 0.4300, 0.2762),
(0.0000, 0.0000, -0.0095), (0.7500, 0.4330, 0.2762),
(0.5000, 0.0000, 0.2762), (1.000, 0.0000, -0.0095).

(II) 中心曲面的近似降阶后的结果再升阶得到的控制点列为

(0.5000, 0.8660, -0.0095), (0.3333, 0.5774, 0.1810),
(0.1667, 0.2887, 0.1810), (0.0000, 0.0000, -0.0095),
(0.6667, 0.5774, 0.1810), (0.5000, 0.2887, 0.2762),
(0.3333, 0.0000, 0.1810), (0.8333, 0.2887, 0.1810),
(0.6667, 0.0000, 0.1810), (1.0000, 0.0000, -0.0095).

(III) 此控制点列与初始控制点列的差为
(0.0000, 0.0000, -0.0095), (0.0000, 0.0000, 0.0143),
(0.0000, 0.0000, 0.0143), (0.0000, 0.0000, -0.0095),
(0.0000, 0.0000, 0.0143), (0.0000, 0.0000, -0.0571),
(0.0000, 0.0000, 0.0143), (0.0000, 0.0000, 0.0143),
(0.0000, 0.0000, 0.0143), (0.0000, 0.0000, -0.0095).

(IV) 半径也同样处理, 降阶后的半径升阶后与原半径的差为

0.0095, 0.0413,
0.0413, 0.0095,
0.0413, 0.0571,
0.0413, 0.0413,
0.0143, 0.0095.

求解得到的降阶曲面和初始曲面的比较如图 1 所示. 图 1(a) 中实际上包含了初始曲面的上、下边界曲面和中心曲面以及降阶曲面的上、下边界曲面和中心曲面. 从图 1 的(b)、(c)、(d)可以看出, 中心曲面的误差最大不超过 0.01, 上下边界曲面的误差不超过 0.05. 由于降阶后顶点自由度的减少, 这个误差限是可接受的.

例 3.2 给定初始 5 次 Bézier 曲面的控制球球心坐标如下:

(0.0000, 1.0000, 0.0000), (0.0000, 0.8000, 0.1000),
(0.0000, 0.6000, 0.1111), (0.0000, 0.4000, 0.1000),
(0.0000, 0.2000, 0.1000), (0.0000, 0.0000, 0.0000),
(0.2000, 0.8000, 0.1000), (0.2000, 0.6000, 0.0667),
(0.2000, 0.4000, 0.0667), (0.2000, 0.2000, 0.0667),
(0.2000, 0.0000, 0.1000), (0.4000, 0.6000, 0.1111),
(0.4000, 0.4000, 0.0667), (0.4000, 0.2000, 0.0667),

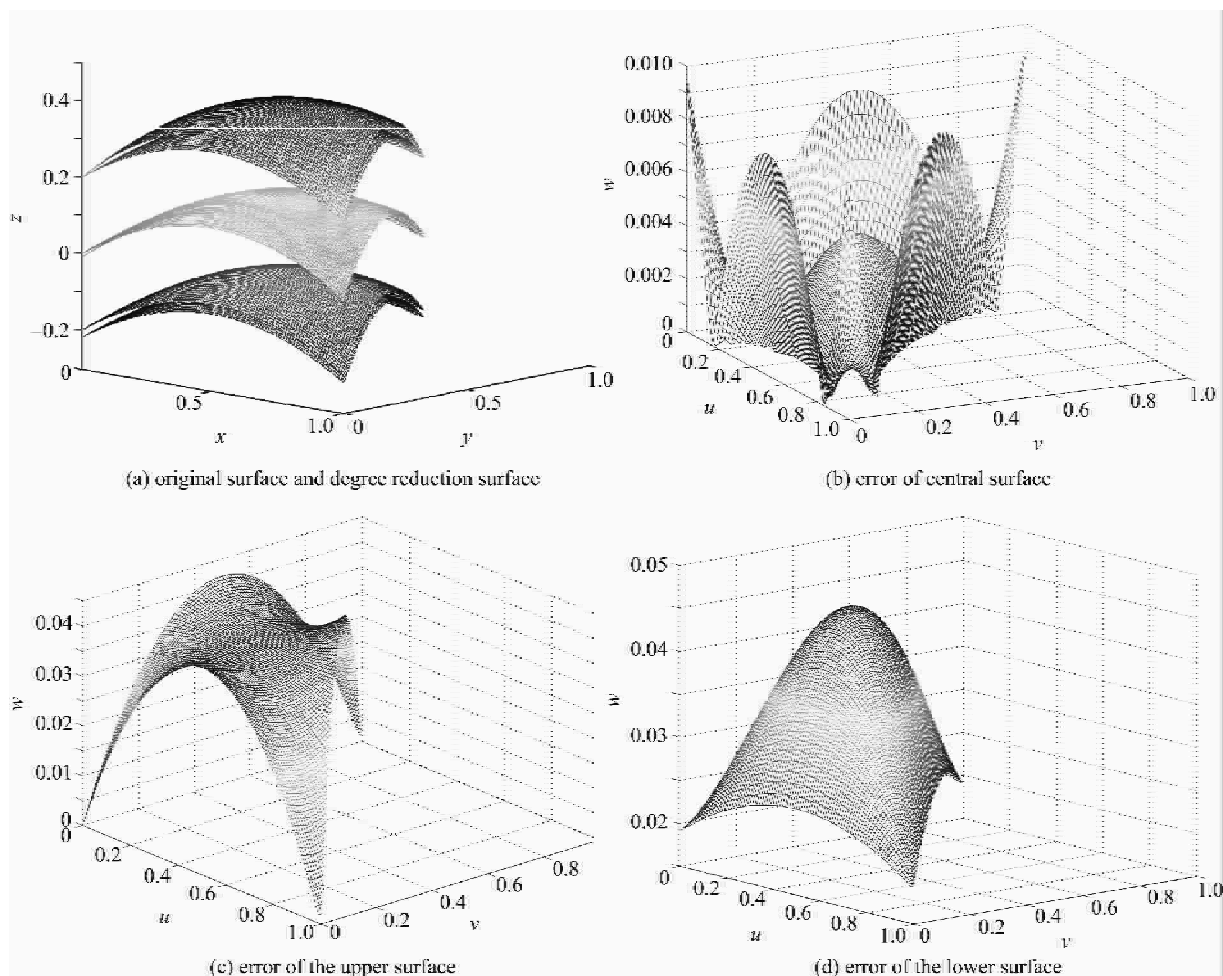


图 1 初始曲面和降阶曲面的比较

Fig. 1 Comparison between original surface and degree reduction surface

(0.4000, 0.0000, 0.1111), (0.6000, 0.4000, 0.1111),
 (0.6000, 0.2000, 0.0667), (0.6000, 0.0000, 0.1111),
 (0.8000, 0.2000, 0.1000), (0.8000, 0.0000, 0.1000),
 (1.0000, 0.0000, 0.0000).

控制球半径均取为 0.01, 降阶到 4 次, 求解的结果如下:

(I) 中心曲面近似降阶一次后的控制球中心为
 (0.0000, 1.0000, 0.0013), (0.0000, 0.7500, 0.1208),
 (0.0000, 0.5000, 0.1068), (0.0000, 0.2500, 0.1208),
 (0.0000, 0.0000, 0.0013), (0.2500, 0.7500, 0.1208),
 (0.2500, 0.5000, 0.0473), (0.2500, 0.2500, 0.0473),
 (0.2500, 0.0000, 0.0013), (0.5000, 0.5000, 0.1068),
 (0.5000, 0.2500, 0.0473), (0.2500, 0.0000, 0.1208),
 (0.7500, 0.2500, 0.1208), (0.5000, 0.0000, 0.1068),
 (0.7500, 0.0000, 0.1208).

(II) 把中心曲面的降阶结果升阶得到的控制点列为

(0.0000, 1.0000, 0.0013), (0.0000, 0.8000, 0.0969),
 (0.0000, 0.6000, 0.1124), (0.0000, 0.4000, 0.1124),
 (0.0000, 0.2000, 0.0969), (0.0000, 0.0000, 0.0013),
 (0.2000, 0.8000, 0.0969), (0.2000, 0.6000, 0.0767),
 (0.2000, 0.4000, 0.0592), (0.2000, 0.2000, 0.0767),
 (0.2000, 0.0000, 0.0969), (0.4000, 0.6000, 0.1124),
 (0.4000, 0.4000, 0.0592), (0.4000, 0.2000, 0.0592),
 (0.4000, 0.0000, 0.1124), (0.6000, 0.4000, 0.1124),
 (0.6000, 0.2000, 0.0767), (0.6000, 0.0000, 0.1124),
 (0.8000, 0.2000, 0.0969), (0.8000, 0.0000, 0.0969),
 (1.0000, 0.0000, 0.0013).

(III) 此控制点列与初始控制点列的差为
 (0.0000, 0.0000, 0.0013), (0.0000, 0.0000, -0.0031),
 (0.0000, 0.0000, 0.0013), (0.0000, 0.0000, 0.0013),
 (0.0000, 0.0000, -0.0031), (0.0000, 0.0000, 0.0013),
 (0.0000, 0.0000, -0.0031), (0.0000, 0.0000, 0.0100),
 (0.0000, 0.0000, -0.0075), (0.0000, 0.0000, 0.0100),

(0.0000,0.0000,-0.0031),(0.0000,0.0000,0.0013),
 (0.0000,0.0000,-0.0075),(0.0000,0.0000,-0.0075),
 (0.0000,0.0000,0.0013),(0.0000,0.0000,0.0013),
 (0.0000,0.0000,0.0100),(0.0000,0.0000,0.0013),
 (0.0000,0.0000,-0.0031),(0.0000,0.0000,-0.0031),
 (0.0000,0.0000,0.0013).

从顶点数据上看,降阶后的中心曲面与原中心曲面误差明显比例 3.1 中 3 阶降到 2 阶的误差小.

(IV) 半径也同样处理,降阶后的半径与原半径的差为

0.0013,0.0052,
 0.0013,0.0013,
 0.0052,0.0013,
 0.0052,0.0100,
 0.0096,0.0100,
 0.0052,0.0013,
 0.0096,0.0096,
 0.0013,0.0013,

0.0100,0.0013,
 0.0052,0.0052,
 0.0013.

求解得到的降阶曲面和初始曲面的比较如图 2 所示. 图 2(a) 中有六张曲面,代表的意义和例 3.1 中描述的一样. 降阶曲面的中心曲面和初始曲面的中心曲面的误差比例 3.1 中的结果要小(从顶点的误差可以看出),所以看起来就和一张曲面一样. 边界曲面的误差也比例 3.1 中小,但是相对误差比上例大. 比较两个例子我们猜测降阶的结果不仅和初始曲面的次数有关,也和初始曲面的形状的规则程度有关. 例 3.2 中的初始曲面没有例 3.1 中的形状平滑(在曲面中间处有凹陷),所以降阶后半径的相对误差要大一些. 图 2(b)、(c)、(d) 分别给出了降阶后的中心曲面以及两个边界曲面和对应的初始曲面的中心曲面以及两个边界曲面的误差的图形. 例 3.2 中误差的量级都是 10^{-3} ,明显比例 3.1 中的误差小,这是由于例 3.2 中初始曲面的次数是 5 次,而

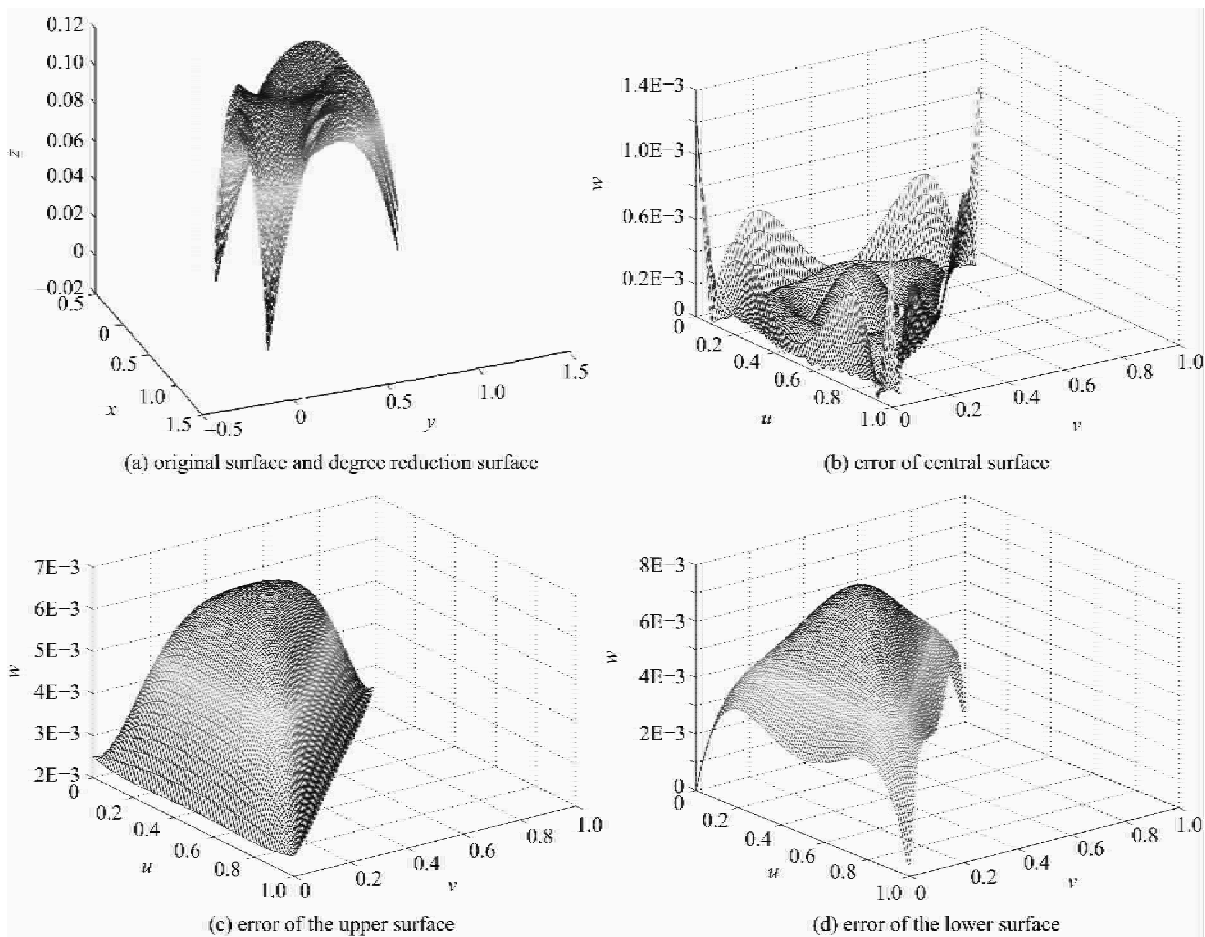


图 2 初始曲面和降阶曲面的比较

Fig. 2 Comparison between original surface and degree reduction surface

例 3.1 中初始曲面的次数是 3 次,在同样是降阶 1 次的情况下,例 3.1 中顶点自由度减少的比例比例 3.2 大,因此误差也就相对要大一些.

例 3.3 给定初始 5 次 Bézier 曲面的控制球心坐标如下:

(0.0000,1.0000,0.0000),(0.0000,0.8000,0.1667),
(0.0000,0.6000,0.2500),(0.0000,0.4000,0.2500),
(0.0000,0.2000,0.1667),(0.0000,0.0000,0.0000),
(0.2000,0.8000,0.1667),(0.2000,0.6000,0.3333),
(0.2000,0.4000,0.1667),(0.2000,0.2000,0.3333),
(0.2000,0.0000,0.1667),(0.4000,0.6000,0.2500),
(0.4000,0.4000,0.3333),(0.4000,0.2000,0.3333),
(0.4000,0.0000,0.2500),(0.6000,0.4000,0.2500),
(0.6000,0.0000,0.2500),(0.6000,0.2000,0.1667),
(0.8000,0.2000,0.1667),(0.8000,0.0000,0.1667),
(1.0000,0.0000,0.0000).

取控制球半径均为 0.1,降阶到 2 次,求解结果如下:

(I) 中心曲面近似降阶三次后的控制球中心为
(0.0000,1.0000,-0.0040),(0.0000,0.5000,0.4325),
(0.0000,0.0000,-0.0040),(0.5000,0.5000,0.4325),
(0.0005,0.0000,0.4325),(1.0000,0.0000,-0.0040).

(II) 中心曲面的降阶结果升阶得到的控制点列为
(0.0000,1.0000,-0.0040),(0.0000,0.8000,0.1706),
(0.0000,0.6000,0.2579),(0.0000,0.4000,0.2579),
(0.0000,0.2000,0.1706),(0.0000,0.0000,-0.0040),
(0.2000,0.8000,0.1706),(0.2000,0.6000,0.3016),
(0.2000,0.4000,0.3452),(0.2000,0.2000,0.3016),
(0.2000,0.0000,0.1706),(0.4000,0.6000,0.2579),
(0.4000,0.4000,0.3452),(0.4000,0.2000,0.3452),
(0.4000,0.0000,0.2579),(0.6000,0.4000,0.2579),
(0.6000,0.2000,0.3016),(0.6000,0.0000,0.2579),
(0.8000,0.2000,0.1706),(0.8000,0.0000,0.1706),
(1.0000,0.0000,-0.0040).

(III) 此控制点列与初始控制点列的差为
(0.0000,0.0000,-0.0040),(0.0000,0.0000,0.0031),
(0.0000,0.0000,0.0079),(0.0000,0.0000,0.0079),
(0.0000,0.0000,0.0040),(0.0000,0.0000,-0.0040),
(0.0000,0.0000,0.0040),(0.0000,0.0000,-0.0317),
(0.0000,0.0000,0.0119),(0.0000,0.0000,-0.0317),
(0.0000,0.0000,0.0040),(0.0000,0.0000,0.0079),
(0.0000,0.0000,0.0119),(0.0000,0.0000,0.0119),
(0.0000,0.0000,0.0079),(0.0000,0.0000,0.0079),
(0.0000,0.0000,-0.0317),(0.0000,0.0000,0.0079),

(0.0000,0.0000,0.0040),(0.0000,0.0000,0.0040),
(0.0000,0.0000,-0.0040).

(IV) 半径也同样处理,降阶后的半径与原半径的差为

0.0179,0.0258,
0.0298,0.0298,
0.0258,0.0179,
0.0258,0.0317,
0.0337,0.0317,
0.0258,0.0298,
0.0337,0.0337,
0.0298,0.0298,
0.0317,0.0298,
0.0258,0.0258,
0.0179.

从图 3(a)可以看出降阶后的中心曲面与原中心曲面误差比较小,因为是从 5 次降到 2 次,所以误差比例 3.2 中 5 次降到 4 次的误差大一些是合理的,但是误差量级也是 10^{-3} ,这说明在其他条件一样时,初始曲面形状平滑的曲面降阶之后误差相对比较小.结合之前的两个例子,可以看出:降阶后的误差大小不但和初始次数有关,也和降阶的次数有关,还和初始曲面的形状的规则程度有关.一般地,初始曲面次数越高、降的次数越小、初始曲面形状越规则,则降阶后的误差越小.

4 结论

本文讨论了三角域上球形控制顶点的 Bézier 曲面的降阶逼近.把问题分为两步,首先对中心曲面进行最佳一致降阶逼近,然后对半径表示进行满足包围条件的降阶逼近.文中给出了从 n 次降到 $n-m$ ($1 \leq m \leq n-1$) 次的方法.可以看出,当初始曲面的次数较小时,降阶后的结果误差相对较大,而次数越大时,降阶后的结果和初始曲面的误差较小,这是因为次数较小时,降阶后牺牲的控制顶点自由度占原有控制顶点自由度的比例相对要大.比如从 3 次降到 2 次时,控制点数从 10 减少到 6,牺牲的自由度占的比例为 0.4,而从 5 次降到 4 次时,控制点数从 21 减少到 15,牺牲的自由度占的比例为 $6/21 < 0.4$.从实验可以得出结论:当降阶的次数相对原曲面次数较小时,可以得到比较精确的降阶逼近曲面,而且初始曲面的几何形状越规则,降阶得到的结果越接近于初始曲面.

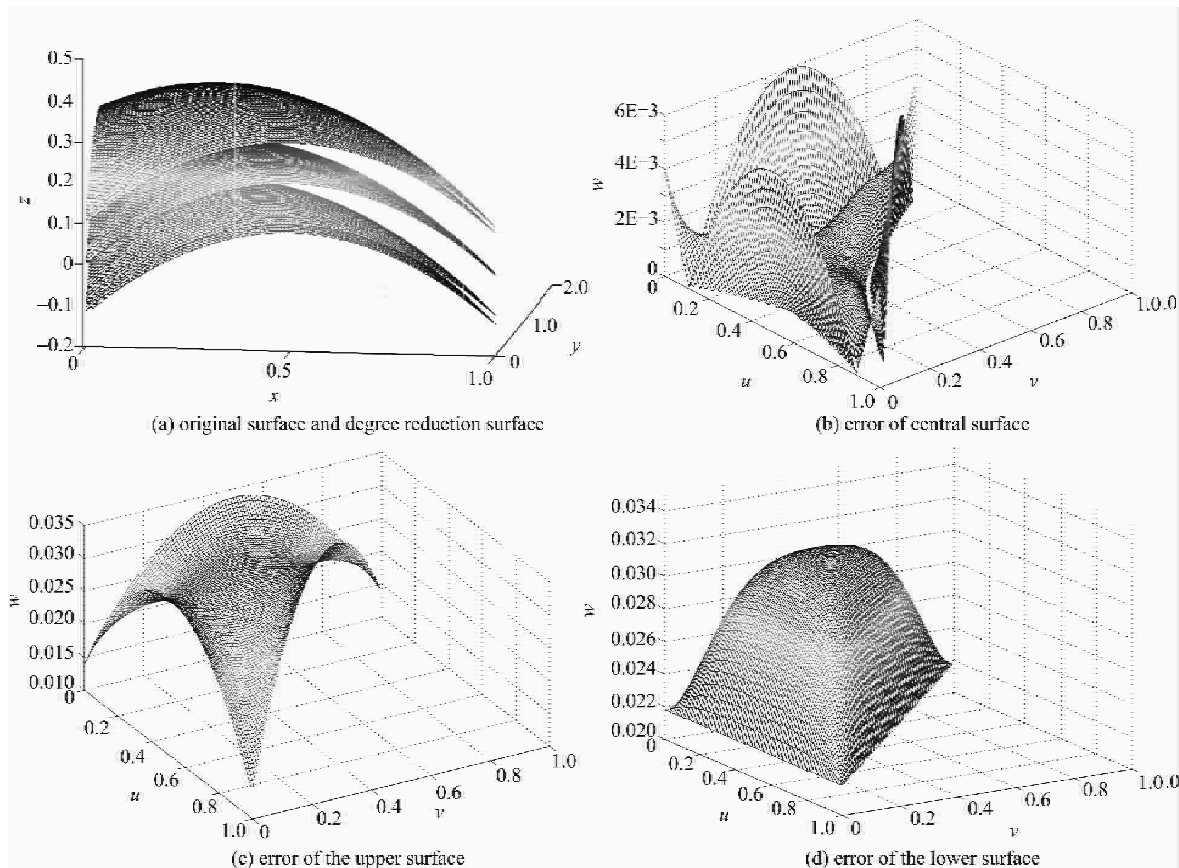


图 3 初始曲面和降阶曲面的比较

Fig. 3 Comparison between original surface and degree reduction surface

参考文献(References)

- [1] Mudur S P, Koparkar P A. Interval methods for processing geometric objects [J]. IEEE Computer Graphics Applications, 1984, 4(2): 7-17.
- [2] Patrikalakis N M. Robustness issue in geometric and solid modeling[J]. Computer-Aided Design, 2000, 32: 629-689.
- [3] Sederberg T W, Farouki R T. Approximation by interval Bézier curves[J]. IEEE Computer Graphics Applications, 1992, 15(2): 87-95.
- [4] Lin Q, Rokne J. Disk Bézier curves [J]. Computer Aided Geometric Design, 1998, 15(7): 721-737.
- [5] Watkins M A, Worsey A J. Degree reduction of Bézier curves[J]. Computer-Aided Design, 1988, 20(7): 398-405.
- [6] KANG Bao-sheng, SHI Mao, ZHANG Jin-qiao. Degree reduction of rational Bézier curves[J]. Journal of Software, 2004, 15(10): 1 522-1 527.
康宝生, 石茂, 张景峤. 有理 Bézier 曲线的降阶[J]. 软件学报, 2004, 15(10): 1 522-1 527.
- [7] Hu S M, Zuo Z, Sun J G. Approximate degree reduction of triangular Bézier surfaces [J]. Tsinghua Science and Technology, 1998, 3(2): 1 001-1 004.
- [8] SUN Hong-bing, CHEN Xiao-qun, LI Huai-yuan. Degree reduction of interval rational curves[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2006, 36(9): 968-973.
孙红兵, 陈效群, 李怀远. 区间有理曲线的降阶[J]. 中国科学技术大学学报, 2006, 36(9): 968-973.
- [9] YANG Qin-min, YANG Xun-nian, WANG Guo-zhao. Approximate degree reduction of interval triangular Bézier surfaces[J]. Journal of Software, 2002, 13(11): 2 176-2 182.
杨勤民, 杨勋年, 汪国昭. 区间三角 Bézier 曲面的降阶逼近[J]. 软件学报, 2002, 13(11): 2 176-2 182.
- [10] Chen F L, Yang W. Degree reduction of disk Bézier curves[J]. Computer Aided Geometric Design, 2004, 21(3): 263-280.
- [11] WU Hui, DENG Jian-song. Degree reduction of ball control point Bézier surfaces[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2006, 36(6): 582-589.
吴卉, 邓建松. 球形控制点的 Bézier 曲面的降阶逼近 [J]. 中国科学技术大学学报, 2006, 36(6): 582-589.